

УДК 532.5+533+517.9

## УРАВНЕНИЯ МОДЕЛИ МЕЛКОЙ ВОДЫ НА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПРИТЯГИВАЮЩЕЙ СФЕРЕ

### 1. ВЫВОД И ОБЩИЕ СВОЙСТВА

А. А. Черевко, А. П. Чупахин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск  
Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск  
E-mails: cherevko@mail.ru, chupakhin@hydro.nsc.ru

Предложена модель мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере, описывающая крупномасштабные движения газа в атмосферах планет и жидкости в Мировом океане. Уравнения модели совпадают с уравнениями газовой динамики политропного газа в случае сферических движений газа на поверхности вращающейся сферы. Обсуждается область применимости модели, доказывается сохранение потенциальной завихренности вдоль траекторий. Уравнения стационарных движений мелкой воды представлены в виде интегралов Бернулли и потенциальной завихренности, связывающих глубину жидкости и функцию тока. Найдены простейшие стационарные решения уравнений, описывающие состояние равновесия, отличающееся от сферически-симметричного, и зональные течения вдоль параллелей. Показано, что стационарные уравнения модели допускают бесконечномерную группу Ли эквивалентности.

**Ключевые слова:** мелкая вода, движения на сфере, группы Ли, потенциальная завихренность, стационарные решения.

**Введение.** Описание гидродинамических явлений, происходящих в атмосфере и океане, представляет собой нетривиальную задачу. Важными факторами, влияющими на динамику жидкой или газовой оболочки планеты, являются гравитация и вращение. Именно взаимодействие этих двух сил удерживает среду в состоянии равновесия в целом, при котором в атмосфере происходят движения различных масштабов.

Далее для краткости гидродинамикой атмосферы будем называть движение сплошной среды (жидкости или газа), находящейся на поверхности вращающейся сферы и в поле гравитационной силы, направленной к центру сферы с постоянным ускорением. Развиваемая модель в равной мере описывает как движения газа в атмосферах планет, так и крупномасштабные океанические течения.

Гидродинамические явления в атмосфере характеризуются разнообразием масштабов. С одной стороны, это крупномасштабные (планетарные) явления (циркуляционные ячейки), в частности глобальные вихри типа циклонов и антициклонов, океанические течения, с другой — движения мелких масштабов, существенно зависящие от рельефа земной поверхности. Вследствие многофакторности изучаемого явления универсальная модель гидродинамики атмосферы представляется очень сложной и плохо поддающейся исследова-

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00047а), а также в рамках Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-2826.2008.1), Интеграционного проекта СО РАН № 2.15 и гранта Министерства образования и науки РФ (№ 2.1.1/3543).

нию. Естественно выделять характерные масштабы изучаемого движения и использовать соответствующую приближенную гидродинамическую модель.

Особенностью задач гидродинамики атмосферы в целом является компактность многообразия, на котором определена соответствующая математическая модель. Известные результаты о поведении векторных полей на сфере, с одной стороны, и эмпирическое представление о том, что на всей планете не может существовать одной и той же погоды — с другой, позволяют сделать вывод о наличии в решениях, описывающих движения атмосферы в целом, особенностей, таких как сингулярности типа источников или стоков, разрывы и фронты, разделяющие воздушные массы с разными характеристиками движения.

При описании крупномасштабных явлений в атмосфере в качестве базовой модели обычно используются уравнения Эйлера для идеальной несжимаемой жидкости. Предположения о несжимаемости среды и малом влиянии вязкости справедливы для умеренных, заведомо дозвуковых скоростей среды и движений большого масштаба. Модель мелкой воды, получающаяся из задачи со свободной границей для уравнений Эйлера в предположении малости вертикального масштаба движения по сравнению с горизонтальным, используется в гидродинамике атмосферы и океана. Обычно при использовании модели мелкой воды делаются дальнейшие упрощения и рассматривается модель типа модели  $f$ - или  $\beta$ -плоскости. При этом часть поверхности сферы заменяется касательной к ней плоскостью, что существенно упрощает модель. Однако такое приближение не может использоваться для описания движений на сфере, протяженных по широте. В этом случае необходимо рассматривать полные уравнения теории мелкой воды на сфере.

Исследованию гидродинамических явлений в атмосфере и океане посвящено большое количество работ (см., например, [1–8]). Следует отметить, что первыми работами, посвященными изучению гидродинамики на сфере, являются исследования И. С. Громеки [9] и работа Э. Цермело [10].

Различные варианты модели мелкой воды используются в гидродинамике атмосферы и океана, однако в литературе отсутствует систематический вывод уравнений модели на сфере в целом. Обоснованию теории мелкой воды на сфере без вращения посвящена работа Л. В. Овсянникова [11], в которой уравнения модели выводятся путем разложения по малому параметру решения точной задачи Коши — Пуассона о волнах в идеальной несжимаемой жидкости на поверхности сферы. Для физических приложений и оценки качества приближения представляется целесообразным вывести уравнения мелкой воды непосредственно из уравнений Эйлера.

Роль малого параметра мелкой воды играет величина  $\varepsilon = H_0/a_0$  ( $H_0$  — характерная глубина слоя, занятого сплошной средой;  $a_0$  — радиус сферы (планеты)). Уравнения мелкой воды выводятся в предположении малости параметра  $\varepsilon$ , независимости поля скоростей от вертикальной (радиальной) координаты и отсутствия вертикального переноса (радиальная компонента скорости равна нулю).

Таким образом, модель описывает крупномасштабные планетарные движения, происходящие за времена порядка десятков суток. При таких временных масштабах вращение планеты оказывает существенное влияние на движение среды. В этом случае скорость можно трактовать как усредненную по глубине, температурные эффекты проявляются лишь через гидростатичность движения.

В данной работе предлагается вывод уравнений модели мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере и изучаются некоторые ее общие свойства: сохранение потенциальной завихренности, вид решений уравнений стационарных движений в терминах функции тока, наличие бесконечной группы Ли эквивалентности стационарных уравнений, а также исследуются установившиеся зональные течения.

**1. Уравнения движения во вращающейся системе координат.** Систему уравнений будем формулировать в неинерциальной системе координат, связанной с вращающейся планетой. Дадим краткий вывод уравнений движения сплошной среды в системе координат, вращающейся с постоянной угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$ . Это представляется необходимым, поскольку в отдельных монографиях по гидродинамике атмосферы при выводе уравнений движения неправоммерно опускаются некоторые слагаемые.

Пусть  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  — орты некоторой инерциальной системы координат,  $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$  — орты, связанные с вращающейся планетой. Тогда имеем следующие разложения произвольного вектора  $\mathbf{a}$ :

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k} = a'_1 \mathbf{i}' + a'_2 \mathbf{j}' + a'_3 \mathbf{k}'. \quad (1.1)$$

Поскольку во вращающейся системе координат

$$\frac{d\mathbf{i}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}', \quad \frac{d\mathbf{j}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}', \quad \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}', \quad (1.2)$$

из (1.1) следует

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d'\mathbf{a}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}, \quad (1.3)$$

где  $d'/dt$  — полная производная в неинерциальной системе координат.

Пусть  $\mathbf{a} = \mathbf{x}$  — радиус-вектор:

$$\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'.$$

Тогда

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}, \quad \frac{d'\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}' —$$

скорости в инерциальной и неинерциальной системах координат. Из (1.1) и (1.3) для  $\mathbf{a} = \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u} = d\mathbf{x}/dt$  получаем

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}. \quad (1.4)$$

Пусть в (1.3)  $\mathbf{a} = \mathbf{u}$ . Тогда

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d'\mathbf{u}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}. \quad (1.5)$$

Подставляя (1.4) в (1.5), имеем

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d'\mathbf{u}'}{dt} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}).$$

Таким образом, во вращающейся системе координат, связанной с планетой, уравнения движения записываются в виде

$$\frac{d'\mathbf{u}'}{dt} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) = \mathbf{g} - \rho^{-1} \nabla p, \quad (1.6)$$

где  $\mathbf{g}$  — ускорение свободного падения. Член  $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}'$  называется силой Кориолиса. Иногда центробежную силу  $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})$  объединяют с гравитационной, вводя ускорение  $\mathbf{g}_1 = \mathbf{g} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})$  и обосновывая это тем, что обе эти силы являются функцией только положения точки.

В ряде работ член, соответствующий центробежной силе в (1.6), сразу отбрасывается. Это мотивируется тем, что он мал по сравнению с силой Кориолиса, поскольку зависит

от квадрата угловой скорости. Вообще говоря, неправомерно делать это до введения безразмерных параметров в уравнениях (1.6) и оценки величин тех или иных слагаемых в уравнениях с безразмерными переменными.

**2. Постановка точной задачи.** Рассмотрим на сфере радиусом  $a_0$  движения в слое идеальной несжимаемой жидкости  $a_0 < r < a_0 + H(t, \theta, \varphi)$ . Здесь  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ; широта  $0 < \theta < \pi$  и долгота  $0 \leq \varphi < 2\pi$  — сферические координаты. На жидкость действует сила тяжести, направленная к центру сферы,  $g$  — постоянное ускорение. Сфера вращается с постоянной угловой скоростью  $\Omega_0$ . Обозначим через  $U, V, W$  радиальную, широтную (положительную в южном направлении) и долготную (положительную в восточном направлении) компоненты вектора скорости  $\mathbf{u}$ ,  $R = \text{const}$  — плотность,  $P$  — давление в жидкости. Система координат выбрана таким образом, чтобы ось вращения совпала с осью  $z$ , проходящей через северный N ( $\theta = 0$ ) и южный S ( $\theta = \pi$ ) полюсы (рис. 1).

Внутри слоя справедливы уравнения Эйлера. Запишем эти уравнения в неинерциальной системе координат, связанной с вращающейся планетой. Согласно (1.6) имеем

$$\begin{aligned} DU &= r^{-1}(V^2 + W^2) - R^{-1}P_r + 2\Omega_0 W \sin \theta + r\Omega_0^2 \sin^2 \theta - g, \\ DV &= r^{-1}(W^2 \text{ctg} \theta - UV) - (rR)^{-1}P_\theta + 2\Omega_0 W \cos \theta + r\Omega_0^2 \sin \theta \cos \theta, \\ DW &= -r^{-1}W(V \text{ctg} \theta + U) - (rR \sin \theta)^{-1}P_\varphi + 2\Omega_0(U \sin \theta + V \cos \theta), \\ r^{-2}(r^2 U)_r + (r \sin \theta)^{-1}(W_\varphi + (V \sin \theta)_\theta) &= 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где  $D = \partial_t + U \partial_r + r^{-1}V \partial_\theta + (r \sin \theta)^{-1}W \partial_\varphi$  — полная производная. Введем переменную  $z = r - a_0, z > 0$ . Тогда

$$r^{-1} = (z + a_0)^{-1} = a_0^{-1} \left(1 + \frac{z}{a_0}\right)^{-1} = \frac{1}{a_0} \left(1 - \frac{z}{a_0} + \dots\right). \tag{2.2}$$

Предположим, что величина  $z/a_0$  мала, и в правой части формулы (2.2) отбросим все члены, кроме первого, считая

$$r^{-1} \approx a_0^{-1}, \quad \partial_r = \partial_z. \tag{2.3}$$

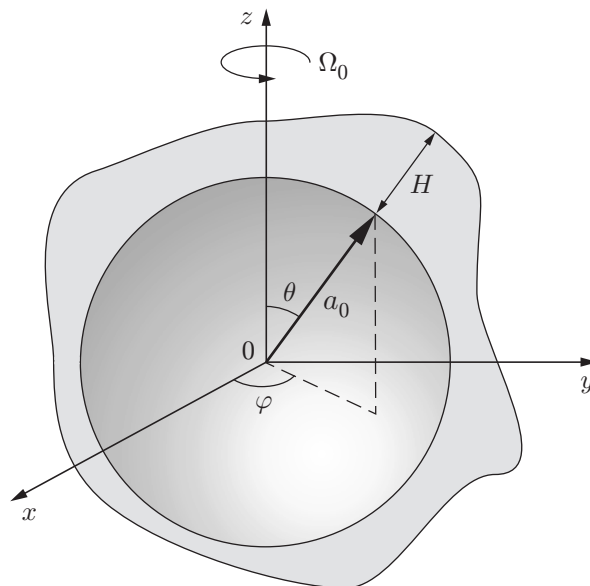


Рис. 1. Схема задачи и система координат

С учетом предположений (2.3) система (2.1) записывается в виде

$$\begin{aligned} D'U &= a_0^{-1}(V^2 + W^2) - R^{-1}P_z + 2\Omega_0 W \sin \theta + a_0 \Omega_0^2 \sin^2 \theta - g, \\ D'V &= a_0^{-1}(W^2 \operatorname{ctg} \theta - UV) - (a_0 R)^{-1}P_\theta + 2\Omega_0 W \cos \theta + a_0 \Omega_0^2 \sin \theta \cos \theta, \\ D'W &= -a_0^{-1}W(V \operatorname{ctg} \theta + U) - (a_0 R \sin \theta)^{-1}P_\varphi + 2\Omega_0(U \sin \theta + V \cos \theta), \\ U_z + a_0^{-1}U + (a_0 \sin \theta)^{-1}(W_\varphi + (V \sin \theta)_\theta) &= 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $D' = \partial_t + U \partial_z + a_0^{-1}(V \partial_\theta + (\sin \theta)^{-1}W \partial_\varphi)$ . Уравнения (2.4) выполнены в слое  $0 < z < H(t, \theta, \varphi)$ . На дне при  $z = 0$  ставится условие

$$U|_{z=0} = 0. \quad (2.5)$$

На свободной границе  $z = H(t, \theta, \varphi)$  задаются динамическое условие  $P = 0$  и кинематическое условие

$$H_t + a_0^{-1}(V H_\theta + (\sin \theta)^{-1}W H_\varphi) = U. \quad (2.6)$$

Задача (2.4)–(2.6) является исходной, именно из этой задачи будут получены уравнения мелкой воды на вращающейся сфере.

**3. Переход к безразмерным переменным.** Введем безразмерные переменные  $\tau, z_1, u, v, w, \rho, p, h$ , связанные с исходными следующим образом:

$$\begin{aligned} t &= T_0 \tau, \quad z = H_0 z_1, \quad U = U_0 u, \quad V = V_0 v, \quad W = V_0 w, \\ R &= R_0 \rho, \quad P = P_0 p, \quad H = H_0 h. \end{aligned} \quad (3.1)$$

В формулах (3.1) постоянные  $T_0, H_0, U_0, V_0, R_0, P_0$  являются характерными величинами, соответствующими времени, вертикальному масштабу, радиальной и касательной компонентам скорости, плотности и давления. Масштабы скорости по широте и долготе предполагаются одинаковыми и равными  $V_0$ . После перехода в (2.4) к переменным (3.1) получим систему

$$\begin{aligned} \bar{D}u &= \frac{V_0^2 T_0}{a_0 U_0} (v^2 + w^2) - \frac{T_0 P_0}{U_0 R_0 H_0} \rho^{-1} p_{z_1} + 2\Omega_0 \frac{T_0 V_0}{U_0} w \sin \theta - \frac{g T_0}{U_0} + \frac{a_0 T_0 \Omega_0^2}{U_0} \sin^2 \theta, \\ \bar{D}v &= \frac{V_0 T_0}{a_0} w^2 \operatorname{ctg} \theta - \frac{U_0 T_0}{a_0} uv - \frac{T_0 P_0}{V_0 R_0 a_0} \rho^{-1} p_\theta + 2T_0 \Omega_0 w \cos \theta + \frac{a_0 T_0 \Omega_0^2}{V_0} \sin \theta \cos \theta, \\ \bar{D}w &= -\frac{V_0 T_0}{a_0} vw \operatorname{ctg} \theta - \frac{U_0 T_0}{a_0} uw - \frac{T_0 P_0}{V_0 R_0 a_0} (\rho \sin \theta)^{-1} p_\varphi - \\ &\quad - 2T_0 \Omega_0 v \cos \theta - \frac{2U_0 T_0}{V_0} \Omega_0 u \sin \theta, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\frac{U_0}{H_0} u_{z_1} + \frac{2U_0}{a_0} u + \frac{V_0}{a_0} (\sin \theta)^{-1} (w_\varphi + (v \sin \theta)_\theta) = 0,$$

где  $\bar{D} = \partial_\tau + u \partial_{z_1} + v \partial_\theta + (\sin \theta)^{-1}w \partial_\varphi$ . После обезразмеривания кинематическое условие (2.6) принимает вид

$$h_\tau + \frac{T_0 V_0}{a_0} (v h_\theta + (\sin \theta)^{-1}w h_\varphi) = \frac{T_0 U_0}{H_0} u. \quad (3.3)$$

В случае вращающейся сферы имеется естественный временной масштаб  $T_0 = 2\pi/\Omega_0$ . Характерные длины  $H_0, a_0$  и скорости  $U_0, V_0$  связаны соотношениями

$$T_0 = \frac{H_0}{U_0} = \frac{a_0}{V_0}. \quad (3.4)$$

Соотношения (3.4) соответствуют равенству временных масштабов при движениях в радиальном направлении с характерной скоростью  $U_0$  на расстояниях  $H_0$  и в касательном направлении (вдоль поверхности сферы) со скоростью  $V_0$  на расстояниях порядка  $a_0$ . Введем параметр мелкой воды на сфере

$$\varepsilon = H_0/a_0.$$

Обозначим

$$D'_0 = \partial_\tau + u \partial_{z_1} + v \partial_\theta + (\sin \theta)^{-1} w \partial_\varphi. \quad (3.5)$$

Тогда с учетом предположения (3.4) уравнения (3.2) записываются в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 D'_0 u &= \varepsilon \left( v^2 + w^2 + \frac{2\Omega_0 a_0}{V_0} w \sin \theta + \left( \frac{a_0 \Omega_0}{V_0} \right)^2 \sin^2 \theta \right) - \frac{P_0}{R_0 V_0^2} \left( \rho^{-1} p_{z_1} + g \frac{R_0 H_0}{P_0} \right), \\ D'_0 v &= w^2 \operatorname{ctg} \theta - \varepsilon uv + 2 \frac{a_0 \Omega_0}{V_0} w \cos \theta + \left( \frac{a_0 \Omega_0}{V_0} \right)^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{P_0}{R_0 V_0^2} \frac{p_\theta}{\rho}, \\ D'_0 w &= -vw \operatorname{ctg} \theta - 2 \frac{a_0 \Omega_0}{V_0} v \cos \theta - \frac{P_0}{R_0 V_0^2} \frac{p_\varphi}{\sin \theta} - \varepsilon \left( w + \frac{2a_0 \Omega_0}{V_0} \sin \theta \right) u, \\ u_{z_1} + (\sin \theta)^{-1} (w_\varphi + (v \sin \theta)_\theta) + 2\varepsilon u &= 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Предположим, что параметр  $\varepsilon$  мал и безразмерные комплексы  $a_0 \Omega_0 / V_0$ ,  $P_0 / (R_0 V_0^2)$  в уравнениях (3.6) конечны. Тогда, отбрасывая в (3.6) все члены, содержащие  $\varepsilon$  и  $\varepsilon^2$ , из первого уравнения системы (3.6) получаем условие гидростатичности движения

$$\rho^{-1} p_{z_1} + R_0 H_0 g / P_0 = 0. \quad (3.7)$$

Проинтегрировав уравнение (3.7) по  $z_1$ , с учетом динамического условия  $p = 0$  на свободной границе имеем представление для давления

$$p = -R_0 H_0 g (z_1 - h) \rho / P_0. \quad (3.8)$$

Из (3.8) следуют формулы для градиента давления на сфере

$$\rho^{-1} p_\theta = R_0 g H_0 h_\theta / P_0, \quad \rho^{-1} p_\varphi = R_0 g H_0 h_\varphi / P_0. \quad (3.9)$$

Кинематическое условие (3.3) принимает вид

$$h_\tau + v h_\theta + (\sin \theta)^{-1} w h_\varphi = u. \quad (3.10)$$

Последнее уравнение системы (3.6) — уравнение неразрывности — можно проинтегрировать по  $z_1$ , предполагая независимость компонент скорости  $u$  и  $v$  от переменной  $z_1$ :

$$u = -z_1 (\sin \theta)^{-1} (w_\varphi + (v \sin \theta)_\theta). \quad (3.11)$$

С учетом этого предположения течение газа является бессдвиговым по вертикальной координате, поэтому в качестве значения компоненты скорости  $u$  можно принять ее значение на свободной границе  $z_1 = h$ . Полагая в (3.11)  $z_1 = h$  и подставляя (3.11) в (3.10), получаем уравнение

$$h_\tau + v h_\theta + (\sin \theta)^{-1} w h_\varphi + (\sin \theta)^{-1} h (w_\varphi + (v \sin \theta)_\theta) = 0. \quad (3.12)$$

Второе и третье уравнения системы (3.6) (после подстановки в них выражений (3.9) и отбрасывания членов, содержащих  $\varepsilon$ ) и уравнение (3.12) образуют замкнутую систему трех уравнений для трех функций  $h$ ,  $v$ ,  $w$  независимых переменных  $\tau$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ . При этом в полной производной (3.5) должен быть опущен член  $u \partial_{z_1}$ .

Введем числа Россби  $R_0$  и Фруда  $F$ :

$$R_0 = V_0/(2\Omega_0 a_0), \quad F = V_0/\sqrt{gH_0},$$

являющиеся характерными безразмерными параметрами задачи. Для удобства записи окончательной системы уравнений мелкой воды на вращающейся сфере вновь используем обозначение времени  $t$  вместо  $\tau$  и введем параметры

$$r_0 = R_0^{-1}, \quad f_0 = F^{-2}.$$

Тогда искомая система уравнений принимает вид

$$\begin{aligned} D_0 v &= w^2 \operatorname{ctg} \theta + r_0 w \cos \theta + (1/4)r_0^2 \sin \theta \cos \theta - f_0 h_\theta, \\ D_0 w &= -v w \operatorname{ctg} \theta - r_0 v \cos \theta - f_0 (\sin \theta)^{-1} h_\varphi, \\ D_0 h &+ (\sin \theta)^{-1} h (w_\varphi + (v \sin \theta)_\theta) = 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где  $D_0 = \partial_t + v \partial_\theta + (\sin \theta)^{-1} w \partial_\varphi$  — полная производная на сфере. Уравнения (3.13) выполнены на поверхности сферы в слое газа, толщина которого мала по сравнению с радиусом сферы.

Отметим некоторые общие свойства системы (3.13).

1. Уравнения (3.13) совпадают с уравнениями газовой динамики для политропного газа в случае изоэнтропических движений специального вида, происходящих на поверхности вращающейся сферы, причем радиальная компонента скорости равна нулю и все искомые функции не зависят от величины  $r$ . Такие движения газа можно назвать сферическими. При  $\rho = h$  уравнение состояния имеет вид  $p = f_0 \rho^2/2$ . Следовательно, система (3.13) является гиперболической и наследует все свойства уравнений газовой динамики, в частности наличие звуковых характеристик.

2. Система уравнений (3.13) определена на сфере с выколотыми точками  $\theta = 0, \pi$  в полюсах. Эти особые точки являются точками пересечения оси вращения с поверхностью сферы. Таким образом, в уравнениях, описывающих движение, уже заложены две особенности, которые имеют также физический смысл, — особенности течения в полюсах.

**4. Оценки границ области применимости модели.** Для Земли  $\Omega_0 = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ ,  $a_0 = 6,4 \cdot 10^6 \text{ м}$ . Рассмотрим движения с характерной длительностью от одних суток до десятков суток, т. е.  $T_0 \sim 10^6 \text{ с}$  (1 сут = 86 400 с). Для таких движений  $H_0 \sim 10^3$ ,  $V_0 \sim 10 \text{ м/с}$ . Тогда  $U_0 \sim 10^{-3} \text{ м/с}$ . Оценим числа Россби и Фруда:

$$R_0^{-1} = 2\Omega_0 a_0/V_0 \approx 90, \quad F^{-2} = gH_0/V_0^2 \approx 10^2.$$

Следовательно, параметры  $r_0 = R_0^{-1}$  и  $f_0 = F^{-2}$  в уравнениях (3.13) действительно имеют один порядок, поэтому соответствующие им эффекты вращения и гравитации оказывают сравнимое влияние на движение среды. Параметр  $\varepsilon$  и вертикальная скорость пренебрежимо малы по сравнению с параметрами  $r_0$  и  $f_0$ .

**5. Уравнение вихря.** Касательное к сфере векторное поле скоростей  $\mathbf{u} = (0, v, w)$ , удовлетворяющее системе (3.13), имеет вихрь  $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{u} = (\omega, 0, 0)$ , направленный по радиусу:

$$\omega = (\sin \theta)^{-1} ((w \sin \theta)_\theta - v_\varphi) = w_\theta - (\sin \theta)^{-1} v_\varphi + w \operatorname{ctg} \theta. \quad (5.1)$$

Для вывода уравнений вихря запишем первые два уравнения системы (3.13) в виде уравнений Громеки — Лэмба:

$$v_t - w\Omega_1 + G_\theta = 0, \quad w_t + v\Omega_1 + (\sin \theta)^{-1} G_\varphi = 0. \quad (5.2)$$

Здесь  $\Omega_1 = \omega + r_0 \cos \theta$ ;  $G = f_0 h + (v^2 + w^2)/2 - (1/8)r_0^2 \sin^2 \theta$ . Величина  $\Omega = h^{-1}\Omega_1$  называется потенциальным вихрем [3]. Тогда имеет место

**Лемма 1.** *Потенциальный вихрь сохраняется вдоль траекторий*

$$D_0 \Omega = 0. \quad (5.3)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Второе уравнение в (5.2) умножим на  $\sin \theta$ , продифференцируем первое уравнение в (5.2) по  $\varphi$ , второе — по  $\theta$  и вычтем из второго уравнения первое. Умножив полученное соотношение на  $(\sin \theta)^{-1}$  и изменив знак, имеем

$$(w_\theta - (\sin \theta)^{-1} v_\varphi + w \operatorname{ctg} \theta)_t + v \Omega_{1\theta} + (\sin \theta)^{-1} w \Omega_{1\varphi} + (v_\theta + (\sin \theta)^{-1} w_\varphi + v \operatorname{ctg} \theta) \Omega_1 = 0,$$

или

$$D_0 \Omega_1 + \Omega_1 \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (5.4)$$

где  $\operatorname{div} \mathbf{u} = v_\theta + (\sin \theta)^{-1} w_\varphi + v \operatorname{ctg} \theta$ . В системе (3.13) уравнение для  $h$  имеет тот же вид, что и уравнение (5.4):

$$D_0 h + h \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (5.5)$$

Следовательно, умножая (5.4) на  $h$ , (5.5) на  $\Omega_1$  и складывая полученные уравнения, находим

$$D_0(\Omega_1/h) = 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 1 обобщает на сферический случай соответствующее ей в теории “плоской” мелкой воды утверждение о поведении потенциальной завихренности.

**6. Установившиеся движения мелкой воды.** Рассмотрим стационарные движения мелкой воды на вращающейся сфере, описываемые системой уравнений

$$\begin{aligned} D_s v &= w^2 \operatorname{ctg} \theta + r_0 w \cos \theta + (1/4)r_0^2 \sin \theta \cos \theta - f_0 h_\theta, \\ D_s w &= -v w \operatorname{ctg} \theta - r_0 v \cos \theta - f_0 (\sin \theta)^{-1} h_\varphi, \\ D_s h &+ (\sin \theta)^{-1} h (w_\varphi + (v \sin \theta)_\theta) = 0, \end{aligned} \quad (6.1)$$

где  $D_s = v \partial_\theta + (\sin \theta)^{-1} w \partial_\varphi$  — производная вдоль линий тока. В (6.1) содержатся интеграл Бернулли и интеграл сохранения потенциальной завихренности. Интеграл Бернулли получается, если первое уравнение системы (6.1), умноженное на  $v$ , сложить со вторым, умноженным на  $w$ . Сохранение потенциальной завихренности следует из леммы 1.

Для записи данных интегралов удобно ввести функцию тока  $\psi = \psi(\theta, \varphi)$ . Поскольку третье уравнение системы (6.1) записывается в дивергентном виде

$$(h v \sin \theta)_\theta + (h w)_\varphi = 0,$$

ему можно удовлетворить, вводя функцию тока  $\psi$  и полагая

$$v = \psi_\varphi / (h \sin \theta), \quad w = -\psi_\theta / h. \quad (6.2)$$

При этом  $D_s \psi = 0$ . Обозначим через  $\nabla_s$ ,  $\Delta_s$  операторы градиента и Лапласа на единичной сфере:

$$\nabla_s = \left( \frac{\partial}{\partial \theta}, (\sin \theta)^{-1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad \Delta_s = (\sin \theta)^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + (\sin \theta)^{-2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Вычисляя вихрь  $\Omega_1$  в терминах функции тока  $\psi$ , с учетом (5.1) и (6.2) получим

$$\Omega_1 = \omega + r_0 \cos \theta = -(\sin \theta)^{-1} ((\psi_\theta \sin \theta / h)_\theta + (\sin \theta)^{-1} (\psi_\varphi / h)_\varphi) + r_0 \cos \theta.$$



Обозначим  $q = h^{-1}$ . Тогда выражение для  $\Omega_1$  принимает вид

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= -(\sin \theta)^{-1}[q((\psi_\theta \sin \theta)_\theta + (\sin \theta)^{-1}\psi_\varphi q_\varphi) + \psi_\theta q_\theta \sin \theta + (\sin \theta)^{-1}\psi_\varphi q_\varphi] + r_0 \cos \theta = \\ &= -q \Delta_s \psi - \nabla_s \psi \cdot \nabla_s q + r_0 \cos \theta.\end{aligned}$$

В модели мелкой воды уравнения стационарных движений

$$D_s((v^2 + w^2)/2 + f_0 h - (1/8)r_0^2 \sin^2 \theta) = 0, \quad D_s(\Omega_1/h) = 0,$$

интегрируемые в терминах функции тока, принимают вид

$$\begin{aligned}q^2 |\nabla_s \psi|^2 / 2 + f_0 / q - (1/8)r_0^2 \sin^2 \theta &= B_0(\psi), \\ q \Delta_s \psi + \nabla_s \psi \cdot \nabla_s q - r_0 \cos \theta &= A_0(\psi),\end{aligned}\tag{6.3}$$

где  $A_0, B_0$  — произвольные функции своего аргумента. Система уравнений (6.3) полностью описывает стационарные течения мелкой воды на вращающейся сфере и эквивалентна системе (6.1) для таких течений. Функции  $A_0$  и  $B_0$  характеризуют значения энергии и потенциальной завихренности течения в терминах функции тока  $\psi$ .

Первое уравнение в (6.3) является алгебраическим уравнением третьей степени относительно величины  $q$ . Запишем его в следующем виде:

$$q^3 - a_0 q + b_0 = 0.\tag{6.4}$$

Здесь  $a_0 = |\nabla_s \psi|^{-2}(2B_0 + r_0^2 \sin^2 \theta)$ ;  $b_0 = 2|\nabla_s \psi|^{-2}f_0 > 0$ . Можно считать, что и  $a_0 > 0$ . В противном случае уравнение (6.4) не имеет положительных решений относительно  $q$ . Дискриминант уравнения (6.4) равен

$$\mathcal{D} = 4a_0^3 - 27b_0^2.\tag{6.5}$$

Следовательно, при  $\mathcal{D} > 0$  уравнение (6.4) имеет три вещественных корня. Согласно теореме Виета два из этих корней положительны, а один отрицателен и должен быть отброшен в силу того, что  $q = 1/h > 0$ . Невозможен также случай, когда в уравнении (6.4) имеется один вещественный корень при  $\mathcal{D} < 0$ , поскольку тогда из теоремы Виета следует, что он должен быть отрицательным.

Если дискриминант (6.5) положителен и уравнение (6.4) имеет три вещественных корня, то два из них положительны и соответствуют двум различным режимам установившихся движений. Тем самым доказана

**Лемма 2.** *Для стационарных течений мелкой воды на вращающейся сфере возможны два режима движения, соответствующие двум различным положительным корням уравнения (6.4).*

**7. Преобразование эквивалентности стационарных уравнений.** Для двумерных уравнений гидродинамики функция тока определена с функциональным произволом: произвольная функция от нее также задает функцию тока. Подобная, но несколько более сложная ситуация имеет место и в случае стационарных уравнений мелкой воды (6.3).

**Теорема.** *Пусть набор  $(\psi, q, f_0, r_0)$  задает решение уравнений (6.3) при заданных функциях  $A_0$  и  $B_0$ ,  $\chi = \chi(z)$ ,  $\chi' > 0$  — произвольная гладкая строго монотонная функция,  $Q_0 \neq 0$  — постоянная.*

*Величины  $\psi_1, q_1, f_{01}, r_{01}$  и функции  $A_{01}, B_{01}$  определим следующим образом:*

$$\begin{aligned}\psi &= \chi(\psi_1), \quad q = \frac{Q_0}{\chi'(\psi_1)} q_1, \quad f_0 = \frac{Q_0^3}{\chi'(\psi_1)} f_{01}, \quad r_0 = Q_0 r_{01}, \\ A_{01} &= Q_0^{-1} A_0, \quad B_{01} = Q_0^{-2} B_0\end{aligned}\tag{7.1}$$

*(штрих означает производную по аргументу  $\psi_1$ ). Тогда набор  $(\psi_1, q_1, f_{01}, r_{01})$  задает решение уравнений (6.3) с функциями  $A_{01}$  и  $B_{01}$  в правых частях.*

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Формулы (7.1) задают бесконечномерную группу Ли эквивалентности уравнений (6.3), зависящую от одной произвольной функции  $\chi$  одного аргумента и одной константы  $Q_0$ . Появление этой группы объясняется функциональным произволом в выборе функции тока. Из формул (7.1) следует, каким образом при этом преобразуются другие параметры задачи. Оказывается, такая замена влечет преобразование числа Фруда  $F = f_0^{-2}$  с функциональным произволом.

Частные случаи такого преобразования имеют простой физический смысл. При  $f_0 = r_0 = 0$  система (6.3) описывает инерционные стационарные течения мелкой воды на поверхности сферы в отсутствие вращения. В этом случае формулы (7.1) задают преобразование решения системы (6.3) с функциональным произволом и могут быть использованы для размножения решения: по известному решению  $\psi_1$  формулы (7.1) задают новое решение.

При  $f_0 \neq 0$ ,  $r_0 \neq 0$  и линейной функции  $\xi(\psi_1) = \xi_0 \psi_1$ ,  $\xi_0 = \text{const}$  формулы (7.1) задают масштабные преобразования (6.3). Выбором постоянных

$$Q_0 = r_0, \quad \xi_0 = r_0^3 / f_0$$

параметры  $r_0$  и  $f_0$  можно сделать равными единице. При этом числа Россби  $r_0$  и Фруда  $f_0$  появятся в правой части уравнений (6.3) в качестве множителей при функциях  $A_0$  и  $B_0$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** Как известно, стационарные уравнения газовой динамики с разделенной плотностью допускают бесконечномерную группу Ли эквивалентности, называемую преобразованием Мунка — Прима [12]. Эта группа преобразует функцию Бернулли (правую часть интеграла Бернулли), энтропию, а также уравнение состояния  $\rho = a(s)b(p)$ . В силу отмеченной выше газодинамической аналогии уравнения мелкой воды совпадают с уравнениями изоэнтропической газовой динамики с политропным уравнением состояния при  $\gamma = 2$  (для специальных решений). Однако уравнения мелкой воды не допускают непосредственно преобразования Мунка — Прима, поскольку эти преобразования изменяют уравнение состояния, которое для мелкой воды имеет фиксированный вид  $p = \rho^2/2$ , где  $\rho = h$ . Тем не менее стационарные уравнения (6.3) допускают бесконечномерную группу Ли (7.1), преобразующую параметр  $f_0$  в этом уравнении состояния.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ.** Доказательство проводится путем непосредственной проверки. Пусть  $\psi = \chi(\psi_1)$ ,  $q = Q(\psi_1)q_1$ , где  $\chi$ ,  $Q$  — некоторые функции  $\psi_1$ . Тогда, опуская далее индекс  $s$  при дифференциальных операторах, имеем следующие формулы:

$$\nabla \psi = \chi' \nabla \psi_1, \quad \Delta \psi = \chi' \Delta \psi_1 + \chi'' |\nabla \psi_1|^2, \quad \nabla q = Q \Delta q_1 + Q' q_1 \nabla \psi_1. \quad (7.2)$$

Подставив (7.2) в систему (6.3):

$$\frac{Q^2 q_1^2}{2} \chi'^2 |\nabla \psi_1|^2 + \frac{f_0}{Q q_1} - \frac{1}{8} r_0^2 \sin^2 \theta = B_0, \quad (7.3)$$

$$Q q_1 \chi' \Delta \psi_1 + (Q \chi'' + Q' \chi') q_1 |\nabla \psi_1|^2 + Q \chi' \nabla q_1 \cdot \nabla \psi_1 - r_0 \cos \theta = A_0,$$

выразив  $|\nabla \psi_1|^2$  из первого уравнения в (7.3) и подставив во второе, получим

$$Q q_1 \chi' \Delta \psi_1 + Q \chi' \nabla q_1 \cdot \nabla \psi_1 - r_0 \cos \theta + \frac{2(Q \chi'' + Q' \chi')}{q_1 Q^2 \chi'^2} \left( B_0 + \frac{1}{8} r_0^2 \sin^2 \theta - \frac{f_0}{Q q_1} \right) = A_0. \quad (7.4)$$

Из (7.4) следует, что при  $Q \chi' = Q_0 = \text{const}$  второе уравнение в (6.3) переходит в уравнение такого же вида. Деля первое уравнение в (7.3) на  $Q^2 q_1^2/2$ , а уравнение (7.4) — на  $Q q_1$ , при  $Q = Q_0 (\chi')^{-1}$  получаем формулы (7.1). Теорема доказана.

**8. Простейшие решения.** Важной особенностью полученной модели мелкой воды является наличие состояния равновесия, в котором относительные компоненты скорости равны нулю ( $u = w = 0$ ) и имеет место следующее распределение глубины:

$$h = \alpha_0^2 (k_0^2 + \sin^2 \theta). \quad (8.1)$$

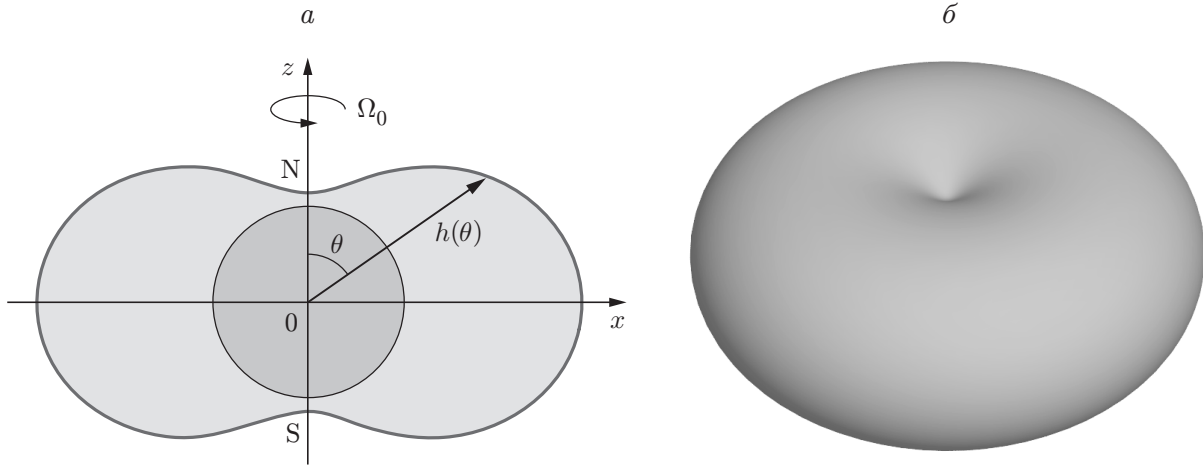


Рис. 2. Поверхность равновесия:

*a* — диаметрально сечение; *б* — трехмерный вид

Здесь  $\alpha_0^2 = r_0^2/(8f_0)$ ,  $k_0^2 = 8f_0h_0/r_0^2$ ,  $h_0 > 0$  — постоянные. Скорость распространения звуковых возмущений на решении (8.1)  $c = (r_0/2\sqrt{2})(k_0^2 + \sin^2 \theta)^{1/2}$ . При  $\theta \in (0, \pi)$  уравнение

$$r = \alpha_0^2(k_0^2 + \sin^2 \theta) \quad (8.2)$$

в пространстве  $\mathbb{R}^3(\mathbf{x})$  задает поверхность вращения, характеризующую равновесный профиль глубины, отличный от сферического. На рис. 2 показана поверхность (8.2).

Рассмотрим установившиеся движения мелкой воды, для которых обе компоненты скорости  $v$ ,  $w$  и глубина  $h$  зависят лишь от широты  $\theta$ . В этом случае система (6.1) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} vv' &= w^2 \operatorname{ctg} \theta + r_0 w \cos \theta + (r_0^2/4) \sin \theta \cos \theta - f_0 h', \\ vv' &= -vw \operatorname{ctg} \theta - r_0 v \cos \theta, \quad vh' \sin \theta + h(v \sin \theta)' = 0, \end{aligned} \quad (8.3)$$

где штрих означает производную по  $\theta$ . Система (8.3) интегрируется в конечном виде.

Существует два типа решений. В решениях первого типа  $v \equiv 0$ , в решениях второго типа  $v \neq 0$ . Рассмотрим решения первого типа. В этом случае второе и третье уравнения системы (8.3) удовлетворяются тождественно, и она сводится к одному уравнению

$$w^2 + r_0 w \sin \theta + (r_0^2/4) \sin^2 \theta - f_0 h' \operatorname{tg} \theta = 0, \quad (8.4)$$

связывающему глубину  $h$  и окружную компоненту скорости  $w$ . Из (8.4) следует

$$w_{1,2} = -(r_0 \sin \theta + 2\varepsilon(f_0 h' \operatorname{tg} \theta)^{1/2})/2 \quad (\varepsilon = \pm 1). \quad (8.5)$$

Решения (8.5) определены при  $h' \operatorname{tg} \theta > 0$ , следовательно, так как при  $\theta \in (0, \pi)$  имеем  $\sin \theta > 0$ , то в северном полушарии  $h' > 0$  ( $\theta \in (0, \pi/2)$ ), в южном полушарии  $h' < 0$  ( $\theta \in (\pi/2, \pi)$ ). Это решение описывает течение вдоль параллелей с произвольным профилем глубины, который с увеличением широты монотонно возрастает в северном полушарии и убывает в южном полушарии. Решения вида (8.5) моделируют течения типа струйных движений в атмосфере, распространяющиеся преимущественно вдоль параллелей. В атмосфере Земли такие течения возникают на границах ячеек. Так, полярный фронт струйных течений расположен между полярными ячейками и ячейками Ферреля, а субтропические струйные течения разделяют ячейки Ферреля и Гадлея [13]. В таких конвективных ячейках, существующих в атмосфере Земли, воздушные массы из области экватора в северном полушарии движутся на север, а в южном — на юг, отклоняясь от

меридианов под действием силы Кориолиса. При достижении некоторого предельного давления возникает поток, движущийся в противоположном направлении (к экватору) выше исходного потока.

Рассмотрим решения типа (8.5), всюду являющиеся критическими. Иными словами, во всей области определения решения выполнено равенство  $w^2 = f_0 h$ , из которого следует, что скорость распространения звуковых возмущений в слое равна скорости движения частиц по линиям тока. Тогда из уравнения (8.5) следует дифференциальное уравнение для функции  $h$

$$h' \operatorname{tg} \theta = 4f_0 \left( h - \frac{r_0}{4f_0} \sin \theta \right)^2, \quad (8.6)$$

являющееся уравнением Риккати. Вводя вместо  $h$  новую функцию  $z$  по формуле

$$h = \frac{r_0 \sin \theta}{4f_0} \left( 1 - \frac{z'}{z r_0 \cos \theta} \right), \quad (8.7)$$

преобразуем (8.6) к линейному уравнению второго порядка

$$z'' + \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} z' - \frac{r_0 \cos^2 \theta}{\sin \theta} z = 0. \quad (8.8)$$

Выполнив в уравнении (8.8) замену  $y = \sin \theta$ , получим модифицированное уравнение Бесселя с  $\nu = 0$  [14]:

$$y z_{yy} + z z_y - r_0 z = 0. \quad (8.9)$$

Решение (8.9) имеет вид

$$z = C_1 I_0(\xi) + C_2 K_0(\xi), \quad (8.10)$$

где  $I_0, K_0$  — модифицированные функции Бесселя порядка нуль аргумента  $\xi = 2\sqrt{r_0 y}$ ;  $C_1, C_2$  — произвольные постоянные.

Подставляя в (8.7) вычисленное в (8.10) значение  $z$ , для профиля глубины в критическом течении получим формулу вида (8.5)

$$h = \frac{r_0 \sin \theta}{4f_0} \left( 1 - \frac{\cos \theta}{r_0} \frac{\sqrt{r_0} (C_1 I_1(\xi) - C_2 K_1(\xi))}{\sqrt{\sin \theta} (I_0(\xi) C_1 + K_0(\xi) C_2)} \right). \quad (8.11)$$

Здесь  $\xi = 2\sqrt{r_0 \sin \theta}$ ;  $I_1, K_1$  — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода порядка один. Заметим, что в результате замены  $t = 1/y$  уравнение (8.9) преобразуется в уравнение Кельвина, а соответствующие модифицированные функции Бесселя — в функции Кельвина. Решение (8.11) должно удовлетворять сформулированному выше условию монотонности  $h' \cos \theta > 0$ . Скорость  $w$  вычисляется по формуле (8.5).

**Заключение.** В работе выведены уравнения модели мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере. Эта модель описывает движения сплошной среды (воздуха в атмосфере планет, жидкости в Мировом океане) глобальных (планетарных) масштабов, когда толщина слоя, в котором происходит движение, мала по сравнению с масштабами движения на поверхности планеты. При этом вследствие малой толщины слоя скорость среды можно рассматривать как усредненную по глубине слоя.

Полученная система уравнений совпадает с уравнениями изоэнтропической политропной газовой динамики в случае движений газа на поверхности вращающейся сферы, является гиперболической и определена на компактном многообразии с особенностями в полюсах сферы.

Доказано сохранение потенциальной завихренности вдоль траекторий. Для стационарных течений получена эквивалентная система двух уравнений в терминах толщины слоя

и функции тока, доказано наличие двух режимов установившихся движений мелкой воды с различными профилями глубины. Найдена бесконечномерная группа Ли эквивалентности, преобразующая функцию тока, глубину и число Фруда течения. Описаны соответствующие состоянию равновесия простейшие стационарные решения модели, отличающиеся от сферически-симметричного и зональных течений вдоль параллелей.

Полученная модель представляется перспективной для исследования крупномасштабных движений. Важной особенностью этой модели является возможность использования для ее исследования результатов, полученных в газовой динамике. Естественным первым шагом в этом направлении является поиск простых точных решений.

Авторы выражают благодарность Л. В. Овсянникову за содержательное обсуждение представленных результатов.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Кочин Н. Е.** Собрание сочинений. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1949. Т. 1.
2. **Кибель И. А.** Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноза погоды. М.: Гостехтеоретиздат, 1957.
3. **Педлоски Дж.** Геофизическая гидродинамика. М.: Мир, 1984. Т. 1, 2.
4. **Марчук Г. И.** Математические модели в геофизической гидродинамике и численные методы их реализации / Г. И. Марчук, В. П. Дымников, В. Б. Залесный. Л.: Гидрометеоздат, 1987.
5. **Гилл А.** Динамика атмосферы и океана. М.: Мир, 1986.
6. **Majda A.** Introduction to PDEs and waves for the atmosphere and ocean. N. Y. etc: Amer. Math. Soc.: Courant Inst. of Math. Sci., 2003. (Lecture Notes; V. 9).
7. **Ле Блон П.** Волны в океане / П. Ле Блон, Л. Майсек. М.: Мир, 1981. Т. 1, 2.
8. **Greenspan H. P.** The theory of rotating fluids. Cambridge: Univ. Press, 1968.
9. **Громека И. С.** О вихревых движениях жидкости на сфере // Собр. соч. М.: АН СССР, 1952. С. 184–206.
10. **Цермело Э.** Гидродинамические исследования вихревых движений на поверхности сферы // Нелинейная динамика. 2007. Т. 3, № 1. С. 81–109.
11. **Овсянников Л. В.** Задача Коши — Пуассона на сфере // Вестн. Ленингр. гос. ун-та. 1976. № 13. С. 146–153.
12. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
13. **Атмосфера** (справочные данные, модели). Л.: Гидрометеоздат, 1991.
14. **Справочник по специальным функциям** / Под ред. М. Абрамовица, И. Стигана. М.: Наука, 1979.

*Поступила в редакцию 29/X 2007 г.,  
в окончательном варианте — 4/IV 2008 г.*