

УДК 539.3

ЗАДАЧА О ТОНКОМ ЖЕСТКОМ ВКЛЮЧЕНИИ, ВПЯЯННОМ В МЕЖФАЗНУЮ ТРЕЩИНУ В ОКРЕСТНОСТИ ЕЕ ВЕРШИНЫ

В. В. Сильвестров, Ю. О. Васильева*

Российский государственный университет нефти и газа им. И. М. Губкина,
119991 Москва, Россия

* Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова,
428015 Чебоксары, Россия

E-mails: v-silvestrov@yandex.ru, vasilyeva.yu@gmail.com

Решена задача о напряженном состоянии кусочно-однородного упругого тела с полубесконечной трещиной на линии раздела сред, в которую в окрестности вершины впаяно тонкое жесткое остроконечное включение конечной длины. Берега трещины нагружены заданными напряжениями, на бесконечности тело растягивается заданными нормальными напряжениями, действующими вдоль трещины. На включение действуют внешние силы, имеющие заданные главный вектор и момент. Задача сведена к матричной краевой задаче Римана с кусочно-постоянным коэффициентом. С использованием гипергеометрической функции Гаусса построено решение этой задачи в явном виде. Найдены угол поворота включения, комплексные потенциалы, коэффициенты интенсивности напряжений вблизи концов включения.

Ключевые слова: межфазная трещина, тонкое жесткое включение, коэффициенты интенсивности напряжений, матричная задача Римана.

1. Постановка задачи. Пусть в кусочно-однородном изотропном упругом теле, моделируемом плоскостью комплексной переменной $z = x + iy$, состоящей из верхней $\text{Im } z > 0$ и нижней $\text{Im } z < 0$ полуплоскостей, различающихся упругими свойствами, на линии раздела сред $y = 0$ расположена полубесконечная открытая трещина $[0, +\infty)$, в которую в окрестности вершины $z = 0$ впаяно тонкое жесткое остроконечное включение длиной l . Включение присоединено к телу идеально жестко с заданным натягом, а берега трещины на продолжении включения нагружены заданными напряжениями:

$$\begin{aligned} u^\pm(x) + iv^\pm(x) &= s_1^\pm(x) + is_2^\pm(x) + i\varepsilon x + u_0 + iv_0, & x \in (0, l], \\ \tau_{xy}^\pm(x) + i\sigma_y^\pm(x) &= p_1^\pm(x) + ip_2^\pm(x), & x \in (l, +\infty). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $u + iv$ — вектор смещений; $\tau_{xy} + i\sigma_y$ — вектор напряжений; $s_1^\pm(x)$, $s_2^\pm(x)$, $p_1^\pm(x)$, $p_2^\pm(x)$ — заданные функции; ε — угол поворота включения; $u_0 + iv_0$ — комплексная константа, характеризующая жесткое смещение тела в целом; верхние индексы “+”, “-” у функций соответствуют их значениям на верхнем и нижнем берегах трещины. Функции $s_1^\pm(x)$ определяют величину натяга по горизонтали для точек верхнего и нижнего берегов трещины при соединении их с включением, а $s_2^\pm(x)$ — форму поверхностей включения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13-01-00003).

© Сильвестров В. В., Васильева Ю. О., 2015

Будем считать, что производные $(s_1^\pm(x))'$, $(s_2^\pm(x))'$ и функции $p_1^\pm(x)$, $p_2^\pm(x)$ непрерывны по Гельдеру на соответствующих промежутках и $p_j^\pm(x) = O(x^{-\rho})$, $\rho > 1$, $x \rightarrow +\infty$, $j = 1, 2$. Угол поворота ε включения заранее не известен и вычисляется после решения задачи. Константы u_0 , v_0 не оказывают влияния на напряженное состояние тела и в решении задачи отсутствуют.

Пусть полуплоскости соединены вдоль луча $(-\infty, 0]$ таким образом, что при переходе через линию соединения векторы смещения и напряжений меняются непрерывно. Материал верхней полуплоскости имеет модуль сдвига μ_1 и коэффициент Пуассона ν_1 , материал нижней полуплоскости — μ_2 и ν_2 соответственно. На бесконечности в верхней и нижней полуплоскостях действуют заданные нормальные напряжения σ_{x1}^∞ и σ_{x2}^∞ соответственно. Нормальное напряжение σ_y^∞ , касательное напряжение τ_{xy}^∞ и вращение ω^∞ на бесконечности отсутствуют. Напряжения σ_{x1}^∞ и σ_{x2}^∞ связаны условием непрерывности смещений на линии соединения полуплоскостей $\mu_2(1 + \varkappa_1)\sigma_{x1}^\infty = \mu_1(1 + \varkappa_2)\sigma_{x2}^\infty$ при $x \rightarrow -\infty$ ($\varkappa_j = 3 - 4\nu_j$, $j = 1, 2$ в случае плоской деформации, $\varkappa_j = (3 - \nu_j)/(1 + \nu_j)$, $j = 1, 2$ в случае плоского напряженного состояния). Заданы также главный вектор $X_0 + iY_0$ внешних сил, действующих на включение, и момент M_0 этих сил относительно точки $z = 0$.

Целью данной работы является определение комплексных потенциалов, описывающих напряженное состояние составной плоскости, при котором напряжения и вращение в окрестности вершины включения $z = 0$ и вблизи его концов $z = l \pm i0$ могут иметь интегрируемые особенности, а также исследование поведения этих потенциалов вблизи указанных точек.

Аналогичная задача для однородных изотропного и ортотропного тел в случае конечной трещины рассмотрена в работах [1, 2].

2. Решение задачи. Для определения напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} , угла вращения ω и производной по x от вектора смещения $u + iv$ в точке $z = x + iy$ составной плоскости используем модификации формул Колосова — Мусхелишвили для кусочно-однородной плоскости [3]:

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4 \operatorname{Re} \Phi(z), & 2\mu_1\omega &= (1 + \varkappa_1) \operatorname{Im} \Phi(z), \\ \sigma_y - i\tau_{xy} &= \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)}, \\ 2\mu_1(u + iv)'_x &= \varkappa_1\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)}, & \operatorname{Im} z > 0, \\ \sigma_x + \sigma_y &= 4 \operatorname{Re} \Phi_*(z), & 2\mu_2\omega &= (1 + \varkappa_2) \operatorname{Im} \Phi_*(z), \\ \sigma_y - i\tau_{xy} &= \Phi_*(z) + \Omega_*(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'_*(z)}, \\ 2\mu_2(u + iv)'_x &= \varkappa_2\Phi_*(z) - \Omega_*(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi'_*(z)}, & \operatorname{Im} z < 0, \\ \Phi_*(z) &= \alpha_1\Phi(z) + \alpha_2\Omega(z), & \Omega_*(z) &= \alpha_3\Omega(z) + \alpha_4\Phi(z), \\ \alpha_1 &= \frac{1 + \mu_*\varkappa_1}{1 + \varkappa_2}, & \alpha_2 &= \frac{1 - \mu_*}{1 + \varkappa_2}, & \alpha_3 &= \frac{\mu_* + \varkappa_2}{1 + \varkappa_2}, & \alpha_4 &= \frac{\varkappa_2 - \mu_*\varkappa_1}{1 + \varkappa_2}, & \mu_* &= \frac{\mu_2}{\mu_1}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ — кусочно-голоморфные функции (комплексные потенциалы) с линией разрыва $[0, +\infty)$. В точках $z = 0$ и $z = l \pm i0$ эти функции могут иметь интегрируемые особенности, а в окрестности бесконечности ограничены.

Из условий (1) на основе (2) находим

$$\begin{aligned} \varkappa_1\Phi^+(x) - \Omega^-(x) &= 2\mu_1[(s^+(x))' + i\varepsilon], \\ \varkappa_2\alpha_1\Phi^-(x) + \varkappa_2\alpha_2\Omega^-(x) - \alpha_3\Omega^+(x) - \alpha_4\Phi^+(x) &= 2\mu_2[(s^-(x))' + i\varepsilon], & x \in (0, l), \\ \Phi^+(x) + \Omega^-(x) &= p^+(x), \end{aligned}$$

$$\alpha_1 \Phi^-(x) + \alpha_2 \Omega^-(x) + \alpha_3 \Omega^+(x) + \alpha_4 \Phi^+(x) = p^-(x), \quad x \in (l, +\infty),$$

$$s^\pm(x) = s_1^\pm(x) + i s_2^\pm(x), \quad p^\pm(x) = p_2^\pm(x) - i p_1^\pm(x).$$

Их этих уравнений путем замены переменных $z = l\zeta$, $x = lt$ и введения новых функций

$$H_1(\zeta) = \Phi(l\zeta), \quad H_2(\zeta) = \Omega(l\zeta)$$

получаем матричную краевую задачу Римана

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^+(t) &= G_1 \cdot \mathbf{H}^-(t) + \mathbf{g}_1(t), & t \in (0, 1), \\ \mathbf{H}^+(t) &= G_2 \cdot \mathbf{H}^-(t) + \mathbf{g}_2(t), & t \in (1, \infty), \\ \mathbf{H}(\zeta) &= \begin{pmatrix} H_1(\zeta) \\ H_2(\zeta) \end{pmatrix}, \quad G_1 = \begin{pmatrix} 0 & \varkappa_1^{-1} \\ \varkappa_2 m & \alpha \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -m & 1 - m \end{pmatrix}, \\ \mathbf{g}_1(t) &= \begin{pmatrix} 2\mu_1 \varkappa_1^{-1} [(s^+(lt))' + i\varepsilon] \\ -2\mu_1 \varkappa_1^{-1} \alpha_4 \alpha_3^{-1} (s^+(lt))' - 2\mu_2 \alpha_3^{-1} (s^-(lt))' - 2i\mu_1 \alpha_5 \varepsilon \end{pmatrix}, \\ \mathbf{g}_2(t) &= \begin{pmatrix} p^+(lt) \\ \alpha_3^{-1} p^-(lt) - \alpha_4 \alpha_3^{-1} p^+(lt) \end{pmatrix}, \\ \alpha &= \frac{\alpha_2 \varkappa_1 \varkappa_2 - \alpha_4}{\alpha_3 \varkappa_1} = 1 - \frac{\varkappa_2 m}{\varkappa_1}, \quad m = \frac{\alpha_1}{\alpha_3}, \quad \alpha_5 = \frac{\alpha_4 + \mu_* \varkappa_1}{\alpha_3 \varkappa_1} \end{aligned} \quad (3)$$

с кусочно-постоянным коэффициентом, имеющим разрыв в точке $t = 1$. В случае $\mu_1 = \mu_2$, $\varkappa_1 = \varkappa_2$, соответствующем однородной плоскости, параметры $m = 1$, $\alpha = 0$ и коэффициенты G_1 , G_2 задачи (3) являются матрицами подстановочного типа. В этом случае решение задачи (3) можно найти в явном виде путем подбора канонической матрицы задачи [4] или с помощью метода римановых поверхностей [5, 6]. В общем случае решение задачи (3) можно выразить через гипергеометрическую функцию Гаусса $F(a, b; c; \zeta)$. Процедура построения этого решения подробно описана в работах [7–10]. В рассматриваемом случае общее решение задачи (3), ограниченное на бесконечности и допускающее интегрируемые особенности в точках $\zeta = 0$, $\zeta = 1 \pm i0$, имеет вид

$$\mathbf{H}(\zeta) = X(\zeta) \begin{pmatrix} A_0 + A_1 \zeta \\ A_2 \end{pmatrix} + X(\zeta) \mathbf{H}_*(\zeta), \quad \mathbf{H}_*(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty [X^+(t)]^{-1} \mathbf{g}(t) \frac{dt}{t - \zeta},$$

где $\mathbf{g}(t) = \mathbf{g}_1(t)$ при $t \in (0, 1)$ и $\mathbf{g}(t) = \mathbf{g}_2(t)$ при $t \in (1, \infty)$; A_0 , A_1 , A_2 — неизвестные комплексные постоянные;

$$X(\zeta) = \begin{pmatrix} \chi_{11}(\zeta) & \chi_{12}(\zeta) \\ \chi_{21}(\zeta) & \chi_{22}(\zeta) \end{pmatrix} —$$

каноническая матрица однородной задачи, определяемая формулами

$$X(\zeta) = (\zeta - 1)^\mu C X_*(\zeta),$$

$$X_*(\zeta) = \begin{pmatrix} F(a, b; c; \zeta) & a(1 - \zeta)F(a + 1, b; c; \zeta) \\ \zeta^{1-c}F(a_1, b_1; 2 - c; \zeta) & a_1 \zeta^{1-c}(1 - \zeta)F(a_1 + 1, b_1; 2 - c; \zeta) \end{pmatrix}, \quad |\zeta| < 1, \quad \zeta \notin [0, 1],$$

$$X_*(\zeta) = P^\pm \begin{pmatrix} F(a, b; 1 - d_1; 1 - \zeta) & \frac{aa_1}{1 - d_1} (1 - \zeta)F(a + 1, b; 2 - d_1; 1 - \zeta) \\ ((\zeta - 1)^{d_1} F(c - a, c - b; 1 + d_1; 1 - \zeta) & -d_1 (\zeta - 1)^{d_1} F(-a_1, c - b; d_1; 1 - \zeta) \end{pmatrix},$$

$$|\zeta - 1| < 1, \quad \text{Im}(\pm \zeta) > 0,$$

$$X_*(\zeta) = Q \begin{pmatrix} \zeta^{-a} F(a, a_1; a + 1 - b; \zeta^{-1}) & \frac{aa_1(1 - \zeta)}{(b - 1 - a)\zeta^{a+1}} F(a + 1, a_1 + 1; a + 2 - b; \zeta^{-1}) \\ \zeta^{-b} F(b, b_1; b + 1 - a; \zeta^{-1}) & (a - b)\zeta^{-b}(1 - \zeta)F(b, b_1; b - a; \zeta^{-1}) \end{pmatrix},$$

$$|\zeta| > 1, \quad \text{Im}(\pm\zeta) > 0,$$

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ \varkappa_1 c_1 & -\varkappa_2 m c_2 \end{pmatrix}, \quad P^+ = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}, \quad P^- = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} e^{-2\pi ic} & p_{22} e^{-2\pi ic} \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}, \quad c_1 = \frac{(\varkappa_2 m - 1)\Gamma(2 - c) e^{i\pi(1-c)}}{\Gamma(1 - a)\Gamma(1 + b - c)}, \quad c_2 = \frac{(1 + \varkappa_1)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c - a)},$$

$$\mu = -\frac{1}{2} - \frac{\ln \varkappa_1}{2\pi i}, \quad a = \frac{1}{2} - \frac{\ln \varkappa_1}{2\pi i}, \quad b = 1 + \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{m}{\varkappa_1}, \quad c = \frac{3}{2} + \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{\varkappa_2 m}{\varkappa_1},$$

$$a_1 = a - c + 1, \quad b_1 = b - c + 1, \quad d_1 = c - a - b,$$

$$p_{11} = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c - a - b)}{\Gamma(c - a)\Gamma(c - b)}, \quad p_{12} = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a + b - c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} e^{i\pi(a+b-c)}, \quad p_{21} = \frac{\Gamma(2 - c)\Gamma(c - a - b)}{\Gamma(1 - a)\Gamma(1 - b)},$$

$$p_{22} = \frac{\Gamma(2 - c)\Gamma(a + b - c)}{\Gamma(a + 1 - c)\Gamma(b + 1 - c)} e^{i\pi(a+b-c)}, \quad q_{11} = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b - a)}{\Gamma(c - a)\Gamma(b)} e^{i\pi a}, \quad q_{12} = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a - b)}{\Gamma(a)\Gamma(c - b)} e^{i\pi b},$$

$$q_{21} = \frac{\Gamma(2 - c)\Gamma(b - a)}{\Gamma(b + 1 - c)\Gamma(1 - a)} e^{i\pi(a+1-c)}, \quad q_{22} = \frac{\Gamma(2 - c)\Gamma(a - b)}{\Gamma(a + 1 - c)\Gamma(1 - b)} e^{i\pi(b+1-c)}.$$

Здесь $F(a, b; c; \zeta)$ — гипергеометрическая функция Гаусса; $\Gamma(\zeta)$ — гамма-функция Эйлера; для многозначных функций ζ^p и $(\zeta - 1)^q$ используются ветви, однозначные в плоскости с разрезами $[0, +\infty)$ и $[1, +\infty)$ соответственно, определяемые условиями $0 < \arg \zeta < 2\pi$ и $0 < \arg(\zeta - 1) < 2\pi$.

Таким образом,

$$H_1(\zeta) = \chi_{11}(\zeta)[A_0 + A_1\zeta + \varepsilon\mu_1 I_1(\zeta) + R_1(\zeta)] + \chi_{12}(\zeta)[A_2 + \varepsilon\mu_1 I_2(\zeta) + R_2(\zeta)],$$

$$H_2(\zeta) = \chi_{21}(\zeta)[A_0 + A_1\zeta + \varepsilon\mu_1 I_1(\zeta) + R_1(\zeta)] + \chi_{22}(\zeta)[A_2 + \varepsilon\mu_1 I_2(\zeta) + R_2(\zeta)],$$

$$I_j(\zeta) = \frac{1}{\varkappa_1 \pi} \int_0^1 \frac{h_j(t) + \mu_* \varkappa_1 \eta_j(t)}{t - \zeta} dt,$$

$$R_j(\zeta) = \frac{1}{\pi i} \int_0^1 (\mu_1 \varkappa_1^{-1} h_j(t)(s^+(lt))' + \mu_2 \eta_j(t)(s^-(lt))') \frac{dt}{t - \zeta} + \tag{4}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_1^{+\infty} (h_j(t)p^+(lt) - \eta_j(t)p^-(lt)) \frac{dt}{t - \zeta}, \quad j = 1, 2,$$

$$h_1(t) = [\chi_{22}^+(t) + \alpha_4 \alpha_3^{-1} \chi_{12}^+(t)] / \det X^+(t), \quad h_2(t) = -[\chi_{21}^+(t) + \alpha_4 \alpha_3^{-1} \chi_{11}^+(t)] / \det X^+(t),$$

$$\eta_1(t) = \alpha_3^{-1} \chi_{12}^+(t) / \det X^+(t), \quad \eta_2(t) = -\alpha_3^{-1} \chi_{11}^+(t) / \det X^+(t);$$

$$\Phi(z) = H_1(z/l), \quad \Omega(z) = H_2(z/l). \tag{5}$$

Так как

$$CQ = \begin{pmatrix} c_3 & c_4 \\ -c_3 & mc_4 \end{pmatrix}, \quad c_3 = c_1 q_{11} + c_2 q_{21}, \quad c_4 = c_1 q_{12} + c_2 q_{22},$$

то в окрестности бесконечности

$$\Phi(z) = C_1 + C_2 z^{-1/2+i\beta} + C_3 z^{-1} + O(z^{-\rho_*}),$$

$$\Omega(z) = -C_1 + mC_2 z^{-1/2+i\beta} - C_3 z^{-1} + O(z^{-\rho_*}), \quad \beta = (2\pi)^{-1} \ln m, \quad \rho_* > 1,$$

$$C_1 = c_3 A_1, \quad C_2 = c_4 [A_1 + (b-a)A_2] l^{1/2-i\beta}, \quad C_3 = c_3 \left(A_0 + \frac{a(a+1-c)}{a+1-b} (A_1 + A_2) \right) l.$$

Определяя на основе этих представлений и формул (1) напряжения и вращение при $z \rightarrow \infty$ и используя условие ограниченности расхождения противоположных точек $x + i0$ и $x - i0$ берегов трещины в окрестности бесконечности, так же, как в работе [10], находим неизвестные постоянные

$$A_1 = \frac{\sigma_{x1}^\infty}{4c_3}, \quad A_2 = \frac{A_1}{a-b}, \quad A_0 = -\frac{X_0 + iY_0}{2\pi l c_3 (\alpha_1 + \alpha_3)} - \frac{a(a+1-c)}{a+1-b} (A_1 + A_2).$$

Чтобы найти угол поворота включения ε , вычислим момент

$$M_0 = \int_0^l x (\sigma_y^-(x) - \sigma_y^+(x)) dx.$$

С использованием формул (2), (4), (5) находим выражение

$$M_0 = (1 - \varkappa_1^{-1}) \mu_1 l^2 \int_0^1 t (s_1^+(lt))' dt - (1 - \varkappa_2^{-1}) \mu_2 l^2 \int_0^1 t (s_1^-(lt))' dt + \quad (6)$$

$$+ \frac{\varkappa_2 + \mu_*}{\varkappa_2} l^2 \int_0^1 t \operatorname{Re} [\eta_3(t)(A_0 + A_1 t + \varepsilon \mu_1 I_1(t) + R_1(t)) + \eta_4(t)(A_2 + \varepsilon \mu_1 I_2(t) + R_2(t))] dt,$$

$$\eta_3(t) = \chi_{21}^+(t) - \varkappa_1 \chi_{11}^+(t), \quad \eta_4(t) = \chi_{22}^+(t) - \varkappa_1 \chi_{12}^+(t),$$

из которого следует

$$\begin{aligned} \varepsilon \mu_1 = & \left(\frac{\varkappa_2 M_0}{(\varkappa_2 + \mu_*) l^2} - \frac{\varkappa_2 (\varkappa_1 - 1) \mu_1}{\varkappa_1 (\varkappa_2 + \mu_*)} \int_0^1 t (s_1^+(lt))' dt + \frac{(\varkappa_2 - 1) \mu_2}{\varkappa_2 + \mu_*} \int_0^1 t (s_1^-(lt))' dt - \right. \\ & \left. - \int_0^1 t \operatorname{Re} [\eta_3(t)(A_0 + A_1 t + R_1(t)) + \eta_4(t)(A_2 + R_2(t))] dt \right) \times \\ & \times \left(\int_0^1 t \operatorname{Re} [\eta_3(t) I_1(t) + \eta_4(t) I_2(t)] dt \right)^{-1}. \quad (7) \end{aligned}$$

При $\varepsilon = 0$ с помощью формулы (6) можно получить значение момента, который необходимо приложить к включению, чтобы удерживать его в заданном положении без поворота. В частности, если включение является прямолинейным и присоединено к телу без натяга ($s_1^\pm(x) = 0$, $s_2^\pm(x) = 0$), а берега трещины нагружены только двумя сосредоточенными силами $F_c = X_c + iY_c$ и $-F_c = -X_c - iY_c$ в точках $x = x_0 + i0$ и $x = x_0 - i0$ ($x_0 > l$) на противоположных берегах трещины соответственно (в этом случае $p^\pm(x) = iF_c \delta(x - x_0)$),

$\delta(x)$ — дельта-функция Дирака), то при отсутствии остальных исходных нагрузок все постоянные A_j в формулах (4), (7) равны нулю, а функции $R_j(\zeta)$ записываются в виде

$$R_j(\zeta) = \frac{D_j F_c}{2\pi(l\zeta - x_0)}, \quad j = 1, 2,$$

$$D_1 = -\frac{\chi_{22}^+(t_0) + \alpha_3^{-1}(\alpha_4 - 1)\chi_{12}^+(t_0)}{\det X^+(t_0)}, \quad D_2 = \frac{\chi_{21}^+(t_0) + \alpha_3^{-1}(\alpha_4 - 1)\chi_{11}^+(t_0)}{\det X^+(t_0)}, \quad t_0 = \frac{x_0}{l}.$$

3. Поведение напряжений на концах включения. Из формул (4), (5) следует, что вблизи левого конца ($z = 0$) включения справедливы соотношения

$$\Phi(z) = B_0 z^{-1/2+i\delta} + O(1), \quad \Omega(z) = -\varkappa_2 m B_0 z^{-1/2+i\delta} + O(1), \quad (8)$$

где

$$B_0 = e^{i\pi\mu} c_2 [A_0 + \varepsilon\mu_1 I_1(0) + R_1(0) + (a - c + 1)(A_2 + \varepsilon\mu_1 I_2(0) + R_2(0))] l^{1/2-i\delta},$$

$$\delta = (2\pi)^{-1} \ln(\varkappa_2 m / \varkappa_1).$$

Следовательно, вблизи точки $z = 0$ напряжения распределены так же, как вблизи вершины тонкого жесткого остроконечного межфазного включения [11, 12], и их интенсивность определяется коэффициентами K_I, K_{II} :

$$K_I - iK_{II} = \sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow 0} (-z)^{1/2-i\delta} [\sigma_y(z) - i\tau_{xy}(z)].$$

На основе формул (2) и представлений (8) находим

$$K_I - iK_{II} = i\sqrt{2\pi} e^{\pi\delta} (1 - \varkappa_2 m) B_0.$$

Приведем для сравнения коэффициенты интенсивности напряжений вблизи вершины $z = 0$ полубесконечной межфазной трещины $[0; \infty)$ при отсутствии включения:

$$K_{Icr} - iK_{IIcr} = \sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow 0} (-z)^{1/2-i\beta} [\sigma_y(z) - i\tau_{xy}(z)] =$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2\pi}} \int_0^\infty [(1 - \alpha_4 \alpha_3^{-1}) p^+(x) + \alpha_3^{-1} p^-(x)] x^{-1/2-i\beta} dx, \quad \beta = \frac{\ln m}{2\pi}.$$

В частности, если берега трещины нагружены лишь сосредоточенными силами $F_c = X_c + iY_c$ и $-F_c = -X_c - iY_c$ в точках $x = x_0 + i0$ и $x = x_0 - i0$ ($x_0 > l$) соответственно, то при отсутствии остальных исходных нагрузок

$$K_{Icr} - iK_{IIcr} = i(1 + m) \sqrt{m/(2\pi)} F_c x_0^{-1/2-i\beta}.$$

Распределение напряжений вблизи точек $z = l \pm i0$ определяется функциями $\Phi(z), \Omega(z)$, которые вблизи этих точек имеют представления

$$\Phi(z) = a_1^\pm B_1 (z - l)^{-1/2+i\beta_1} + a_2^\pm B_2 (z - l)^{-1/2-i\beta_2} + O(1),$$

$$\Omega(z) = b_1^\pm B_1 (z - l)^{-1/2+i\beta_1} + b_2^\pm B_2 (z - l)^{-1/2-i\beta_2} + O(1), \quad z \rightarrow l \pm i0,$$

$$B_1 = [A_0 + A_1 + \varepsilon\mu_1 I_1(1) + R_1(1)] l^{1/2-i\beta_1},$$

$$\begin{aligned}
B_2 &= [A_0 + A_1 + \varepsilon\mu_1 I_1(1) + R_1(1) - (c - a - b)(A_2 + \varepsilon\mu_1 I_2(1) + R_2(1))]l^{1/2+i\beta_2}, \\
a_1^+ &= c_1 p_{11} + c_2 p_{21}, & a_1^- &= c_1 p_{11} + c_2 p_{21} e^{-2\pi ic}, \\
a_2^+ &= c_1 p_{12} + c_2 p_{22}, & a_2^- &= c_1 p_{12} + c_2 p_{22} e^{-2\pi ic}, \\
b_1^+ &= \varkappa_1 c_1 p_{11} - \varkappa_2 m c_2 p_{21}, & b_1^- &= \varkappa_1 c_1 p_{11} - \varkappa_2 m c_2 p_{21} e^{-2\pi ic}, \\
b_2^+ &= \varkappa_1 c_1 p_{12} - \varkappa_2 m c_2 p_{22}, & b_2^- &= \varkappa_1 c_1 p_{12} - \varkappa_2 m c_2 p_{22} e^{-2\pi ic}, \\
\beta_1 &= \frac{\ln \varkappa_1}{2\pi}, & \beta_2 &= \frac{\ln \varkappa_2}{2\pi}.
\end{aligned}$$

Можно показать, что

$$a_2^+ = b_2^- = 0, \quad b_1^- = \varkappa_1 a_1^+, \quad b_2^+ = \varkappa_2 m a_2^-, \quad a_1^- = -\alpha_2 \alpha_1^{-1} \varkappa_1 a_1^+, \quad b_1^+ = -\alpha_4 \alpha_3^{-1} a_1^+.$$

Тогда на поверхностях включения вблизи точки $x = l$ контактные напряжения имеют представления

$$\begin{aligned}
\sigma_y^+(x) - i\tau_{xy}^+(x) &= \frac{N_{\text{I}}^+ - iN_{\text{II}}^+}{\sqrt{\pi}(l-x)^{1/2-i\beta_1}} + O(1), & \sigma_y^-(x) - i\tau_{xy}^-(x) &= \frac{N_{\text{I}}^- - iN_{\text{II}}^-}{\sqrt{\pi}(l-x)^{1/2+i\beta_2}} + O(1), \\
x &\rightarrow l-0,
\end{aligned}$$

$$N_{\text{I}}^+ - iN_{\text{II}}^+ = -i\sqrt{\pi\varkappa_1^{-1}}(1 + \varkappa_1)a_1^+ B_1, \quad N_{\text{I}}^- - iN_{\text{II}}^- = -i\sqrt{\pi\varkappa_2}(1 + \mu_*\varkappa_1)a_2^- B_2,$$

такие же как вблизи вершины штампа, жестко сцепленного со средой [13]. Величины N_{I}^+ , N_{II}^+ и N_{I}^- , N_{II}^- будем называть коэффициентами интенсивности напряжений вблизи точек $z = l + i0$ и $z = l - i0$ соответственно. В случае штампа, жестко сцепленного с границей верхней полуплоскости на участке $[0, l]$ при отсутствии нижней полуплоскости, коэффициенты интенсивности напряжений вблизи правой вершины $z = l$ штампа, определяемые равенством

$$N_{\text{I}}^* - iN_{\text{II}}^* = \sqrt{\pi} \lim_{x \rightarrow l-0} (l-x)^{1/2-i\beta_1} [\sigma_y^+(x) - i\tau_{xy}^+(x)],$$

в соответствии с решением основной смешанной задачи теории упругости для полуплоскости [13] находятся по формуле

$$N_{\text{I}}^* - iN_{\text{II}}^* = -i\sqrt{\pi\varkappa_1^{-1}} [(1 + \varkappa_1)(A_0^* + A_1^* l + R_*(l)) + (2\beta_1 - i)l\mu_1 \varepsilon_*] l^{-1/2-i\beta_1},$$

где

$$A_0^* = -\frac{X_0 + iY_0}{2\pi} - \left(\frac{1}{2} - i\beta_1\right) \frac{l\sigma_{x1}^\infty}{4}, \quad A_1^* = \frac{\sigma_{x1}^\infty}{4},$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_* \mu_1 &= \left(M_0 + (1 + \varkappa_1) \int_0^l x \operatorname{Re} [(A_0^* + A_1^* x + R_*(x)) \chi_*^+(x)] dx + \mu_1 (1 + \varkappa_1^{-1}) \int_0^l x s'_{*1}(x) dx \right) \times \\
&\quad \times \left(2 \int_0^l x \operatorname{Im} \left[\left(\left(\frac{1}{2} - i\beta_1 \right) l - x \right) \chi_*^+(x) \right] dx \right)^{-1},
\end{aligned}$$

$$R_*(z) = \frac{\mu_1}{\pi i \varkappa_1} \int_0^l \frac{s'_{*1}(x) + i s'_{*2}(x)}{\chi_*^+(x)(x-z)} dx, \quad \chi_*^+(x) = -\frac{i}{\sqrt{\varkappa_1 x(l-x)}} \left(\frac{l-x}{x} \right)^{i\beta_1},$$

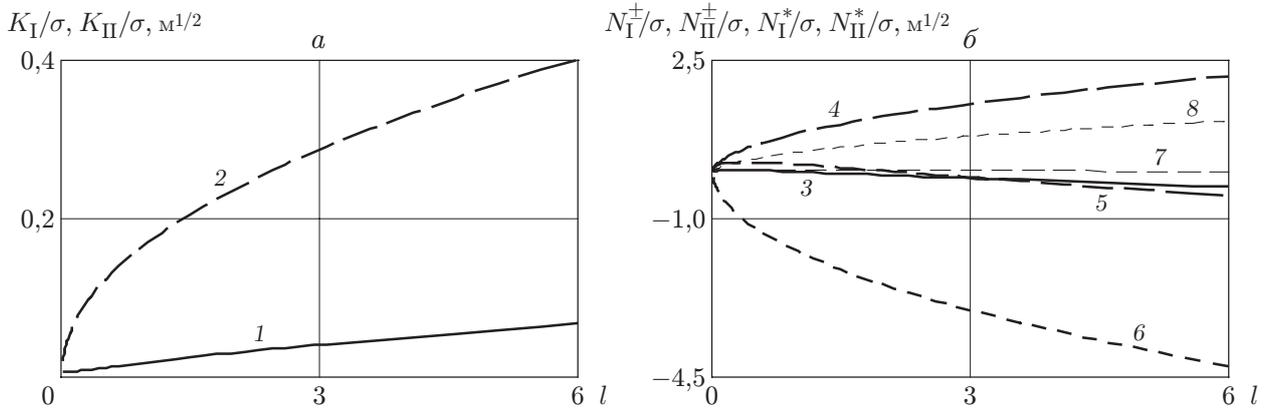


Рис. 1. Зависимости коэффициентов K_I, K_{II} вблизи левой вершины включения (а), коэффициентов N_I^\pm, N_{II}^\pm вблизи точек $z = l \pm i0$ и коэффициентов N_I^*, N_{II}^* (б) от длины включения l при $\nu_1 = 0,3, \nu_2 = 0,2, \mu_* = \mu_2/\mu_1 = 2$:
 1 — $K_I/\sigma, 2 — K_{II}/\sigma, 3 — N_I^+/\sigma, 4 — N_{II}^+/\sigma, 5 — N_I^-/\sigma, 6 — N_{II}^-/\sigma, 7 — N_I^*/\sigma, 8 — N_{II}^*/\sigma$

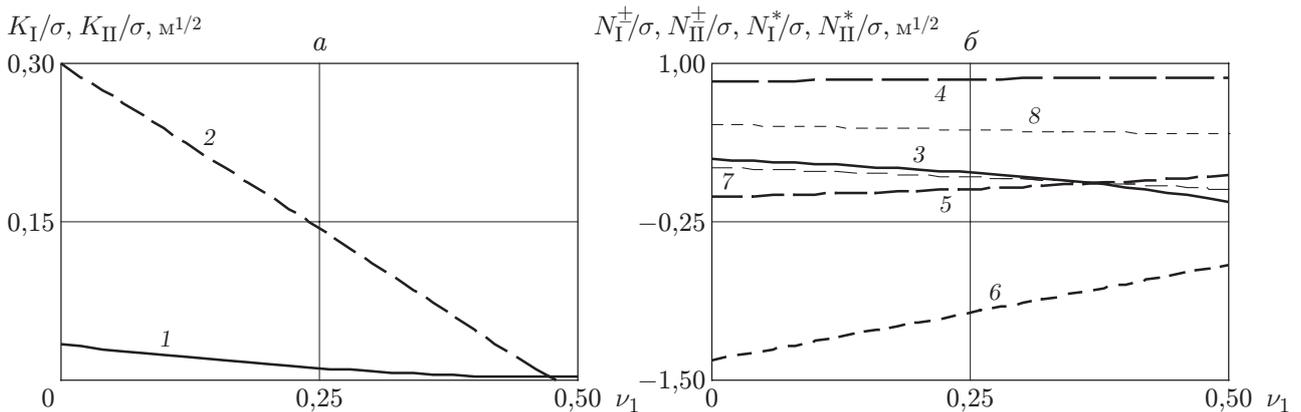


Рис. 2. Зависимости коэффициентов K_I, K_{II} вблизи левой вершины включения (а), коэффициентов N_I^\pm, N_{II}^\pm вблизи точек $z = l \pm i0$ и коэффициентов N_I^*, N_{II}^* (б) от коэффициента Пуассона ν_1 материала верхней полуплоскости при $l = 1, \nu_2 = 0,2, \mu_* = 1$ (обозначения те же, что на рис. 1)

ε_* — угол поворота штампа; $s_{*1}(x)$ — функция, определяющая натяг для точек полуплоскости при соединении ее со штампом; $s_{*2}(x)$ — функция, описывающая форму основания штампа.

4. Численные расчеты. Рассматривается прямолинейное включение, присоединенное к телу без натяга: $s_1^\pm(x) = 0, s_2^\pm(x) = 0$. На рис. 1, 2 приведены зависимости коэффициентов интенсивности напряжений K_I, K_{II} вблизи левой вершины $z = 0$ включения и коэффициентов N_I^\pm, N_{II}^\pm вблизи точек $z = l \pm i0$ от длины включения l и коэффициента Пуассона ν_1 верхней полуплоскости в случае растяжения плоскости на бесконечности продольными напряжениями $\sigma_{x1}^\infty = \sigma, \sigma_{x2}^\infty = \sigma\mu_2(1 + \nu_1)/[\mu_1(1 + \nu_2)]$ при отсутствии напряжений на берегах трещины и исходных нагрузок X_0, Y_0, M_0 . Значения N_I^*/σ и N_{II}^*/σ (кривые 7, 8) соответствуют штампу с прямолинейным основанием, вдавливаемому в верхнюю полуплоскость при отсутствии нижней. Расчеты показывают, что значения $N_I^+/\sigma, N_I^-/\sigma, N_I^*/\sigma$ (кривые 3, 5, 7) приближенно равны и существенно меньше значений $N_{II}^+/\sigma, N_{II}^-/\sigma, N_{II}^*/\sigma$. В свою очередь значения коэффициентов интенсивности напряжений N_{II}^+, N_{II}^-

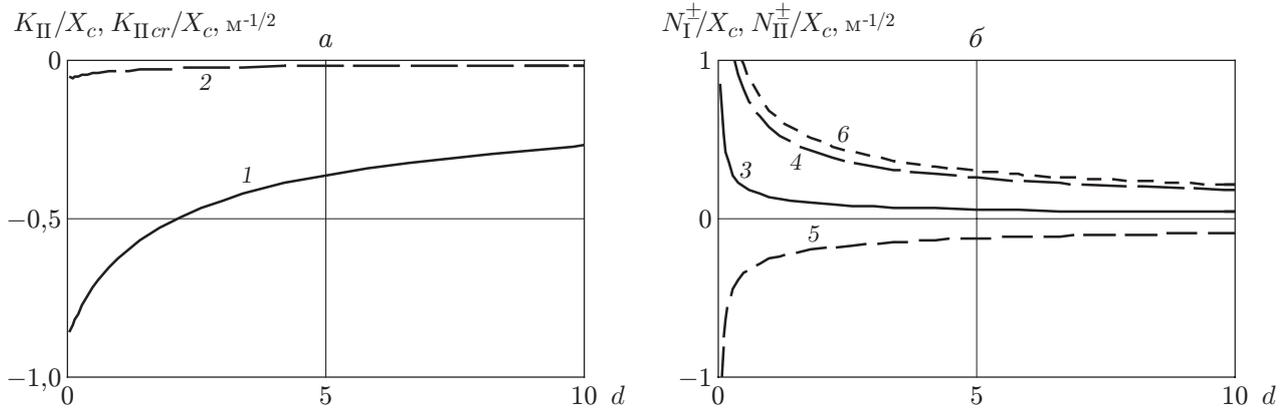


Рис. 3. Зависимости коэффициентов K_{II}/X_c , K_{IIcr}/X_c (а) и коэффициентов N_I^{\pm}/σ , N_{II}^{\pm}/σ вблизи правого конца включения (б) от расстояния d :
 1 — K_{II}/X_c , 2 — K_{IIcr}/X_c , 3 — N_I^+/X_c , 4 — N_{II}^+/X_c , 5 — N_I^-/X_c , 6 — N_{II}^-/X_c

(кривые 4, 6) вблизи правого конца включения по модулю больше значения коэффициента интенсивности напряжений N_{II}^* (кривая 8) вблизи соответствующей вершины штампа.

На рис. 3 приведены зависимости коэффициентов K_{II} , K_{IIcr} и N_I^{\pm} , N_{II}^{\pm} от расстояния d между правой вершиной включения $x = l$ и точкой $x = l + d$ в случае приложения в точках $x = l + d + i0$ и $x = l + d - i0$ ($d > 0$) горизонтальных сдвиговых сосредоточенных сил $F_c = X_c$ и $-F_c = -X_c$ соответственно при отсутствии других нагрузок. Расчеты показали, что в данном случае коэффициенты K_I , K_{Icr} близки к нулю, а коэффициент интенсивности напряжений K_{II} вблизи левой вершины включения значительно меньше соответствующего коэффициента K_{IIcr} вблизи вершины полубесконечной трещины $[0; \infty)$. Этот результат свидетельствует о том, что впаянное в вершину трещины тонкое жесткое включение оказывает упрочняющее воздействие.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бережницкий Л. Т., Стащук Н. Г.** Коэффициенты интенсивности напряжений возле трещины на продолжении линейного жесткого включения // Докл. АН УССР. Сер. А. 1981. № 11. С. 49–53.
2. **Акопян В. Н., Симонян А. Р.** О плоскодеформированном состоянии ортотропной плоскости с разрезами // Изв. НАН Армении. Механика. 2011. Т. 64, № 2. С. 4–14.
3. **Черепанов Г. П.** Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983.
4. **Черепанов Г. П.** Решение одной линейной краевой задачи Римана для двух функций и ее приложение к некоторым смешанным задачам плоской теории упругости // Прикл. математика и механика. 1962. Т. 26, вып. 5. С. 907–912.
5. **Нуллер Б. М.** Контактные задачи для системы упругих полуплоскостей // Прикл. математика и механика. 1990. Т. 54, вып. 2. С. 302–306.
6. **Зверович Э. И.** Краевые задачи теории аналитических функций в гельдеровских классах на римановых поверхностях // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26, вып. 1. С. 113–179.
7. **Хвоцинская Л. А.** К проблеме Римана в случае произвольного числа особых точек // Краевые задачи, специальные функции и дробное исчисление: Тр. Междунар. конф., Минск, 16–20 февр. 1996 г. Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1996. С. 377–382.
8. **Craster R. V., Obnosov Yu. V.** A model four-phase square checkerboard structure // Quart. J. Mech. Appl. Math. 2006. V. 59, N 1. P. 1–27.

9. **Antipov Y. A.** Subsonic semi-infinite crack with a finite friction zone in a bimaterial // J. Mech. Phys. Solids. 2009. V. 57, N 12. P. 1934–1957.
10. **Васильева Ю. О., Сильвестров В. В.** Задача о межфазной трещине с жесткой накладкой на части ее берега // Прикл. математика и механика. 2011. Т. 75, вып. 6. С. 1017–1037.
11. **Бережницкий Л. Т., Панасюк В. В., Труш И. И.** Коэффициенты интенсивности напряжений возле жестких остроугольных включений // Пробл. прочности. 1973. № 7. С. 3–7.
12. **Ballarini R. A.** A rigid line inclusion at a bimaterial interface // Engng Fract. Mech. 1990. V. 37. P. 173–182.
13. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.

Поступила в редакцию 12/III 2014 г.
