

УДК 539.375

## ЗАРОЖДЕНИЕ ТРЕЩИН В ПЕРФОРИРОВАННОМ ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩЕМ МАССИВЕ

В. М. Мирсалимов

Азербайджанский технический университет, AZ1129 Баку, Азербайджан  
E-mail: irakon63@hotmail.com

Построена математическая модель зарождения трещин в тепловыделяющем изотропном массиве, ослабленном двоякопериодической системой охлаждающих цилиндрических каналов круглого поперечного сечения. Полагается, что по мере повышения интенсивности тепловыделения в массиве происходит зарождение трещин. Решение задачи о равновесии изотропного перфорированного тепловыделяющего массива с зародышевыми трещинами сводится к решению нелинейного сингулярного интегрального уравнения с ядром типа Коши. Из решения этого уравнения находятся усилия в полосе зарождения трещины. Условие появления трещины формулируется с учетом критерия предельной вытяжки связей материала.

**Ключевые слова:** тепловыделяющий перфорированный массив, зона предразрушения, связи между берегами.

**Постановка задачи.** При проектировании некоторых типов тепловыделяющих элементов (ТВЭлов) в ядерных реакторах необходимо рассчитывать температурные напряжения в сплошной среде с цилиндрическими каналами, оси которых параллельны. Задача о термоупругом равновесии плоскости, ослабленной двоякопериодической системой отверстий, рассматривалась в [1–3]. По мере увеличения интенсивности тепловыделения  $q$  в таком массиве вокруг отверстий образуются зоны повышенных напряжений, расположение которых имеет двоякопериодический характер. В зонах повышенных напряжений могут возникать поверхностные трещины. Задача о зарождении трещины является важной задачей механики разрушения. Постановка этой задачи существенно расширяет первоначальную концепцию Гриффитса, согласно которой в материале всегда имеется большое количество мельчайших трещин. Образование (зарождение) трещины под нагрузкой соответствует данным фрактографических наблюдений. По мере увеличения интенсивности тепловыделения в процессе работы на поверхности отверстий возникают зоны предразрушения, которые моделируются областями с ослабленными межчастичными связями в материале. Взаимодействие берегов этих областей моделируется путем введения между берегами полосы предразрушения связей с заданной диаграммой деформирования. Физическая природа таких связей и размеры областей предразрушения зависят от вида материала. Поскольку указанные зоны (прослойки материала) малы по сравнению с остальной частью массива, их можно мысленно удалить, заменив разрезами, поверхности которых взаимодействуют между собой по некоторому закону, соответствующему действию удаленного материала. Учет этих эффектов в задачах механики разрушения представляет важную, но весьма трудную задачу.

В исследуемом случае возникновение зародышевой трещины в массиве представляет собой процесс перехода области предразрушения в область разорванных связей между поверхностями материала. При этом размер зоны предразрушения заранее неизвестен и должен быть определен в процессе решения задачи.

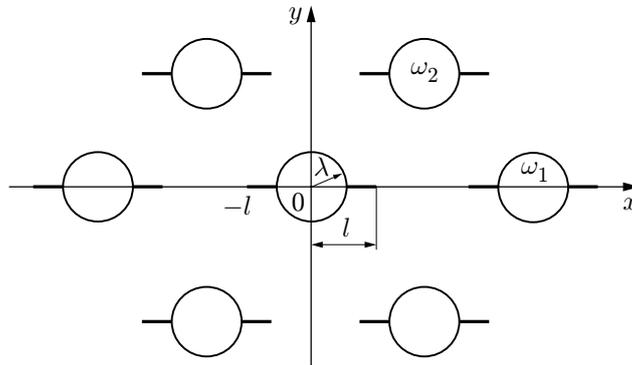


Рис. 1. Схема задачи о зарождении трещин в тепловыделяющем массиве

Исследования возникновения областей с нарушенной структурой материала показывают, что на начальной стадии зоны предразрушения представляют собой узкий вытянутый слой, с ростом нагрузки внезапно появляется вторичная система зон, содержащих материал с частично нарушенными связями [4–8].

Примем следующие предположения: 1) по всему объему массива интенсивность тепловыделения равномерна и массив может свободно расширяться во всех направлениях; 2) теплоотвод осуществляется только через поверхности каналов; 3) максимальный перепад температуры в среде невелик, поэтому свойства материала массива в этом интервале температур не меняются; 4) на массив не действуют внешние силы, он находится только под действием внутренних термических напряжений; 5) массив находится в стационарном состоянии.

Математическое описание зарождения трещин в массиве с пустотами сводится к плоской задаче термоупругости для перфорированного тепловыделяющего массива, когда в среде имеются полосы предразрушения. Полосы предразрушения ориентированы в направлении максимальных растягивающих напряжений.

Пусть имеется тепловыделяющий массив с двоякопериодической системой круговых отверстий радиусом  $\lambda$  ( $\lambda < 1$ ) с центром в точках

$$P_{mn} = m\omega_1 + n\omega_2, \quad \omega_1 = 2, \quad \omega_2 = 2h e^{i\alpha}, \quad (1)$$

$$h > 0, \quad \text{Im } \omega_2 > 0 \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Из контуров отверстий выходят симметричные прямолинейные полосы предразрушения (рис. 1). Контуров круговых отверстий (см. (1)) свободны от внешних нагрузок. Перенос тепла в твэлах осуществляется главным образом теплопроводностью, поэтому расчет температурных полей в них сводится к решению задач теории теплопроводности при наличии внутренних источников тепла [2, 3]. Такие расчеты позволяют правильно выбрать мощности тепловыделения в твэлах и их основные размеры, найти значение и определить характер теплонапряжений в среде.

В силу симметрии граничных условий и геометрии области  $D$ , занятой материалом массива, температура и напряжения являются двоякопериодическими функциями с основными периодами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Температура  $T(x, y)$  в области  $D$  определяется из решения уравнения теплопроводности

$$\Delta T + q/\delta = 0$$

с условием на контурах отверстий

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{h_0}{\delta} (T_0 - T).$$

Здесь  $\Delta$  — оператор Лапласа;  $\delta$  — коэффициент теплопроводности среды;  $h_0$  — коэффициент теплоотдачи;  $T_0$  — температура охлаждающей среды.

Взаимодействие берегов полосы предразрушения (связи между берегами) сдерживает зарождение трещины.

Для математического описания взаимодействия берегов полосы предразрушения принимается, что между ними имеются связи, закон деформирования которых задан. При действии тепловой нагрузки на массив в связях, соединяющих берега полосы предразрушения, возникают нормальные усилия  $p(x)$ .

Следовательно, к берегам полос предразрушения приложены нормальные напряжения  $p(x)$ . Эти напряжения заранее неизвестны и подлежат определению в процессе решения краевой задачи механики разрушения с условиями на контурах отверстий и берегах полос предразрушения соответственно

$$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = 0, \quad \sigma_y - i\tau_{xy} = p(x). \quad (2)$$

Основные соотношения поставленной задачи необходимо дополнить соотношением, связывающим раскрытие берегов полос предразрушения и усилия в связях. Без потери общности это соотношение представим в виде [8]

$$v^+(x, 0) - v^-(x, 0) = C(x, p)p(x), \quad (3)$$

где функцию  $C(x, p(x))$  можно рассматривать как эффективную податливость связей, зависящую от натяжения;  $v^+ - v^-$  — раскрытие берегов полосы предразрушения.

Для определения предельной величины интенсивности тепловыделения, при которой происходит зарождение трещины, постановку задачи необходимо дополнить условием (критерием) появления трещины (разрыва межчастичных связей в материале). В качестве такого условия примем критерий критического раскрытия берегов полосы предразрушения

$$v^+ - v^- = \delta_c, \quad (4)$$

где  $\delta_c$  — характеристика сопротивления материала массива трещинообразованию.

Дополнительное условие (4) позволяет определить параметры тепловыделяющей среды, при которых появляется трещина.

На основании формул Колосова — Мусхелишвили [9] и граничных условий на контурах круговых отверстий и берегах полос предразрушения (2) задача сводится к определению двух аналитических в области  $D$  функций  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  из краевых условий

$$\Phi_*(\tau) + \overline{\Phi_*(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi'_*(\tau) + \Psi(\tau)]e^{2i\theta} + q_*\lambda^2/32 = 0; \quad (5)$$

$$\Phi_*(t) + \overline{\Phi_*(t)} + t\overline{\Phi'_*(t)} + \overline{\Psi(t)} + 3q_*t^2/32 = p(t), \quad (6)$$

где  $\tau = \lambda e^{i\theta} + m\omega_1 + n\omega_2$  ( $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ );  $t$  — аффикс точек берегов полос предразрушения;  $q_* = \alpha E q / \delta$ ;  $\alpha$  — коэффициент линейного температурного расширения;  $E$  — модуль упругости материала среды;  $\Phi_*(z) = \Phi(z) - \alpha E F(z) / 4$ ;  $F(z)$  — аналитическая в области  $D$  функция, удовлетворяющая на контурах отверстий краевому условию

$$2 \operatorname{Re} \left[ e^{i\theta} \left( F'(z) - \frac{q\bar{z}}{4\delta} \right) \right] = \frac{h_0}{\delta} \left( T_0 - F(z) - \overline{F(z)} + \frac{qz\bar{z}}{4\delta} \right). \quad (7)$$

**Решение краевой задачи.** Решение краевой задачи (5)–(7) будем искать в виде

$$F(z) = \beta_0 z^2 + \beta_1 \nu(z) + a_0 + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \gamma^{(2k)}(z)}{(2k+1)!}; \quad (8)$$

$$\Phi_*(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad \Psi(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z); \quad (9)$$

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int_L g(x) \zeta(x-z) dx + A,$$

$$\Psi_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int_L [\zeta(x-z) + Q(x-z) - x\gamma(x-z)] g(x) dx + B; \quad (10)$$

$$\Phi_2(z) = \beta_0^* z^2 + \beta_1^* \nu(z) + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \gamma^{(2k)}(z)}{(2k+1)!},$$

$$\Psi_2(z) = dz^2 - \beta_1^* \zeta_*(z) + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \gamma^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} Q^{(2k+1)}(z)}{(2k+1)!}, \quad (11)$$

$$\beta_0^* = -\alpha E \beta_0 / 4, \quad \beta_1^* = -\alpha E \beta_1 / 4,$$

где  $\gamma(z)$  — эллиптическая функция Вейерштрасса;  $\zeta(z)$  — дзета-функция Вейерштрасса;  $Q(z)$  — специальная мероморфная функция [10];  $\nu(z) = -\iint \gamma(z) dz$ ;  $\zeta_*(z) = -\int Q(z) dz$ ;  $g(x) = (2\mu/(1 + \varkappa_0)) \partial[v^+(x, 0) - v^-(x, 0)]/\partial x$  — искомая функция;  $\mu$  — модуль сдвига материала среды;  $\varkappa_0 = 3 - 4\nu$ ;  $\nu$  — коэффициент Пуассона материала;  $A, B$  — постоянные. В (10) интегралы берутся по отрезку  $L = [-l, -\lambda] \cup [\lambda, l]$ .

Приведем зависимости, которым должны удовлетворять коэффициенты представлений (8)–(11). Из условия симметрии относительно координатных осей получаем равенства

$$\operatorname{Im} a_{2k} = 0, \quad \operatorname{Im} \alpha_{2k} = 0, \quad \operatorname{Im} \beta_{2k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Из условий двоякопериодичности поля температур и напряжений, а также в силу самоуравновешенности задачи и периодичности главного вектора сил, действующих на дугу, соединяющую две конгруэнтные точки в области  $D$ , следует

$$\beta_0 = \frac{q}{16\delta\pi i} (\delta_1 \bar{\omega}_2 - \delta_2 \bar{\omega}_1), \quad \beta_1 = \frac{q}{8\delta\pi i} (\bar{\omega}_1 \omega_2 - \bar{\omega}_2 \omega_1), \quad d = \frac{q^*}{64\pi i} (\gamma_2 \bar{\omega}_1 - \gamma_1 \bar{\omega}_2),$$

$$(A + \bar{A})\omega_k + \bar{B}\omega_k = \delta_k a + \bar{\gamma}_k a + \delta_k (a + \bar{a}) + \beta_2 \lambda^2 \delta_k + \alpha_2 \lambda^2 (\delta_k + \gamma_k) - \bar{D}_k \quad (k = 1, 2),$$

$$a = -\frac{1}{2\pi} \int_L tg(t) dt,$$

$$D_k = -\frac{2}{3} \beta_0^* (\omega_k^2 \bar{\omega}_k - \bar{\omega}_k^3) + \beta_1^* \left( c_k - \frac{3}{8} \bar{\delta}_k \bar{\omega}_k^2 + \frac{1}{4} \delta_k \omega_k \bar{\omega}_k - \frac{1}{24} \gamma_k \omega_k^2 \right), \quad (12)$$

$$\delta_k = 2\zeta(\omega_k/2), \quad \gamma_k = 2Q(\omega_k/2) - \bar{\omega}_k \gamma(\omega_k/2),$$

$$c_k = 2\bar{\xi}(\omega_k/2) - 2\nu_*(\omega_k/2) + \bar{\omega}_k \nu(\omega_k/2) \quad (k = 1, 2),$$

$$\xi(z) = \iint \nu(z) dz, \quad \nu_*(z) = \int \zeta_*(z) dz.$$

Обозначения постоянных двоякопериодической системы те же, что и в работе [10]. Из системы (12) определяются постоянные  $A$  и  $B$ , причем эти постоянные вещественны. Постоянные  $A$  и  $B$  удобно представить в виде суммы двух постоянных:

$$A = A_* + A_{**}, \quad B = B_* + B_{**}.$$

Здесь  $A_{**}$  и  $B_{**}$  зависят только от коэффициентов  $\alpha_2$  и  $\beta_2$ , т. е. находятся из системы (12) в предположении, что  $a = 0$ .

Нетрудно убедиться, что общие представления (8)–(11) определяют класс симметричных задач с двоякопериодическим распределением температуры и напряжений. Незвестная функция  $g(x)$  и постоянные  $\alpha_{2k}$  и  $\beta_{2k}$  должны быть определены из краевых условий (6), (7). В силу выполнения условий двоякопериодичности система граничных условий (6) заменяется одним функциональным уравнением, например на контуре  $\tau = \lambda \exp(i\theta)$ , а система условий (7) — краевым условием на  $L$ .

Для получения уравнений относительно коэффициентов  $\alpha_{2k}$  и  $\beta_{2k}$  функций  $\Phi_2(z)$  и  $\Psi_2(z)$  граничное условие (6) представим в виде

$$\Phi_2(\tau) + \overline{\Phi_2(\tau)} - [\overline{\tau}\Phi_2'(\tau) + \Psi_2(\tau)] e^{2i\theta} + q_* \lambda^2 / 32 = f_1(\theta) + if_2(\theta), \quad (13)$$

где

$$f_1(\theta) + if_2(\theta) = -\Phi_1(\tau) - \overline{\Phi_1(\tau)} + [\overline{\tau}\Phi_1'(\tau) + \Psi_1(\tau)] e^{2i\theta}. \quad (14)$$

Будем считать, что функция  $f_1(\theta) + if_2(\theta)$  разлагается на контуре  $|\tau| = \lambda$  в ряд Фурье. В силу симметрии этот ряд имеет вид

$$f_1(\theta) + if_2(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k} e^{2ki\theta}, \quad \text{Im } A_{2k} = 0, \quad (15)$$

$$A_{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f_1(\theta) + if_2(\theta)) e^{-2ki\theta} d\theta \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Подставив сюда выражение (14) с учетом (10) и поменяв порядок интегрирования, после вычисления интегралов с помощью теории вычетов найдем

$$A_0 = -A - \bar{A} - \frac{1}{2\pi} \int_L g(t) f_0(t) dt, \quad A_2 = B - \frac{1}{2\pi} \int_L g(t) f_2(t) dt,$$

$$A_{2k} = -\frac{1}{2\pi} \int_L g(t) f_{2k}(t) dt, \quad k = -1, \pm 2, \dots,$$

$$f_0(t) = 2\zeta(t), \quad f_2(t) = \lambda^2 \gamma'(t) / 2 + t\gamma(t) - \zeta(t) - Q(t),$$

$$f_{2k}(t) = \frac{(2k-1)\lambda^{2k}}{(2k)!} \gamma^{(2k-1)}(t) + \frac{\lambda^{2k-2}}{(2k-2)!} [\gamma^{(2k-3)}(t) - Q^{(2k-2)}(t) + t\gamma^{(2k-2)}(t)], \quad k = 2, 3, \dots,$$

$$f_{-2k}(t) = -\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \gamma^{(2k-1)}(t), \quad k = 1, 2, \dots$$

Подставляя в левую часть краевого условия (13) вместо функций  $\Phi_2(\tau)$ ,  $\overline{\Phi_2(\tau)}$ ,  $\Phi'_2(\tau)$  и  $\Psi_2(\tau)$  их разложения в ряды Лорана в окрестности точки  $z = 0$ , а в правую часть (13) — ряд Фурье (15) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\exp(i\theta)$ , получим две бесконечные линейные системы алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $\alpha_{2k}$  и  $\beta_{2k}$  [10, 11]:

$$\begin{aligned} \alpha_{2j+2} &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k} \alpha_{2k+2} + b_j \quad (j = 0, 1, \dots), \quad a_{j,k} = (2j+1)\gamma_{j,k} \lambda^{2j+2k+2}, \\ \gamma_{0,0} &= \frac{3}{8} g_2 \lambda^2 + K_2 + \frac{2\lambda^2 K_0 K_3}{1 - 2\lambda^2 K_1} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2i+1)g_{i+1}^2}{2^{4i+4}} \lambda^{4i+2}, \\ \gamma_{0,k} &= -\frac{(2k+2)\rho_{k+1}}{2^{2k+2}} + \frac{(2k+4)!g_{k+2}\lambda^2}{2!(2k+2)!2^{2k+4}} + \frac{2\lambda^2 K_3 g_{k+1}}{2^{2k+2}(1 - 2\lambda^2 K_1)} + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2j+2i+1)!g_{j+1}g_{k+i+1}\lambda^{4i+2}}{(2k+1)!(2i)!2^{2k+4i+4}} \quad (k = 1, 2, \dots), \\ \gamma_{j,0} &= -\frac{(2j+2)\rho_{j+1}}{2^{2j+2}} + \frac{(2j+4)!g_{j+2}\lambda^2}{2!(2j+2)!2^{2j+4}} + \frac{2\lambda^2 K_0 g_{j+1}}{(1 - 2\lambda^2 K_1)2^{2j+2}} + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2j+2i+1)!g_{i+1}g_{j+i+1}\lambda^{4i+2}}{(2j+1)!(2i)!2^{2j+4i+4}} \quad (j = 1, 2, \dots), \\ \gamma_{j,k} &= \gamma_{k,j} = -\frac{(2j+2k+2)!g_{j+k+1}}{(2j+1)!(2k+1)!2^{2j+2k+2}} + \frac{(2j+2k+4)!g_{j+k+2}\lambda^2}{(2j+2)!(2k+2)!2^{2j+2k+4}} + \\ &\quad + \frac{1 + 2\lambda^2 K_1}{1 - 2\lambda^2 K_1} \frac{g_{j+1}g_{k+1}\lambda^2}{2^{2j+2k+4}} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2j+2i+1)!(2k+2i+1)!g_{j+i+1}g_{k+i+1}\lambda^{4i+2}}{(2j+1)!(2k+1)!(2i+1)!(2i)!2^{2j+2k+4i+4}} \\ &\quad (j, k = 1, 2, \dots), \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} b_0 &= A'_2 - \frac{A'_0 \lambda^2 K_3}{1 - 2\lambda^2 K_1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+2} \lambda^{2k+4}}{2^{2k+4}} A'_{-2k-2}, \\ b_j &= A'_{2j+2} - \frac{(2j+1)A'_0 g_{j+1} \lambda^{2j+2}}{2^{2j+2}(1 - 2\lambda^2 K_1)} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3)!g_{j+k+2} \lambda^{2k+2j+4}}{(2j)!(2k+3)!2^{2j+2k+4}} A'_{-2k-2} \quad (j = 1, 2, \dots); \\ \beta_2 &= \frac{1}{1 - 2\lambda^2 K_1} \left( 2\lambda^2 K_0 - A'_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_{k+1} \lambda^{2k+2}}{2^{2k+2}} \alpha_{2k+2} \right), \\ \beta_{2j+4} &= (2j+3)\alpha_{2j+2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3)!g_{j+k+2} \lambda^{2j+2k+4}}{(2j+2)!(2k+1)!2^{2j+2k+4}} \alpha_{2k+2} - A'_{-2j-2} \quad (j = 0, 1, \dots). \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь

$$\begin{aligned} A'_0 &= \beta_1^* (1 - 2 \ln \lambda) - \frac{q_* \lambda^2}{32} - 2A_* - \frac{1}{2\pi} \int_L g(t) f_0(t) dt, \\ A'_2 &= \beta_0^* \lambda^2 + B_* - \frac{1}{2\pi} \int_L g(t) f_2(t) dt, \quad A'_{-2} = \beta_0^* \lambda^2 + A_{-2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A'_4 &= d\lambda^2 - \frac{3g_2\lambda^4}{64} \beta_1^* + A_4, & A'_{-2k-2} &= \frac{g_{k+1}\lambda^{2k+2}}{(2k+2)!2^{2k+2}} \beta_1^* + A_{-2k-2}, \\
A'_{2k+2} &= \beta_1^* \left( \frac{\lambda^{2k}\rho_k}{2^{2k}} - \frac{(2k+1)g_{k+1}\lambda^{2k+2}}{2^{2k+2}(2k+2)} \right) + A_{2k+2}, \\
g_k &= \sum'_{m,n} \frac{1}{T_0^{2k}}, & \rho_k &= \sum'_{m,n} \frac{\bar{T}_0}{T_0^{2k+1}}, & T_0 &= \frac{1}{2} P_{mn}, \\
K_0 &= \frac{\delta_1}{\omega_1} + \frac{2\pi i}{\omega_1\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1\omega_2}, & K_1 &= \frac{\pi i}{\omega_2\bar{\omega}_1 - \omega_1\bar{\omega}_2}, & K_3 &= K_0, \\
K_4 &= \frac{\gamma_1 - \delta_1}{\omega_1} - \frac{4\pi i}{\omega_1\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1\omega_2},
\end{aligned}$$

штрих у знака суммы означает, что при суммировании исключаются индексы  $m = n = 0$ .

Требую, чтобы функции (9)–(11) удовлетворяли краевому условию на берегах трещин  $L$ , получаем сингулярное интегральное уравнение относительно  $g(x)$

$$\frac{1}{2\pi} \int_L g(t)K(t-x) dt + H(x) = p(x) \quad \text{на } L, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned}
K(x) &= 3\zeta(x) + Q(x) - x\gamma(x), & H(x) &= 3q_*\lambda^2/32 + 2A + B + 2\Phi_2(x) + x\Phi_2'(x) + \Psi_2(x), \\
2A + B &= [(a + \alpha_2\lambda^2)(\delta_1 + \gamma_1) + (2a + \beta_2\lambda^2)\delta_1 - D_1]/\omega_1.
\end{aligned}$$

Сингулярное интегральное уравнение (18), а также системы (16), (17) являются основными разрешающими уравнениями задачи, позволяющими определить функцию  $g(x)$  и коэффициенты  $\alpha_{2k}$ ,  $\beta_{2k}$ . Зная функции  $\Phi_2(z)$ ,  $\Psi_2(z)$  и  $g(x)$ , можно определить напряженно-деформированное состояние тепловыделяющего массива при наличии полос предразрушения.

**Методика численного решения и анализ.** Используя в основном параллелограмме периодов разложения

$$\begin{aligned}
\zeta(z) &= \frac{1}{z} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_{j+1}z^{2j+1}}{2^{2j+2}}, & \gamma(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2j+1)g_{j+1}z^{2j}}{2^{2j+2}}, \\
Q(z) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2j+2)\rho_{j+1}}{2^{2j+2}} z^{2j+1},
\end{aligned}$$

уравнение (18) можно привести к обычной форме

$$\frac{1}{\pi} \int_L \frac{g(t) dt}{t-x} + \frac{1}{\pi} \int_L g(t)K_0(t-x) dt + H(x) = p(x). \quad (19)$$

Выполнив замену переменных  $t = \xi l$ ,  $x = \xi_0 l$ , после ряда простых преобразований уравнение (19) приведем к виду

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} \int_{L_0} \frac{g_*(\xi)}{\xi - \xi_0} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_{L_0} g_*(\xi)K_0(\xi - \xi_0) d\xi + H_*(\xi_0) &= f_*(\xi_0), \\
g_*(\xi) = g(t), & \quad L_0 = [-1, -\lambda_1] \cup [\lambda_1, 1], \quad \lambda_1 = \lambda/l,
\end{aligned}$$

$$K(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} K_j \left(\frac{l}{2}\right)^{2j+2} \xi^{2j+1}, \quad K_0 = \omega_1 \operatorname{Re} \delta_1, \quad K_j = g_{j+1}, \quad (20)$$

$$K_0^* = -\frac{\omega_1}{2}(\bar{\gamma}_1 + \bar{\delta}_1), \quad K_*(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} K_j^* \left(\frac{l}{2}\right)^{2j+2} \xi^{2j+1},$$

$$K_j^* = (j+1)(\rho_{j+1} - g_{j+1}), \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$K_0(\xi) = K_*(\xi) - K(\xi), \quad K_*(\xi_0) = H(\xi_0 l), \quad f_*(\xi_0) = p(\xi_0 l).$$

Учитывая, что  $g_*(\xi) = -g_*(-\xi)$ , уравнение (20) запишем следующим образом:

$$\frac{2}{\pi} \int_{\lambda_1}^1 \frac{\xi g_*(\xi)}{\xi^2 - \xi_0^2} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_{\lambda_1}^1 K_0^*(\xi, \xi_0) g_*(\xi) d\xi + H_*(\xi_0) = f_*(\xi_0), \quad (21)$$

$$K_0^*(\xi, \xi_0) = K_0(\xi - \xi_0) + K_0(\xi + \xi_0), \quad \lambda_1 \leq \xi_0 \leq 1.$$

Преобразуем уравнение (21) к виду, более удобному для нахождения его приближенного решения, выполнив замену переменных

$$\xi^2 = u = \frac{1 - \lambda_1^2}{2} (\tau + 1) + \lambda_1^2, \quad \xi_0^2 = u_0 = \frac{1 - \lambda_1^2}{2} (\eta + 1) + \lambda_1^2.$$

При этом отрезок интегрирования  $[\lambda_1, 1]$  переходит в отрезок  $[-1, 1]$ , а преобразованное уравнение (21) принимает стандартный вид

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g_*(\tau)}{\tau - \eta} d\tau + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_*(\tau) B(\eta, \tau) d\tau + H_*(\eta) = f_*(\eta). \quad (22)$$

Здесь

$$g_*(\tau) = g_*(\xi), \quad B(\eta, \tau) = \frac{1 - \lambda_1^2}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (K_j^* - K_j) \left(\frac{l}{2}\right)^{2j+2} u_0^j A_j,$$

$$A_j = \left[ 2j + 1 + \frac{(2j+1)(2j)(2j-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{u}{u_0}\right) + \dots + \frac{(2j+1)(2j)(2j-1) \dots 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2j+1)} \left(\frac{u}{u_0}\right)^j \right],$$

$$H_*(\eta) = H_*(\xi_0), \quad f_*(\eta) = f_*(\xi_0).$$

Для построения решения сингулярного интегрального уравнения используем метод решения сингулярных интегральных уравнений [12, 13]. Сингулярное интегральное уравнение (22) помимо особенности в ядре Коши имеет неподвижную особенность в точке выхода полосы предразрушения на поверхность кругового отверстия. В этом случае функция  $g(x)$  в точках  $x = \pm \lambda$  имеет особенность, отличную от корневой. Характер этой особенности может быть определен из анализа интегрального уравнения (22) [14]. В отличие от случая

внутренней полосы предразрушения интеграл  $\int_0^l g(t) dt = C \neq 0$ . Постоянная  $C$  выражается через раскрытие полосы предразрушения на поверхности кругового отверстия и должна быть определена после решения сингулярного интегрального уравнения.

В рассматриваемом случае следовало бы применять метод решения интегрального уравнения, построенного на базе квадратурной формулы Гаусса — Якоби. Из-за громоздкости выражений для функций  $B(\eta, \tau)$  и  $H_*(\eta)$  определение особенности функции  $g_*(\eta)$  в точках  $x = \pm\lambda$  затруднительно. Кроме того, следует отметить, что некоторый выигрыш в сходимости по уточненному методу теряется из-за громоздкости формул для коэффициентов матрицы системы. Будем использовать другой, упрощенный способ численного решения интегральных уравнений типа (22), эффективность которого проверена на многочисленных задачах [4, 11–13, 15]. Так как в тепловыделяющем массиве напряжения ограничены, решение сингулярного интегрального уравнения (22) следует искать в классе всюду ограниченных функций. Представим это решение в виде

$$g_*(\eta) = g_0(\eta)\sqrt{1 - \eta^2},$$

где  $g_0(\eta)$  — новая неизвестная регулярная функция.

Используя квадратурные формулы, интегральное уравнение (22) можно свести к системе  $M + 1$  алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1}^M \frac{g_0(\tau_m)}{M+1} \sin^2 \frac{\pi m}{M+1} \left( \frac{1}{\tau_m - \eta_r} + B(\tau_m, \eta_r) \right) = \pi [H(\eta_r) + p(\eta_r)]$$

$$(r = 1, 2, \dots, M+1).$$
(23)

Здесь

$$\tau_m = \cos \frac{\pi m}{M+1} \quad (m = 1, 2, \dots, M),$$

$$\eta_r = \cos \frac{2r-1}{2(M+1)} \pi \quad (r = 1, 2, \dots, M+1).$$

Полученная алгебраическая система  $M + 1$  уравнений (23) для определения неизвестных  $g_0(\tau_1), g_0(\tau_2), \dots, g_0(\tau_m)$  и  $(l - \lambda)/\lambda$  удовлетворяет дополнительному условию, при котором существует решение в классе всюду ограниченных функций (см. [12. С. 326]).

В правую часть системы (23) входят неизвестные значения напряжений  $p(\eta_r)$  в узловых точках, принадлежащих полосе предразрушения. Неизвестное напряжение в связях, возникающее на берегах полосы предразрушения, определяется из дополнительного условия — соотношения (3). Используя полученное решение, соотношение (3) можно записать в виде

$$g(x) = \frac{2\mu}{1 + \varkappa_0} \frac{d}{dx} [C(x, p)p(x)].$$
(24)

Это уравнение служит для определения усилий  $p(x)$  в связях.

Соотношение (24) представим в виде

$$-\frac{1 + \varkappa_0}{2\mu} \int_l^x g(x) dx = C(x, p)p(x).$$
(25)

Для построения недостающих уравнений потребуем выполнения условий (25) в узловых точках, содержащихся в полосе предразрушения  $(\lambda, l)$ . В результате получим алгебра-

ическую систему  $M$  уравнений для определения приближенных значений  $p(\eta_m)$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ):

$$\begin{aligned} C_0 g_0(\eta_1) &= C(\eta_1, p(\eta_1))p(\eta_1), \\ C_0(g_0(\eta_1) + g_0(\eta_2)) &= C(\eta_2, p(\eta_2))p(\eta_2), \\ &\dots\dots\dots \\ C_0 \sum_{m=1}^M g_0(\eta_m) &= C(\eta_M, p(\eta_M))p(\eta_M). \end{aligned} \tag{26}$$

Здесь  $C_0 = -(1 + \kappa_0)\pi(l - \lambda)/(2\mu M)$ .

Поскольку размер полосы предразрушения неизвестен, объединенная алгебраическая система уравнений (16), (17), (23), (26) является нелинейной даже при линейных связях. Для того чтобы избежать решения нелинейной системы уравнений при линейных связях, применим обратный метод, в частности размер полосы предразрушения будем считать заданным, а параметр нагружения  $q_*$  определим в процессе решения. При таком способе решения алгебраическая система (16), (17), (23), (26) оказывается линейной. В численных расчетах полагалось  $M = 30$ , что соответствует разбиению интервала интегрирования на 30 чебышевских узлов. Расчеты выполнены методом Гаусса с выбором главного элемента для правильных нормированных сеток центров отверстий. Исследовались случаи расположения отверстий в вершинах квадратной ( $h = 1$ ,  $\alpha = \pi/2$ ) и треугольной ( $h = 1$ ,  $\alpha = \pi/3$ ) сеток. В результате численного расчета найдена зависимость длины полосы предразрушения, усилия в связях и раскрытия противоположных берегов полосы предразрушения от параметра нагружения  $q_*$ .

В случае нелинейного закона деформирования связей для определения усилий в полосе предразрушения используется итерационный алгоритм, подобный методу упругих решений [16]. Предполагается, что закон деформирования межчастичных связей (сил сцепления) является линейным при  $v^+ - v^- \leq v_*$ .

Первый шаг итерационного процесса вычислений состоит в решении системы уравнений (16), (17), (23), (26) для линейно-упругих межчастичных связей. Последующие итерации выполняются только в случаях, когда на части зоны предразрушения имеет место соотношение  $v^+ - v^- > v_*$ . Для таких итераций решается система уравнений в каждом приближении для квазиупругих связей с изменяющейся вдоль берегов полосы предразрушения и зависящей от величины усилий в связях эффективной податливостью, которая вычислена на предыдущем шаге расчета. Расчет эффективной податливости проводится подобно определению секущего модуля в методе переменных параметров упругости [17]. Процесс последовательных приближений заканчивается, когда усилия вдоль полосы предразрушения, полученные на двух последовательных итерациях, практически не различаются.

Нелинейная часть кривой деформирования связей аппроксимировалась билинейной зависимостью [8], восходящий участок которой соответствовал деформированию связей ( $0 < v^+ - v^- \leq v_*$ ) с их максимальным натяжением. При  $v^+ - v^- > v_*$  закон деформирования описывался нелинейной зависимостью, определяемой точками  $(v_*, \sigma_*)$  и  $(\delta_c, \sigma_c)$ , причем при  $\sigma_c \geq \sigma_*$  имела место возрастающая линейная зависимость (линейное упрочнение, соответствующее упругопластической деформации связей).

Для определения предельно равновесного состояния полосы предразрушения, при котором появляется трещина, используем условие (4). Из полученного решения вычислим

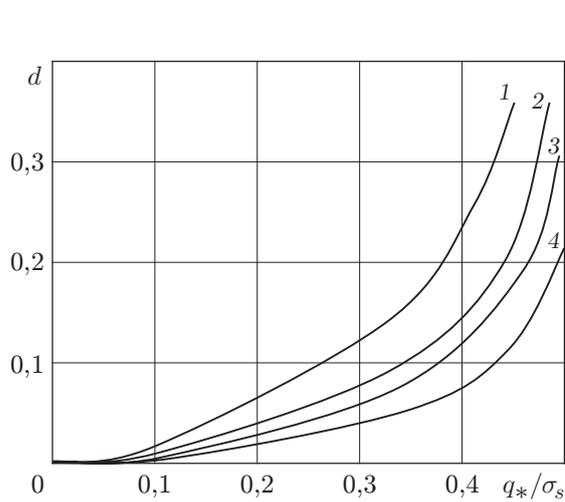


Рис. 2

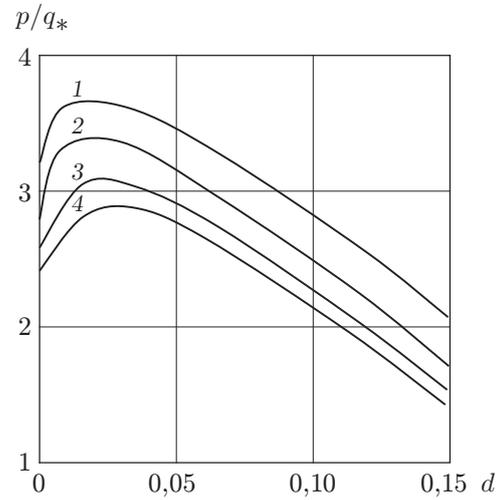


Рис. 3

Рис. 2. Зависимость относительной длины полосы предразрушения  $d$  от интенсивности тепловыделения  $q_*/\sigma_s$  при различных значениях радиуса отверстия: 1 —  $\lambda = 0,2$ ; 2 —  $\lambda = 0,3$ ; 3 —  $\lambda = 0,4$ ; 4 —  $\lambda = 0,5$

Рис. 3. Зависимость усилий в связях  $p/q_*$  от относительного размера полосы предразрушения (обозначения те же, что на рис. 2)

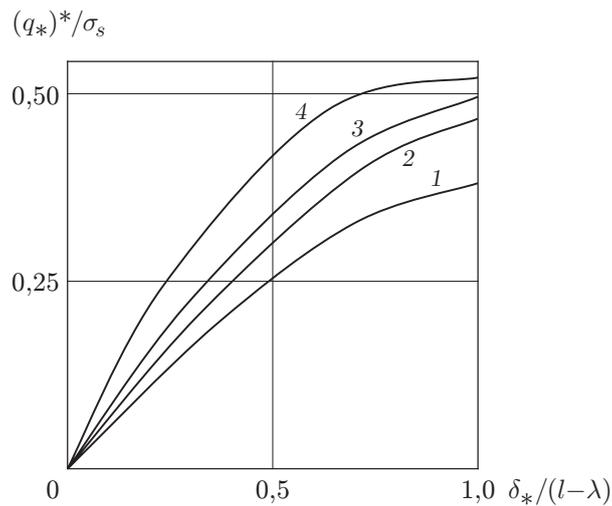


Рис. 4. Зависимость критической интенсивности тепловыделения в массиве  $(q_*)^*/\sigma_s$  от относительного раскрытия  $\delta_*/(l-\lambda)$  при  $x = \pm\lambda$  (обозначения те же, что на рис. 2)

смещение  $v(x, 0)$  на полосе предразрушения:

$$v(x, 0) = -\frac{1 + \varkappa_0}{2\mu} \int_{-l}^x g(x) dx.$$

При  $x = \lambda$  раскрытие берегов полосы предразрушения равно

$$v(-\lambda, 0) = -\frac{1 + \varkappa_0}{2\mu} \int_{-l}^{-\lambda} g(x) dx.$$

Таким образом, условием, определяющим предельную интенсивность внутренних источников тепла массива (параметр нагружения  $q_*$ ), при которой в точке  $x = \pm\lambda$  образуется трещина, является следующее:

$$C(\lambda, p(\lambda))p(\lambda) = \delta_c. \quad (27)$$

Решение алгебраической системы (16), (17), (23), (26), (27) позволяет определить критическое значение интенсивности внутренних источников тепла, размер полосы предразрушения и усилия в связях в состоянии предельного равновесия, при котором в массиве образуются трещины.

На рис. 2 представлена зависимость относительной длины полосы предразрушения  $d = (l - \lambda)/\lambda$  от безразмерного значения интенсивности тепловыделения  $q_*/\sigma_s$  для квадратной сетки отверстий ( $\sigma_s$  — предел текучести материала на растяжение).

На рис. 3 показана зависимость усилий в связях  $p/q_*$  от относительного размера  $d$  для квадратной сетки отверстий.

На рис. 4 приведена зависимость критической интенсивности тепловыделения в массиве  $(q_*)^*/\sigma_s$  от относительного раскрытия  $\delta_*/(l - \lambda)$  в точке  $x = \lambda$  для треугольной сетки отверстий ( $\delta_* = \pi\delta_c\mu/[(1 + \varkappa_0)\sigma_s]$ ).

Анализ предельно равновесного состояния тепловыделяющего перфорированного массива, при котором появляется трещина, сводится к параметрическому исследованию разрешающей алгебраической системы (16), (17), (23), (26) и критерия появления трещины (27) при различных законах деформирования связей, теплофизических, упругих постоянных материала и геометрических характеристиках массива. Непосредственно из решения полученных алгебраических систем в каждом приближении определяются усилия в связях и раскрытие берегов полосы предразрушения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Соболев С. Л., Мухина Г. В.** Определение термических напряжений в среде с пустотами // Атом. энергия. 1958. Т. 5, вып. 2. С. 178–181.
2. **Гольденблат И. И.** Расчеты температурных напряжений в ядерных реакторах / И. И. Гольденблат, Н. А. Николаенко. М.: Госатомиздат, 1962.
3. **Фильштинский Л. А.** Задачи теплопроводности и термоупругости для плоскости, ослабленной двоякопериодической системой одинаковых круглых отверстий // Тепловые напряжения в элементах конструкций. Киев: Наук. думка, 1964. Вып. 4. С. 103–112.
4. **Панасюк В. В.** Механика квазихрупкого разрушения материалов. Киев: Наук. думка, 1991.
5. **Cox В. N., Marshall D. B.** Concepts for bridged cracks fracture and fatigue // Acta Metall. Material. 1994. V. 42, N 2. P. 341–363.
6. **Goldstein R. V., Perelmuter M. N.** Modeling of bonding at the interface crack // Intern. J. Fracture. 1999. V. 99, N 1/2. P. 53–79.

7. **Гольдштейн Р. В., Перельмутер М. Н.** Трещина на границе соединения материалов со связями между берегами // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2001. № 1. С. 94–112.
8. **Гольдштейн Р. В., Перельмутер М. Н.** Рост трещин по границе соединения материалов // Проблемы механики: Сб. ст. к 90-летию со дня рожд. А. Ю. Ишлинского. М.: Физматлит, 2003. С. 221–238.
9. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
10. **Григолюк Э. И.** Перфорированные пластины и оболочки / Э. И. Григолюк, Л. А. Фильштинский. М.: Наука, 1970.
11. **Мирсалимов В. М.** Разрушение упругих и упругопластических тел с трещинами. Баку: Элм, 1984.
12. **Панасюк В. В.** Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацьшин. Киев: Наук. думка, 1976.
13. **Мирсалимов В. М.** Неоднородные упругопластические задачи. М.: Наука, 1987.
14. **Мусхелишвили Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
15. **Саврук М. П.** Численный анализ в плоских задачах теории трещин / М. П. Саврук, П. Н. Осив, И. В. Прокопчук. Киев: Наук. думка, 1989.
16. **Ильюшин А. А.** Пластичность. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948.
17. **Биргер И. А.** Общие алгоритмы решения задач теорий упругости, пластичности и ползучести // Успехи механики деформируемых сред. М.: Наука, 1975. С. 51–73.

*Поступила в редакцию 17/X 2006 г.*

---