

УДК 532.5

ТЕЧЕНИЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ, ВЫЗВАННОЕ РАСТЯЖЕНИЕМ ЛИСТА ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ, С УЧЕТОМ СКОЛЬЖЕНИЯ

М. М. Хайдер^{*,**}, А. М. Меджахед^{**}

* Колледж науки Исламского университета им. Аль-Имама Ибн Сауда,
Рияд, Саудовская Аравия

** Университет г. Бенха, Бенха, Египет

E-mails: mohamedmbd@yahoo.com, ah_mg_sh@yahoo.com

Получено численное решение задачи о течении ньютоновской жидкости по непроницаемому растягиваемому листу переменной толщины при степенном законе распределения скорости по поверхности листа с учетом скольжения. Течение жидкости обусловлено нелинейным законом растяжения листа. Дифференциальные уравнения задачи сведены к обыкновенному нелинейному дифференциальному уравнению с соответствующими краевыми условиями, зависящими от физических параметров задачи. Обыкновенное дифференциальное уравнение решено численно спектральным методом Чебышева. Исследовано влияние проскальзывания и закона изменения толщины листа на характеристики течения и локальный коэффициент поверхностного трения. Показано, что полученные результаты согласуются с известными результатами.

Ключевые слова: ньютоновская жидкость, растягиваемый лист, спектральный метод Чебышева, скорость проскальзывания, переменная толщина.

Введение. Изучению течения ньютоновской жидкости по поверхности листа, протягиваемого через щель, уделяется большое внимание. Это обусловлено тем, что данное течение встречается во многих технологических процессах, таких как экструзия полимерных листов, волочение проволоки, производство бумаги, производство стекловолокна, горячая прокатка, отверждение жидких кристаллов, нефтедобыча, непрерывное охлаждение и кручение нитей, производство смазочных материалов и эмульсий.

Проведено большое количество экспериментальных и теоретических исследований течения пограничного слоя ньютоновской жидкости. В работе [1] впервые изучено течение жидкости по поверхности растягиваемого листа в предположении, что эта поверхность растягивается по линейному закону. Исследованию течения ньютоновской жидкости по растягиваемой поверхности и процесса переноса тепла посвящено очень большое число работ, поэтому в данной работе рассматриваются только последние из них. В [2] анализ задачи проводится в предположении, что температура поверхности листа постоянна. В работе [3] задача решается при постоянной скорости листа и температуре, изменяющейся по степенному закону.

В [4] предполагается, что скорость поверхности изменяется по линейному закону, а ее температура меняется вдоль листа. Процесс переноса тепла вблизи непрерывно растягиваемого листа, температура поверхности которого изменяется, исследуется в [5]. В [6] решена

задача с учетом смешанной конвекции, решение получено в виде рядов с использованием гомотопического анализа. Однако до последнего времени не учитывалось скольжение жидкости по растягиваемой поверхности.

До 2010 г. опубликовано большое количество работ, посвященных изучению влияния частичного проскальзывания на течение. Проскальзывание происходит при течении таких жидкостей, как эмульсии, суспензии, мыльные и полимерные растворы. Также этот процесс имеет место при шлифовании искусственных клапанов сердца и внутренних полостей. В работе [7] указано на возросшую в последнее десятилетие необходимость исследования процесса проскальзывания. Предложены различные модели, в которых учитывается проскальзывание относительно твердой границы. Обзор этих моделей приведен в работе [8].

В [9, 10] представлены результаты исследований влияния частичного проскальзывания на течение различных неньютоновских жидкостей по поверхности растягиваемого листа. В работе [11] получено приближенное аналитическое решение задачи о течении тонкой вязкой пленки по горизонтальной растягиваемой поверхности при наличии потока тепла. В [12] изучено течение пограничного слоя по растягиваемой поверхности листа переменной толщины. Однако до сих пор не рассматривались неоднородные задачи с учетом переменной толщины листа.

В данной работе исследуется численное решение задачи о течении ньютоновской жидкости с учетом скольжения по поверхности растягиваемого листа переменной толщины.

1. Формулировка задачи. Рассматривается двумерное установившееся течение пограничного слоя несжимаемой ньютоновской жидкости по непроницаемой растягиваемой пластине. Начало координат расположено на краю щели, сквозь которую протягивается лист, находящийся в жидкости (рис. 1). Ось x направлена вдоль листа, ось y — по нормали к нему. Скорость точек на поверхности листа при его растяжении изменяется по закону $U_w = U_0(x + b)^m$, где U_0 — характерная скорость. Предполагается, что лист не плоский и его толщина изменяется по закону $y = A(x + b)^{(1-m)/2}$, где A — малая константа, такая что лист можно считать тонким; m — показатель степени в законе распределения скоростей точек поверхности листа. Ниже рассматривается случай $m \neq 1$, так как случай $m = 1$ соответствует задаче об обтекании плоского листа.

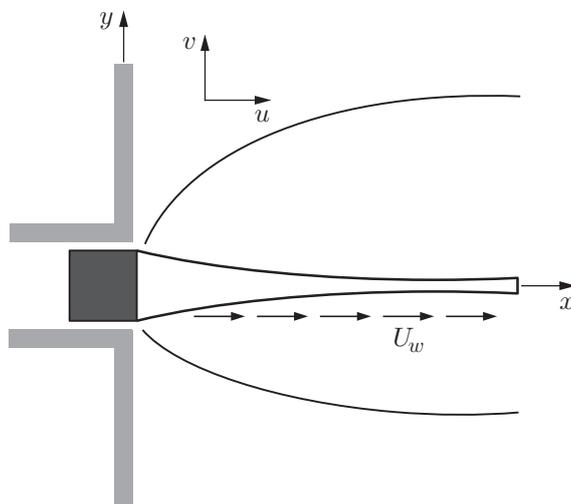


Рис. 1. Растяжение листа переменной толщины

Принимая допущения теории пограничного слоя ньютоновской жидкости и учитывая в уравнении энергии члены, соответствующие процессу распространения тепла, двумерные уравнения пограничного слоя запишем в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (1)$$

где u, v — компоненты вектора скорости в направлениях осей x, y соответственно; ν — кинематическая вязкость.

Краевые условия можно записать в виде

$$u(x, A(x+b)^{(1-m)/2}) = U_w + \lambda_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad v(x, A(x+b)^{(1-m)/2}) = 0; \quad (2)$$

$$u(x, \infty) = 0,$$

где λ_1 — коэффициент скольжения, имеющий размерность длины. Для того чтобы получить автомодельное решение, выражение для λ_1 примем в следующем виде:

$$\lambda_1 = (x+b)^{(1-m)/2}.$$

Для упрощения математического анализа задачи введем безразмерные координаты

$$\eta = y \sqrt{U_0 \frac{m+1}{2} \frac{(x+b)^{m-1}}{\nu}}, \quad \psi(x, y) = \sqrt{\nu U_0 \frac{2}{m+1} (x+b)^{m+1}} f(\eta), \quad (3)$$

где $\psi(x, y)$ — функция потока. Компоненты вектора скорости определяются через функцию $\psi(x, y)$: $u = \partial\psi/\partial y, v = -\partial\psi/\partial x$.

В переменных (3) уравнения (1), (2) сводятся к следующему безразмерному уравнению:

$$f''' + ff'' - \frac{2m}{m+1} f'^2 = 0.$$

Краевые условия записываются в виде

$$f(\alpha) = \alpha \frac{1-m}{1+m} [1 + \lambda f''(\alpha)], \quad f'(\alpha) = 1 + \lambda f''(\alpha),$$

$$f'(\infty) = 0,$$

где $\alpha = A\sqrt{U_0(m+1)/(2\nu)}$ — параметр, характеризующий толщину листа; значение параметра $\eta = \alpha = A\sqrt{U_0(m+1)/(2\nu)}$ соответствует точкам поверхности пластины; $\lambda = \sqrt{U_0(m+1)/(2\nu)}$ — параметр, характеризующий скорость скольжения.

Введем функцию $F(\zeta) = F(\eta - \alpha) = f(\eta)$. Уравнение для функции $F(\zeta)$ и краевые условия для него имеют вид

$$F''' + FF'' - \frac{2m}{m+1} F'^2 = 0; \quad (4)$$

$$F(0) = \alpha \frac{1-m}{1+m}, \quad F'(0) = 1 + \lambda F''(0), \quad F'(\infty) = 0, \quad (5)$$

где штрих обозначает производную по переменной ζ . В силу замены переменных решение уравнения будем искать в интервале $[0, \infty]$. Представляет интерес определение локального коэффициента поверхностного трения, определяющего характер течения:

$$Cf_x = -2\sqrt{(m+1)/2} \operatorname{Re}_x^{-1/2} F''(0).$$

Здесь $\operatorname{Re}_x = U_w X/\nu$ — локальное число Рейнольдса; $X = x + b$.

2. Алгоритм решения с использованием спектрального метода Чебышева.

Уравнение (4) с граничными условиями (5) решается с использованием спектрального метода Чебышева. Поскольку узлы Гаусса — Лобатто находятся в интервале $[-1, 1]$, выполним замену переменных $\zeta = \zeta_\infty(x + 1)/2$. Тогда уравнение (4) и краевые условия (5) принимают вид

$$F''' + \frac{\zeta_\infty}{2} \left(FF'' - \frac{2m}{m+1} F'^2 \right) = 0; \quad (6)$$

$$F(-1) = \alpha \frac{1-m}{1+m}, \quad F'(-1) = \frac{\zeta_\infty}{2} \left[1 + \lambda \left(\frac{2}{\zeta_\infty} \right)^2 F''(-1) \right], \quad (7)$$

$$F'(1) = 0,$$

где $F(x) \in C^m[-1, 1]$ — неизвестная функция. Производная в уравнении (6) берется по переменной x .

Процедура вычислений начинается с чебышевской аппроксимации старшей производной $F^{(3)}$, затем аппроксимируются производные меньшего порядка $F^{(i)}$, $i = 0, 1, 2$ в следующей последовательности. Полагая $F^{(3)}(x) = \varphi(x)$, путем интегрирования получаем выражения для $F^{(2)}(x)$, $F^{(1)}(x)$ и $F(x)$:

$$F^{(2)}(x) = \int_{-1}^x \varphi(x) dx + c_0, \quad F^{(1)}(x) = \int_{-1}^x \int_{-1}^x \varphi(x) dx dx + (x+1)c_0 + c_1,$$

$$F(x) = \int_{-1}^x \int_{-1}^x \int_{-1}^x \varphi(x) dx dx dx + \frac{(x+1)^2}{2!} c_0 + \frac{x+1}{1!} c_1 + c_2.$$

Из краевых условий (7) вычисляем константы интегрирования c_k , $k = 0, 1, 2$:

$$c_0 = -\frac{1}{2 + 2\lambda/\zeta_\infty} \left(\frac{\zeta_\infty}{2} + \int_{-1}^1 \int_{-1}^x \varphi(x) dx dx \right),$$

$$c_1 = \frac{1}{2 + 2\lambda/\zeta_\infty} \left(\frac{\zeta_\infty}{2} + \int_{-1}^1 \int_{-1}^x \varphi(x) dx dx \right) - \int_{-1}^1 \int_{-1}^x \varphi(x) dx dx,$$

$$c_2 = \alpha \frac{1-m}{1+m}.$$

Таким образом, получаем аппроксимации решения уравнения (6)

$$F_i = \sum_{j=0}^n l_{ij}^f \varphi_j + c_i^f, \quad F_i^{(1)} = \sum_{j=0}^n l_{ij}^{f1} \varphi_j + c_i^{f1}, \quad F_i^{(2)} = \sum_{j=0}^n l_{ij}^{f2} \varphi_j + c_i^{f2}, \quad (8)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, n,$$

где

$$l_{ij}^f = b_{ij}^3 + \left(-\frac{(x_i+1)^2}{4 + 4\lambda/\zeta_\infty} + \frac{x_i+1}{1 + \lambda/\zeta_\infty} - (x_i+1) - \alpha \frac{1-m}{1+m} \right) b_{nj}^2,$$

$$l_{ij}^{f1} = b_{ij}^2 + \left(-\frac{x_i+1}{2 + 2\lambda/\zeta_\infty} + \frac{2}{2 + 2\lambda/\zeta_\infty} - 1 \right) b_{nj}^2, \quad l_{ij}^{f2} = b_{ij} - \frac{b_{nj}^2}{2 + 2\lambda/\zeta_\infty},$$

$$c_i^f = -\frac{(x_i + 1)^2}{4 + 4\lambda/\zeta_\infty} \frac{\zeta_\infty}{2} + \frac{x_i + 1}{1 + \lambda/\zeta_\infty} \frac{\zeta_\infty}{2} + \alpha \frac{1 - m}{1 + m},$$

$$c_i^{f1} = -\frac{x_i + 1}{2 + 2\lambda/\zeta_\infty} \frac{\zeta_\infty}{2} + \frac{\zeta_\infty}{2 + 2\lambda/\zeta_\infty}, \quad c_i^{f2} = -\frac{\zeta_\infty}{4 + 4\lambda/\zeta_\infty},$$

$$b_{ij}^2 = (x_i - x_j)b_{ij}, \quad b_{ij}^3 = \frac{(x_i - x_j)^2}{2!} b_{ij},$$

b_{ij} — элементы матрицы B [13].

С использованием (8) уравнение (6) преобразуется к следующим нелинейным уравнениям:

$$\varphi_i + \frac{\zeta_\infty}{2} \left(F_i F_i^{(2)} - \frac{2m}{m+1} (F_i^{(1)})^2 \right) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n. \tag{9}$$

Система (9) является системой $n + 1$ нелинейных алгебраических уравнений относительно $n + 1$ неизвестных φ_i ($i = 0, 1, \dots, n$) и решается с помощью итерационного метода Ньютона. Подставляя найденные величины φ_i в уравнения (8), получаем численное решение уравнения (6).

3. Результаты исследования и их обсуждение. Из анализа результатов, приведенных в табл. 1, следует, что решение, полученное с помощью спектрального метода Чебышева, согласуется с известными решениями [12]. Следовательно, этот метод можно использовать при решении задач о течении пограничного слоя. Результаты численного решения задачи представлены на рис. 2–4.

На рис. 2 приведена зависимость $F'(\eta)$ при различных значениях параметра скольжения λ . С увеличением параметра λ скорость пограничного слоя вдоль листа уменьшается вблизи его поверхности и увеличивается на значительном расстоянии от нее. При наличии проскальзывания ($\lambda \neq 0$) скорость пограничного слоя вблизи листа меньше скорости самого листа. При наличии проскальзывания не вся сила, приложенная к листу для протягивания его через щель, передается в поток.

На рис. 3,а приведена зависимость $F'(\eta)$ при $m = 0,5$ и различных значениях параметра толщины α . При $m < 1$ с увеличением параметра α скорость в любой точке вблизи пластины и толщина пограничного слоя уменьшаются.

Таблица 1

Значения $-F''(0)$, полученные в настоящей работе с использованием спектрального метода Чебышева при $\alpha = 0,50; 0,25, \lambda = 0$ и в работе [12]

m	$-F''(0)$			
	$\alpha = 0,5$		$\alpha = 0,25$	
	Данные [12]	Данные настоящей работы	Данные [12]	Данные настоящей работы
10,0	1,0603	1,0603	1,1433	1,1433
9,0	1,0589	1,0588	1,1404	1,1404
7,0	1,0550	1,0551	1,1323	1,1322
5,0	1,0486	1,0486	1,1186	1,1186
3,0	1,0359	1,0358	1,0905	1,0904
2,0	1,0234	1,0234	—	—
1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,5	0,9799	0,9798	0,9338	0,9337
0	0,9576	0,9577	0,7843	0,7843
-1/3	1,0000	1,0000	0,5000	0,5000
-0,5	1,1667	1,1666	0,0833	0,0832

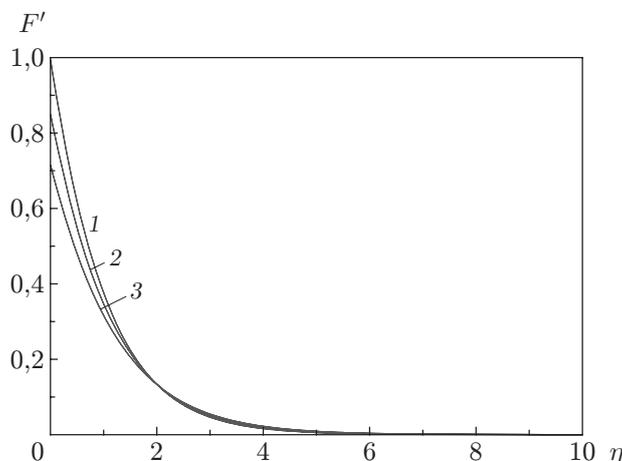


Рис. 2. Распределение скорости по поверхности листа при $m = 0,5$, $\alpha = 0,2$ и различных значениях параметра λ :
1 — $\lambda = 0$, 2 — $\lambda = 0,2$, 3 — $\lambda = 0,5$

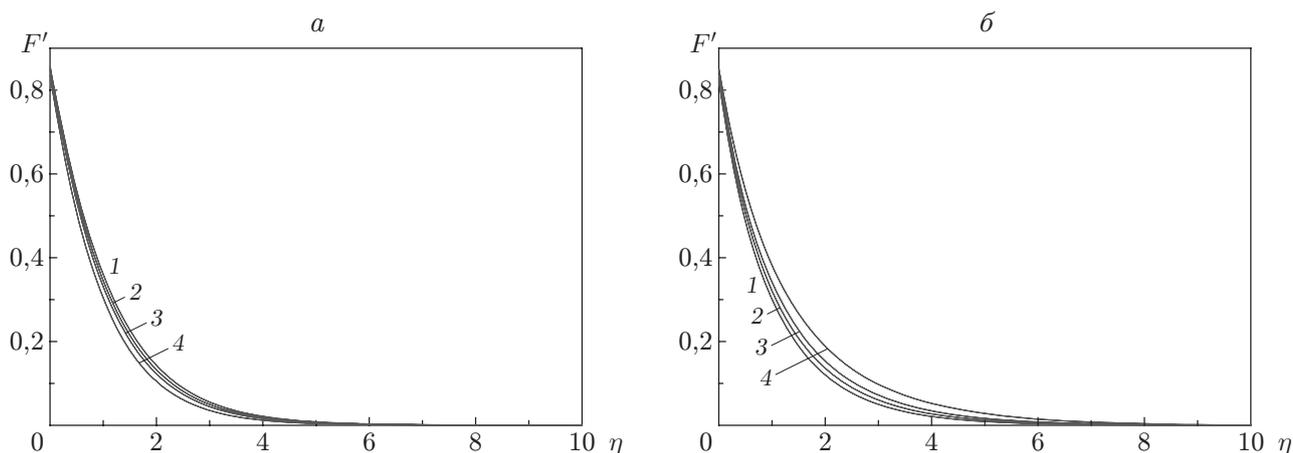


Рис. 3. Распределение скорости по поверхности листа при $\lambda = 0,2$ и различных значениях параметров m , α :
 a — $m = 0,5$, $б$ — $m = 5,0$; 1 — $\alpha = 0$, 2 — $\alpha = 0,25$, 3 — $\alpha = 0,5$, 4 — $\alpha = 1,0$

На рис. 3,б представлена зависимость $F'(\eta)$ при различных значениях параметра толщины α в асимптотическом случае ($m = 0,5$). В этом случае с увеличением параметра α скорость потока по мере удаления от пластины монотонно увеличивается, при этом толщина пограничного слоя становится больше.

На рис. 4 приведена зависимость $F'(\eta)$ при различных значениях показателя степени m в законе распределения скоростей точек поверхности пластины. С уменьшением показателя m скорость потока возрастает. Это означает, что количество движения точек, находящихся на поверхности пограничного слоя, с увеличением показателя m уменьшается вдоль листа и увеличивается при удалении от него.

В табл. 2 приведены значения локального коэффициента поверхностного трения при различных значениях параметра толщины α , параметра проскальзывания λ и показателя степени m . Локальный коэффициент поверхностного трения увеличивается как с увеличением параметра m , так и с увеличением параметра α . Увеличение параметра проскальзывания λ приводит к уменьшению локального коэффициента поверхностного трения. Это

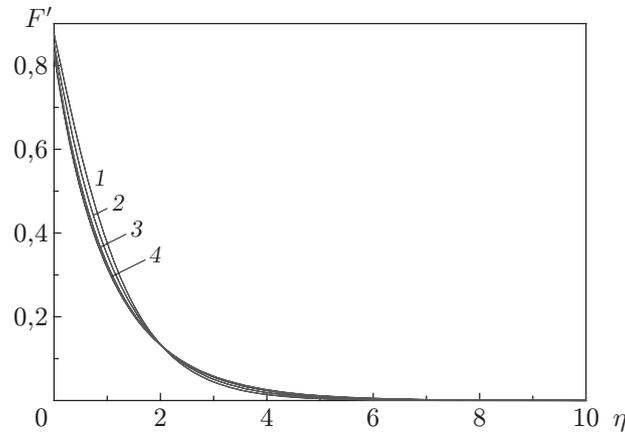


Рис. 4. Распределение скорости по поверхности листа при $\alpha = 0,2$, $\lambda = 0,2$ и различных значениях параметра m :
 1 — $m = 0$, 2 — $m = 0,5$, 3 — $m = 2,0$, 4 — $m = 5,0$

Таблица 2

Значения $-F'''(0)$ при различных значениях параметров λ, α, m

λ	α	m	$-F'''(0)$
0	0,20	0,5	0,924 828
0,2	0,20	0,5	0,728 201
0,5	0,20	0,5	0,561 082
0,2	0	0,5	0,707 579
0,2	0,25	0,5	0,733 395
0,2	0,50	0,5	0,759 570
0,2	1,00	0,5	0,812 747
0,2	0	5,0	0,890 165
0,2	0,25	5,0	0,850 600
0,2	0,50	5,0	0,812 508
0,2	1,00	5,0	0,741 247
0,2	0,20	0	0,611 306
0,2	0,20	0,5	0,728 201
0,2	0,20	2,0	0,819 489
0,2	0,20	5,0	0,858 401

означает, что количество движения, передаваемое от листа в жидкость, уменьшается. При этом скорость потока вблизи листа не равна скорости протягивания листа через щель (эффект проскальзывания). Кроме того, с увеличением скорости проскальзывания уменьшается скорость потока, поскольку при этом только часть усилия, затрачиваемого на протягивание листа, передается в жидкость.

Заключение. В работе спектральным методом Чебышева решено нелинейное дифференциальное уравнение задачи о течении неньютоновской жидкости, движение которой обусловлено растяжением листа переменной толщины. Полученные результаты соответствуют известным результатам. Исследовано влияние различных параметров на характеристики течения. Показано, что увеличение скорости скольжения приводит к уменьшению локального коэффициента поверхностного трения. С увеличением параметра толщины α локальный коэффициент поверхностного трения увеличивается при $m < 1$ и уменьшается при $m > 1$. Увеличение показателя степени m приводит к замедлению потока вниз по растягиваемому листу и увеличению локального коэффициента поверхностного трения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Crane L. J.** Flow past a stretching plate // *Z. angew. Math. Phys.* 1970. Bd 21. S. 645–647.
2. **Gupta P. S., Gupta A. S.** Heat and mass transfer on a stretching sheet with suction or blowing // *Canad. J. Chem. Engng.* 1979. V. 55, N 6. P. 744–746.
3. **Soundalgekar V. M., Ramana T. V.** Heat transfer past a continuous moving plate with variable temperature // *Warme- und Stoffubertragung.* 1980. Bd 14. S. 91–93.
4. **Grubka L. J., Bobba K. M.** Heat transfer characteristics of a continuous stretching surface with variable temperature // *J. Heat Transfer.* 1985. V. 107. P. 248–250.
5. **Chen C. K., Char M.** Heat transfer on a continuous, stretching surface with suction or blowing // *J. Math. Anal. Appl.* 1988. V. 35. P. 568–580.
6. **Hayat T., Abbas Z., Javed T.** Mixed convection flow of a micropolar fluid over a non-linearly stretching sheet // *Phys. Lett. A.* 2008. V. 372. P. 637–647.
7. **Buscall R.** Letter to the Editor: Wall slip in dispersion rheometry // *J. Rheol.* 2010. V. 54. P. 1177–1184.
8. **Rao I. J., Rajagopal K. R.** The effect of the slip boundary condition on the flow of fluids in a channel // *Acta Mech.* 1999. V. 135. P. 113–126.
9. **Ariel P. D., Hayat T., Asghar S.** The flow of an elastico-viscous fluid past a stretching sheet with partial slip // *Acta Mech.* 2006. V. 187. P. 29–35.
10. **Hayat T., Javed T., Abbas Z.** Slip flow and heat transfer of a second grade fluid past a stretching sheet through a porous space // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 2008. V. 51. P. 4528–4534.
11. **Megahed A. M.** HPM for slip velocity effect on a liquid film over an unsteady stretching surface with variable heat flux // *Eur. Phys. J. Plus.* 2011. V. 126, N 9. P. 1–8.
12. **Fang T., Zhang J., Zhong Y.** Boundary layer flow over a stretching sheet with variable thickness // *Appl. Math. Comput.* 2012. V. 218. P. 7241–7252.
13. **El-Gendi S. E.** Chebyshev solution of differential, integral and integro-differential equations // *Comput. J.* 1969. V. 12. P. 282–287.

Поступила в редакцию 29/IV 2013 г.
