

УДК 533.6.011

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ЭНТРОПИИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА В КАНАЛЕ

А. Ф. Латыпов

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
630090 Новосибирск
E-mail: latypov@itam.nsc.ru

Получено выражение для максимально допустимого приращения энтропии в случае стационарного течения газа в канале с переменной площадью сечения при подводе энергии и наличии диссипации кинетической энергии. Для квазиодномерного потока получено условие перехода через скорость звука. Рассмотрены примеры течений.

Ключевые слова: канал, подвод энергии, диссипация, максимум энтропии, переход через скорость звука, псевдоскачок.

Рассмотрим одномерное стационарное течение в канале с переменной площадью сечения при подводе тепла и наличии процессов диссипации кинетической энергии. В ортогональной системе координат определена трубка тока, часть границы которой является стенкой канала, а также линия, касательные к которой $\mathbf{l}(x)$ задают направление скорости потока вдоль трубки тока (x — координата точки на линии). Площадь поверхности, ограниченной линией пересечения нормальной к вектору $\mathbf{l}(x)$ плоскости с поверхностью трубки тока, есть площадь сечения $F(x)$.

Поток газа, поступающий в канал, имеет следующие параметры на бесконечности: M_∞ — число Маха, p_∞ — давление, T_∞ — температура. Принимается, что площадь сечения канала $F(0) = F_\infty$ и параметры газа во входном сечении равны параметрам набегающего потока.

Максимум энтропии. Пусть в некотором сечении $F(x)$ имеет место вариация числа Маха M вследствие вариации количества рассеянной перед этим сечением вверх по потоку кинетической энергии. Определим вариацию энтропии δS при условиях сохранения полной энтальпии газа и его расхода. Из соответствующих данным условиям уравнений

$$\frac{\delta T}{T} + \frac{(\gamma - 1) M^2}{1 + 0,5(\gamma - 1) M^2} \frac{\delta M}{M} = 0, \quad \frac{\delta p}{p} - 0,5 \frac{\delta T}{T} + \frac{\delta M}{M} = 0, \quad \frac{\delta S}{R} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\delta T}{T} - \frac{\delta p}{p}$$

получаем

$$\frac{\delta S}{R} = \frac{1 - M^2}{1 + 0,5(\gamma - 1) M^2} \frac{\delta M}{M} \quad (1)$$

(T — температура; γ — показатель адиабаты; R — газовая постоянная). Из (1) следует, что при числе Маха $M = 1$ энтропия достигает максимального значения.

Условие существования стационарного течения. Зададим функцию $Q(x)$, определяющую количество подведенного тепла между сечениями $F(0)$ и $F(x)$, и силу на единицу массы вещества $j(x)$, соответствующую процессу диссипации кинетической энергии.

Введем также следующие обозначения: ρ — плотность, a_∞ — скорость звука в набегающем потоке. Индекс 0 соответствует параметрам торможения, индекс “* ∞ ” — параметрам потока при $M = 1$, $\Delta S = 0$. Для безразмерных величин сохранены исходные обозначения:

$$p = \frac{p}{p_\infty}, \quad \rho = \frac{\rho}{\rho_\infty}, \quad T = \frac{T}{T_\infty}, \quad \Delta S = \frac{\Delta S}{R}, \quad Q = \frac{Q}{a_\infty^2}, \quad F = \frac{F}{F_\infty}, \quad f = \frac{F}{F_{*\infty}} \geq 1.$$

Используя относительные величины и уравнение состояния $p = \rho T$, запишем уравнения энергии, неразрывности и приращения энтропии

$$T_{0\infty} + (\gamma - 1)Q = T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right), \quad \frac{p M f}{\sqrt{T}} \frac{F_{*\infty}}{M_\infty} = 1, \quad p = T^{\gamma/(\gamma-1)} e^{-\Delta S}. \quad (2)$$

При $Q = \Delta S = 0$ из первых двух уравнений в (2) следуют соотношения

$$\frac{F_{*\infty}}{M_\infty} = T_{*\infty}^{-n}, \quad T_{*\infty} = \frac{2}{\gamma + 1} T_{0\infty}, \quad n = \frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}. \quad (3)$$

С учетом первого и третьего уравнений в (2) и соотношений (3) из второго уравнения в (2) получаем

$$(1 + \theta)^n f \varphi(M) = e^{\Delta S}, \quad \theta = (\gamma - 1) \frac{Q}{T_{0\infty}}, \quad \varphi(M) = M \left(\frac{2 + (\gamma - 1) M^2}{\gamma + 1} \right)^{-n}. \quad (4)$$

С увеличением значения функции $\varphi(M)$ значение приращения энтропии при заданном количестве подводимого тепла увеличивается. При $M = 1$ функция $\varphi(M)$ в (4) имеет максимальное значение $\varphi(1) = 1$, так как относительная вариация функции $\varphi(M)$ определяется выражением (1). Полагая $M = 1$, получаем максимально допустимое приращение энтропии при подводе количества тепла $Q(x)$ между входным сечением $F(0)$ и сечением $F(x)$ и наличии диссипации кинетической энергии [1]:

$$\Delta S_{\max}(x) = \frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \ln(1 + \theta) + \ln f. \quad (5)$$

Таким образом, для существования стационарного течения в канале необходимо выполнение условия

$$\Delta S(x) \leq \Delta S_{\max}(x), \quad x \in [0, L], \quad (6)$$

где L — длина канала. Второй член в (5) определяет максимально допустимое приращение энтропии вследствие необратимых процессов, не обусловленных подводом энергии.

Условие существования стационарного течения в канале (6) справедливо также для двумерных и трехмерных течений, так как энтропия является аддитивной функцией. В этом случае приращение энтропии в левой части неравенства (6) вычисляется интегрированием по поверхности $F(x)$. Для осредненных при условиях сохранения расхода, энергии и энтропии параметров течения невыполнение условия (6) означает, что этот поток не может быть пропущен через данное сечение. Необходимо либо увеличить площадь сечения в $e^{\Delta S(x) - \Delta S_{\max}(x)}$ раз, либо уменьшить расход. Возможна также перестройка течения, при которой выполняется условие (6). Например, в экспериментах [2] при горении водорода начальный сверхзвуковой поток перестраивается таким образом, что через 25–30 мс горение происходит в дозвуковом режиме.

При анализе течений в канале широко применяется метод осреднения с использованием законов сохранения энергии, расхода и полного импульса [3, 4]. Такое осреднение увеличивает энтропию газа на величину ΔS_p , уменьшает его работоспособность (эксергию), в результате чего наблюдается “паразитное” уменьшение полного давления в $e^{\Delta S_p}$ раз.

Поэтому при формировании одномерного эквивалента неравномерного потока осреднение необходимо проводить при условии сохранения суммарной энтропии.

Условия перехода через скорость звука. Запишем законы сохранения для элементарного объема dx в размерных переменных:

$$\frac{T'}{T} + (\gamma - 1) M^2 \frac{V'}{V} = \frac{Q'(x)}{c_p T}, \quad \frac{p'}{p} - \frac{T'}{T} + \frac{V'}{V} = -\frac{F'(x)}{F(x)}, \quad \frac{p'}{p} + \gamma M^2 \frac{V'}{V} = -\frac{H'(x)}{RT}. \quad (7)$$

Здесь V — скорость потока; c_p — теплоемкость при постоянном давлении; $H(x)$ — функция диссипации энергии; $H'(x) = j(x)$; штрих обозначает дифференцирование переменных по x . Определитель этой системы уравнений равен $\Delta_0 = 1 - M^2$ и при $M = 1$ обращается в нуль. Для того чтобы было возможным непрерывное продолжение решения в точке $x = x_*$, в которой $M(x_*) = 1$, определитель, получаемый заменой какого-либо столбца в определителе Δ_0 вектор-столбцом правой части уравнений (6), также должен быть равен нулю. Получаемое при этом условие имеет вид

$$\frac{Q'(x_*)}{c_p T_*} + \frac{H'(x_*)}{RT_*} - \frac{F'(x_*)}{F(x_*)} = 0. \quad (8)$$

При $x > x_*$ в зависимости от предыстории и граничных условий течение может быть как сверхзвуковым, так и дозвуковым. Из (7), (8) следует

$$\frac{M'}{M} = \lim_{M \rightarrow 1} \frac{\Delta_V - 0,5\Delta_T}{\Delta_0}, \quad M'(x_*) = \frac{2 - \gamma}{4} \left(\frac{Q'(x_*)}{c_p T_*} \right) \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4(\gamma - 1)}{(2 - \gamma)^2}} \right), \quad (9)$$

где Δ_V , Δ_T — определители для V' , T' ; знак “+” соответствует сверхзвуковому течению, “−” — дозвуковому.

Соотношения между реальными и максимально допустимыми значениями энтропии определяют разнообразие возможных течений. Рассмотрим некоторые примеры.

На рис. 1 приведена схема оптимальной камеры сгорания гиперзвукового прямоточного воздушно-реактивного двигателя [5]. Во входном сечении канала поток имеет сверхзвуковую скорость. Закон распределения подводимого тепла в канале полагается таким, что в конце цилиндрического участка и далее в расширяющейся части канала число Маха равно единице. Однако такое течение нереализуемо вследствие его неустойчивости: слева от выходного сечения цилиндрического участка не выполняется условие (8), а в расширяющейся части при малых возмущениях нарушается условие (6).

На рис. 2,а представлена схема стационарного течения с подводом тепла в сверхзвуковой поток в расширяющейся части канала. Пусть в сечении 1, бесконечно близком

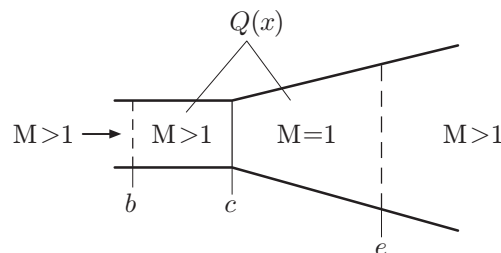


Рис. 1. Схема оптимальной камеры сгорания гиперзвукового прямоточного воздушно-реактивного двигателя:

$Q(x)$ — функция мощности подводимого тепла между сечениями b и e ; c — конечное сечение цилиндрического участка канала

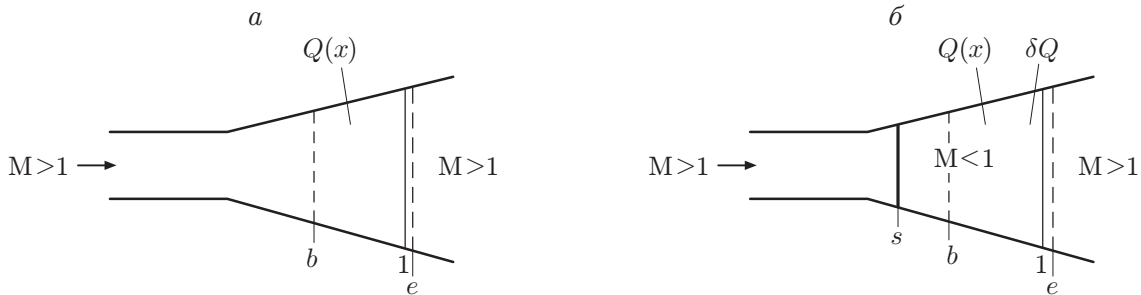


Рис. 2. Схемы течения в канале с подводом тепла в расширяющемся участке: *a* — неустойчивое течение; *б* — устойчивое течение; $Q(x)$ — функция мощности подводимого тепла между сечениями b и e ; 1 — сечение, бесконечно близкое к сечению e ; s — положение скачка уплотнения

слева к конечному сечению зоны подвода тепла, число Маха равно единице и выполнено условие (8). Согласно выражению (1) энтропия в этом сечении равна максимально допустимому значению. Принято также, что в соответствии с (9) за сечением 1 поток является сверхзвуковым. Такое стационарное решение уравнений (2) существует, однако оно неустойчиво. Пусть в сечении, примыкающем к сечению 1 слева, дополнительно подводится бесконечно малое количество тепла δQ . Приращения энтропии потока и ее максимально допустимого значения в сечении 1 составляют

$$\frac{\delta S}{R} = \frac{\delta Q}{RT} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\delta T_0}{T}, \quad \frac{\delta S_{\max}}{R} = \frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{\delta \theta}{1 + \theta} = \frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{\delta T_0}{T_0}. \tag{10}$$

Из (10) получаем

$$\frac{\delta S}{\delta S_{\max}} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{T_0}{T} > 1,$$

что свидетельствует о невыполнении условия (6), т. е. о разрушении течения. Расход через сечение 1 уменьшается, давление перед ним начинает увеличиваться. По завершении переходного процесса устанавливается течение, схема которого показана на рис. 2, *б*. В некотором сечении перед зоной подвода тепла возникает прямой скачок уплотнения. При подводе тепла имеет место меньшее приращение энтропии, чем в начальном сверхзвуковом потоке, так как средняя температура, при которой подводится тепло, больше. Сумма приращений энтропии в скачке уплотнения и при подводе тепла равна максимально возможному значению в сечении 1. Это условие и определяет положение скачка уплотнения. Течение устойчиво, поскольку вариация $\pm \delta Q$ вызывает лишь вариацию положения скачка уплотнения при соблюдении условий (6) и (8). При этом вариация суммарного приращения энтропии равна нулю. Численные примеры подобных течений, возникающих при импульсно-периодическом подводе энергии в канале, приведены в [6].

Пусть всюду в канале $\Delta S(x) < \Delta S_{\max}(x)$, $x \in [0, L]$. В каждом сечении возможны два стационарных решения. В зависимости от предыстории и граничных условий реализуется течение с дозвуковой или (и) сверхзвуковой скоростью (например, течение в сопле Лавала).

Рассмотрим эволюцию течения в случае втекания газа с постоянной сверхзвуковой скоростью в канал постоянного сечения (рис. 3, *а*). Перед зонами отрыва пограничного слоя возникают косые скачки уплотнения, которые, отражаясь от стенок, распространяются вдоль канала [3, 4, 7] и вместе с силами трения обуславливают увеличение энтропии газа по длине канала. На некоторой длине x_* (x — продольная координата, в начальном сечении $x = 0$) в некоторый момент времени энтропия достигает максимально допустимого значения $\Delta S_{\max} = \ln f$. Значение f определяется числом Маха во входном сече-

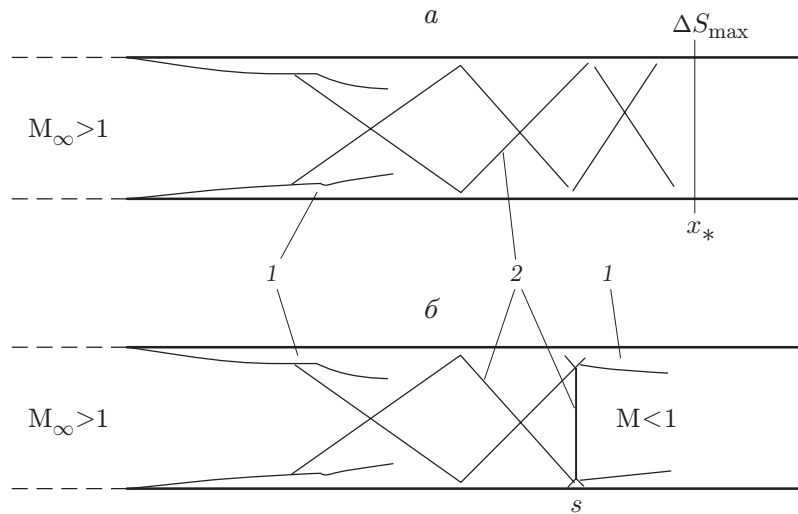


Рис. 3. Схема формирования псевдоскачкового режима течения в канале с постоянной площадью сечения:

a — схема течения до его перестройки; *б* — схема течения после его перестройки; 1 — пограничный слой; 2 — скачки уплотнения; *s* — положение прямого скачка уплотнения

нии M_∞ . Следует отметить, что в сечениях при $x > 0$ параметры потока неравномерны. В следующем бесконечно близком к $F(x_*)$ сечении условие (6) не выполняется, что и обуславливает нестационарность течения. Поступающий в канал газ с постоянным расходом не может быть пропущен через сечение $F(x_*)$. Перед сечением давление газа начинает увеличиваться, что приводит к возникновению интенсивного скачка уплотнения и зоны дозвуковой скорости потока за ним (рис. 3, б). Затем скорость потока увеличивается, что вызвано наличием перепада давления, и даже может превысить скорость звука при обтекании зон отрыва пограничного слоя. Далее процесс повторяется. Такие течения названы псевдоскачковыми [4]. Подобные структуры возникают также при частичном закрытии выходного сечения короткого канала [8], при подводе тепла [3] и при других воздействиях на сверхзвуковой поток, обуславливающих диссипативные процессы [9].

Заключение. Таким образом, получено условие существования стационарного течения в канале с переменной площадью сечения: в каждом сечении энтропия не должна превышать максимального значения, определяемого числом Маха втекающего потока, относительной площадью сечения и относительным количеством подведенного тепла. Это условие справедливо для течений произвольной размерности. Для случая квазиодномерных течений получено условие перехода через скорость звука.

По сути, в каждом сечении энтропия является параметром бифуркации, т. е. при ее критическом значении возможен переход к другому режиму течения (стационарному, нестационарному, в частности периодическому). Знание точек бифуркации упрощает анализ устойчивости течений, поскольку, во-первых, анализ необходимо проводить только в этих точках; во-вторых, появляется возможность определения возмущений, приводящих к изменению значения параметра бифуркации, а следовательно, и к нарушению условия существования стационарного течения (разрушению течения). Имеется большое количество работ, в которых выполнены расчеты внешних и внутренних течений газа с переменной энтропией. Однако подход, описанный в данной работе, к анализу этих течений не применялся. Как правило, устойчивость течений, полученных в результате решения стационарных уравнений механики сплошной среды, в том числе методом установления, исследуется с использованием классических методов.

Путем вариации воздействий на поток с использованием этих условий устанавливается также устойчивость или неустойчивость течений. В частности, показано, что в оптимальной камере сгорания гиперзвукового прямооточного воздушно-реактивного двигателя течение является неустойчивым. Обнаружено, что нарушение условия существования стационарного течения обуславливает формирование псевдоскачкового режима течения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Латыпов А. Ф.** Эксергетический анализ прямооточного воздушно-реактивного двигателя // Теплофизика и аэромеханика. 2009. Т. 16, № 1. С. 319–330.
2. **Chalot F., Rostand P., Perrier P., et al.** Validation of global aeropropulsive characteristics of integrated configurations. N. Y., 1998. (Paper / AIAA; N 98-1624).
3. **Третьяков П. К.** Псевдоскачковый режим горения // Физика горения и взрыва. 1993. Т. 29, № 6. С. 33–38.
4. **Крокко Л.** Одномерное рассмотрение газовой динамики установившихся течений // Основы газовой динамики / Под ред. С. Эммонса. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. С. 64–324.
5. **Хенкин П. В.** К вопросу о моделировании камеры сгорания прямооточного двигателя со сверхзвуковым горением // Газодинамика и физическая кинетика: Сб. тр. Новосибирск: Ин-т теорет. и прикл. механики СО АН СССР, 1974. С. 147–149.
6. **Латыпов А. Ф.** Численное моделирование течения в канале переменной площади сечения при импульсно-периодическом подводе энергии // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 1. С. 3–11.
7. **Щетинков Е. С.** О кусочно-одномерных моделях сверхзвукового горения и псевдоскачка в канале // Физика горения и взрыва. 1973. Т. 9, № 4. С. 473–482.
8. **Политаев Н. С., Алексеев А. А., Забайкин В. А., Смоголев А. А.** Экспериментальное определение характеристик нестационарного псевдоскачкового течения в осесимметричном канале при механическом дросселировании // Тр. Всерос. молодежной конф. “Устойчивость и турбулентность течений гомогенных и гетерогенных жидкостей”, Новосибирск, 26–28 апр. 2010 г. / Под ред. В. В. Козлова. Новосибирск: Параллель, 2010. Вып. 12. С. 249–252.
9. **Третьяков П. К., Забайкин В. А., Смоголев А. А.** Перестройка структуры течения в канале постоянного сечения при импульсно-периодическом воздействии // Тр. 34-х Академ. чтений по космонавтике, Москва, 26–29 янв. 2010 г. М.: Комиссия РАН, 2010. С. 212–213.

*Поступила в редакцию 12/III 2010 г.,
в окончательном варианте — 21/IV 2010 г.*
