

УДК 532.592; 551.537

ВЛИЯНИЕ ВЯЗКОСТИ НА ВОЛНОВОЙ ПРОЦЕСС В НЕОДНОРОДНОМ ПОТОКЕ С КРИТИЧЕСКИМ УРОВНЕМ

В. А. Павлов

Санкт-Петербургский государственный университет, 198904 Санкт-Петербург

Построено непрерывное аналитическое представление акустико-гравитационного поля в среде с неоднородным потоком при наличии критического слоя. Показано, что учет влияния вязкости устраняет сингулярные значения поля.

Неоднородный поток (ветер) формирует специфическую пространственную структуру акустико-гравитационных волн [1–3]. В частности, возможно образование области с так называемым критическим уровнем. В линейном приближении без учета диссипации скорость и плотность среды на этом уровне обращаются в бесконечность. Энергия возмущенного поля в бесконечно тонком слое также становится бесконечной. В такой ситуации необходима корректировка используемой модели. Одна из возможностей «устранения» бесконечностей связана с учетом диссипации. Это увеличивает порядок системы уравнений, в результате чего возникает «сингулярно возмущенная задача» [4]. Слабая диссипация обуславливает появление малого параметра — коэффициента при старшей производной. Аналитическому исследованию пространственной структуры акустико-гравитационной волны в такой ситуации посвящена данная работа.

Волновой процесс описывается линейной системой уравнений газовой динамики, учитывающей вязкую диссипацию:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho_0(z) \operatorname{div} \mathbf{v}' &= 0, & \rho_0(z) \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \nabla P' - \rho' g \mathbf{e}_z + \eta \Delta \mathbf{v}' + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla \operatorname{div} \mathbf{v}', \\ \frac{dP}{dt} - a_0^2 \frac{d\rho}{dt} &= 0, & P &= P_0(z) + P', & \rho &= \rho_0(z) + \rho', & \mathbf{v} &= v_0(z) \mathbf{e}_x + \mathbf{v}'. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь и ниже ρ , P , \mathbf{v} — плотность, давление, скорость; η , ζ — коэффициенты вязкости (полагаются постоянными); g — ускорение свободного падения; x , z — декартовы координаты; t — время; $a_0 = (\gamma P_0 \rho_0^{-1})^{1/2}$ — скорость звука; γ — отношение удельных теплоемкостей. Индекс 0 и штрих соответствуют параметрам среды в невозмущенном состоянии и их возмущениям.

Невозмущенное состояние среды при $\eta \neq 0$ характеризуется соотношениями

$$\begin{aligned} P_0(z) &= P_0(0) \exp(-zH^{-1}), & \rho_0(z) &= \rho_0(0) \exp(-zH^{-1}), & H &= a_0^2 g^{-1} \gamma^{-1}, \\ v_0(z) &= w_0 z_0^{-1} (z - z_0), & z_1 &= z_0 w_0^{-1} (w_0 + \omega k^{-1}). \end{aligned}$$

Исследуем двумерную акустико-гравитационную волну, возбуждаемую распределением вертикальной компоненты скорости среды на уровне $z = \text{const}$ в виде стационарной волны

$$v_z(t, x) = v_z(z) \exp(-i\omega t + ikx), \quad (2)$$

распространяющейся вдоль направления \mathbf{x} со скоростью ωk^{-1} . Поскольку свойства среды в невозмущенном состоянии не зависят от горизонтальной координаты x , то вдоль направления \mathbf{x} возмущение также будет стационарным. Полную производную d/dt в (1) можно представить в виде

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = ika_0s(z)\mathbf{f}' + v'_z \frac{d\mathbf{f}_0}{dz}, \quad s(z) \equiv a_0^{-1}[v_0(z) - \omega k^{-1}] = \delta_0 z_1^{-1}(z - z_1).$$

Рассмотрим случай, когда граничное условие (2) задается на уровне ниже z_1 .

С учетом вязкости ($\eta \neq 0$, $\zeta \neq 0$) систему уравнений (1) представим в виде четырех связанных уравнений для v'_x , v'_z , ρ' , P' :

$$\rho' = \frac{\rho_0}{a_0s} \left[\frac{i}{k} \left(\frac{d}{dz} - \frac{1}{H} \right) v'_z - v'_x \right]; \quad (3)$$

$$v'_x - \frac{i\nu_1s}{1-s^2+i\nu_2s} \frac{d^2v'_x}{dz^2} = \frac{i}{k(1-s^2+i\nu_2s)} \left[\frac{d}{dz} - \frac{1}{\gamma H} - \frac{sw_0}{a_0z_0} + i\nu_3s \frac{d}{dz} \right] v'_z; \quad (4)$$

$$ika_0\rho_0sv'_z = -\frac{dP'}{dz} - g\rho' + \left(\zeta + \frac{\eta}{4} \right) \frac{d^2v'_z}{dz^2} - nk^2v'_z + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \frac{dv'_x}{dz}; \quad (5)$$

$$ika_0s(P' - a_0^2\rho') - v'_z \frac{\gamma-1}{\gamma} a_0^2 \frac{d\rho_0}{dz} = 0, \quad (6)$$

где ν_n ($n = 1, 2, 3$) — безразмерные малые параметры, $\nu_1 \equiv \eta ka_0^{-1} \rho_0^{-1}$, $\nu_2 \equiv (\zeta + 4\eta/3)ka_0^{-1} \rho_0^{-1}$, $\nu_3 \equiv (\zeta + \eta/3)a_0^{-1} \rho_0^{-1}$. При $\nu_n = 0$ порядок системы (3)–(6) понижается, поля v'_x , v'_z , ρ' , P' выражаются через функцию $\Phi(z)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} + D^2(z)\Phi = 0, \quad (7)$$

$$D^2(z) = \frac{\omega_1^2}{a_0^2s^2} - k^2(1-s^2) - \frac{1}{4H^2} - \frac{1}{Ha_0s(1-s^2)} \frac{2-\gamma}{\gamma} \frac{w_0}{z_0} - \frac{3}{a_0^2(1-s^2)^2} \frac{w_0^2}{z_0^2},$$

$$v'_z = \sqrt{1-s^2} \exp(z/(2H))\Phi(z) \exp(-i\omega t + ikx),$$

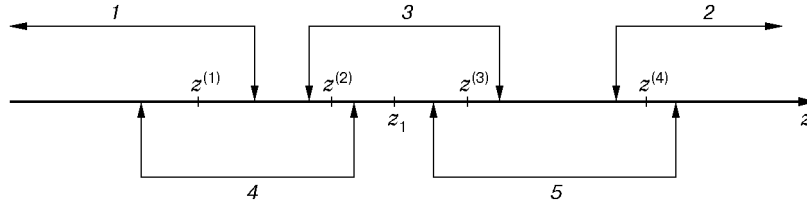
$$v'_x = \frac{i}{k(1-s^2)} \left(\frac{d}{dz} - \frac{1}{\gamma H} - \frac{sw_0}{a_0z_0} \right) v'_z, \quad P' = -\frac{i\rho_0}{k(1-s^2)} \left[a_0s \frac{d}{dz} - \frac{w_0}{z_0} - \frac{a_0s}{\gamma H} \right] v'_z,$$

$$\rho' = \frac{\rho_0}{ika_0s} \left[\frac{s}{1-s} \frac{d}{dz} + \frac{\gamma-1-\gamma s^2}{\gamma H(1-s^2)} - \frac{sw_0}{a_0(1-s^2)z_0} \right] v'_z, \quad \omega_1^2 = \frac{(\gamma-1)g^2}{a_0^2}.$$

В случае $z \rightarrow z_1$ $s(z) \rightarrow 0$. Пренебрегая диссипацией, получим оценки полей $P' \sim v'_z \sim (z-z_1)^{1-\alpha}$, $\rho' \sim v'_x \sim (z-z_1)^{-\alpha}$, где $\alpha \equiv [1+(1-4R_i)^{1/2}]/2$; $R_i \equiv 4((\gamma-1)/\gamma)(a_0^2/H^2)(z_0^2/w_0^2)$. Если $4R_i < 1$, то $v'_x \rightarrow \infty$, $\rho' \rightarrow \infty$, и при $z \rightarrow z_1$ нарушаются условия линеаризации системы уравнений газовой динамики. Слой в окрестности $z = z_1$ называется критическим.

Ось z разобьем на пять зон (см. рисунок). В зонах 1 ($z \ll z_1$) и 2 ($z \gg z_1$) строим «внешнее» представление поля на основе приближения (7) (ниже множитель $\exp(-i\omega t + ikx)$ опускаем):

$$v_z^{(1)} \approx A^{(1)} \sqrt{1-s^2} \exp\left(\frac{z}{2H}\right) \Phi^{(1)}(z), \quad v_z^{(2)} \approx A^{(2)} \sqrt{1-s^2} \exp\left(\frac{z}{2H}\right) \Phi^{(1)}(z),$$



где $\Phi^{(1)}(z)$ — решение уравнения (6), удовлетворяющее условию

$$\Phi^{(1)} \sim \exp\left(-i \int_z D(z') dz'\right)$$

при $z \rightarrow \infty$, $\text{Re } D > 0$.

Коэффициент $A^{(1)}$ находится из граничного условия (2), а $A^{(2)}$ определяется ниже из условия сшивания полей в соседних зонах. В зоне 3 ($z \approx z_1$) строим «внутреннее» представление полей, обладающее свойством конечности, на основе системы (3)–(6) при $\nu_n \ll 1$, $|s(z)| \ll 1$.

Если при $z \rightarrow z_1$ выполняется условие

$$\left|\frac{\rho'}{\rho_0}\right| \gg \left|\frac{v'_z}{sa_0}\right| \frac{\gamma - 1}{\gamma k H}, \quad (8)$$

то согласно (6) $P' \approx a_0^2 \rho'$. Уравнение (5) представим в виде

$$\frac{d\rho'}{dz} + \frac{\rho'}{\gamma H} \approx q_1(z, \nu_n),$$

где

$$q_1(z, \nu_n) \equiv -ika_0^{-1} \rho_0 s v'_z + \left(\zeta + \frac{4\eta}{3}\right) a_0^{-2} \frac{d^2 v'_z}{dz^2} - \eta a_0^{-2} k^2 v'_z + ika_0^{-2} \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right) \frac{dv'_x}{dz}.$$

Если

$$|q_1| \ll |\rho' \gamma^{-1} H^{-1}|, \quad (9)$$

то

$$\rho' \approx A^{(3)} \exp\left(-\frac{z - z_1}{\gamma H}\right); \quad (10)$$

$$P' \approx A^{(3)} a_0^{-2} \exp\left(-\frac{z - z_1}{\gamma H}\right). \quad (11)$$

При $z \rightarrow z_1$ уравнение (4) упростится:

$$\frac{i}{k} \frac{dv'_z}{dz} - v'_x \approx -\frac{i\nu_1 s}{k^2} \frac{d^2 v'_x}{dz'^2} + q_2, \quad (12)$$

где $q_2 \equiv -\frac{i}{k} \left[-\frac{1}{\gamma H} - \frac{sw_0}{a_0 z_0} + i\nu_3 s \frac{d}{dz} \right] v'_z$.

Ограничимся случаем, когда справедливо условие

$$|q_2| \ll \left| \frac{\nu_1 s}{k^2} \frac{d^2 v'_x}{dz'^2} \right|. \quad (13)$$

С учетом (12), (13) из (3) находим

$$\rho' \approx \frac{\rho_0}{a_0 s} \left[-\frac{i\nu_1 s}{k^2} \frac{d^2 v'_x}{dz'^2} - \frac{i}{kH} v'_z \right], \quad (14)$$

при этом считаем, что

$$\left| \frac{v'_z}{kHs} \right| \ll \left| \frac{v'_z}{k^2} \frac{d^2 v'_x}{dz^2} \right|. \quad (15)$$

Согласно (10), (14), (15) имеем

$$\frac{d^2 v'_x}{dz^2} \approx ia_0 k^2 \nu_1^{-1} A^{(3)} \rho_0^{-1}(0) \exp\left(\frac{z}{H} - \frac{z - z_1}{\gamma H}\right),$$

при $z \rightarrow z_1$

$$v'_x \approx ia_0 k^2 A^{(3)} [2\nu_1 \rho_0(z_1)]^{-1} (z - z_1)^2. \quad (16)$$

В силу (12) получаем

$$v'_z \approx ika_0 \delta_0 [2z_1 \rho_0(z_1)]^{-1} A^{(3)} (z - z_1)^2. \quad (17)$$

Условия (8), (9), (13), (15) ограничивают размер области применимости «внутреннего» представления (10), (11), (16), (17): $|z - z_1| \ll 2H$. Следует отметить, что выполняется соотношение $v'_x \sim \nu_1^{-1}$, при этом $\nu_1 \ll 1$, $|v'_x/v'_z| \approx |kz_1/(\nu_1 \delta_0)|$. При $z \rightarrow z_1$, $\nu_1 \neq 0$ отсутствует сингулярность полей v'_x , ρ' . Таким образом, появился второй неопределенный параметр $A^{(3)}$.

Для исследования полей в «промежуточных» зонах 4 и 5 введем новую безразмерную переменную $y \equiv (z - z_1)/\mu(\nu_1)$, такую что $\mu(\nu_1) \rightarrow 0$ при $\nu_1 \rightarrow 0$; $y \approx 1$; $\mu\nu_1^{-1} \rightarrow \infty$.

Поле $f(y, \mu)$ представим в виде разложения

$$f(y, \mu) \approx \mu^{-1} f_{-1}(y) + f_0(y) + \mu f_1(y) + \dots, \quad \mu(\nu_1) \rightarrow 0, \quad \nu_1 \rightarrow 0.$$

Уравнение (6) с учетом (3), (4) запишем в виде

$$P' = \frac{\eta}{ik\mu^2} \frac{d^2 v'_x}{dy^2} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right) \mu^{-1} \frac{dv'_z}{dy} - a_0 \rho_0 \left(\mu \frac{\delta_0}{z_1} y - i\nu_2\right) v'_x - \frac{\rho_0 w_0}{ikz_0} v'_z. \quad (18)$$

Уравнение (4) устанавливает связь между $v'_x(y, \mu)$ и $v'_z(y, \mu)$:

$$v'_x - \frac{i}{k\mu} \frac{dv'_z}{dy} = -\frac{i}{\gamma kH} v'_z [1 + O(\mu)]. \quad (19)$$

Согласно (3), (19) получим соотношение

$$\rho' = -\frac{i\rho_0(z_1)z_1(\gamma - 1)}{a_0 \delta_0 kH \gamma \mu y} v'_z [1 + O(\mu)]. \quad (20)$$

Из (18), (19) находим зависимость $P'(v'_z)$

$$P' = \left[\frac{\eta}{\mu^3} k^{-2} \frac{d^3 v'_z}{dy^3} - \frac{ia_0 \rho_0(z_1) \delta_0}{kz_1} y \frac{dv'_z}{dy} + \frac{i\rho_0(z_1) w_0}{kz_0} v'_z \right] [1 + O(\mu)]. \quad (21)$$

Таким образом, получены соотношения (19)–(21), позволяющие найти v'_x , ρ' , P' с точностью до $O(\mu)$, если определена функция v'_z . Уравнение (6) упрощается:

$$\frac{dP'}{dy} = g\mu\rho' [1 + O(\mu)], \quad (22)$$

и с учетом (20)–(22) получается уравнение четвертого порядка для $v'_z(y, \mu)$. Если взять $\mu(\nu_1) = z_m \nu_1^{1/3}$ ($m = 4$ для зоны 4, $m = 5$ для зоны 5), то функция v'_z не будет зависеть от параметра μ :

$$\frac{d^4 v'_z(y)}{dy^4} - iB_1^{(m)} y \frac{d^2 v'_z(y)}{dy^2} - iB_2^{(m)} \frac{dv'_z(y)}{dy} - iB_3^{(m)} y^{-1} v'_z(y) \approx 0, \quad (23)$$

где $B_1^{(m)} = \delta_0 k^2 z_m^3 z_1^{-1}$; $B_2^{(m)} = B_1^{(m)} (1 - \delta_0^2)$; $B_3^{(m)} = (\gamma - 1) k^2 z_m^3 z_1 / (\gamma^2 \delta_0 H^2)$.

В зонах 4, 5 имеем

$$(v'_z)^{(m)} \approx \sum_{n=1}^4 C_n^{(m)} F_n^{(m)}(y), \quad (24)$$

где $F_n^{(m)}$ ($n = 1, 2, 3, 4$; $m = 4, 5$) — линейно независимые решения уравнения (23).

В выражении (24) содержится 10 произвольных параметров $C_n^{(m)}$, z_m ($n = 1, 2, 3, 4$; $m = 4, 5$). Промежуточные представления в зонах 4, 5 имеют вид

$$\begin{aligned} v'_z &\approx \varphi_0(y) + \mu\varphi_1(y) + \mu^2\varphi_2(y) + \dots, \\ v'_x &\approx \mu^{-1}\psi_{-1}(y) + \psi_0(y) + \mu\psi_1(y) + \dots, \quad \psi_{-1} = -\frac{i}{k} \frac{d\varphi_0}{dy}, \\ \rho' &\approx \mu^{-1}f_{-1}(y) + f_0(y) + \mu f_1(y) + \dots, \quad f_{-1} = -\frac{i\rho_0(z_1)kz_1(\gamma-1)}{a_0\delta_0kH\gamma} \frac{\varphi_0(y)}{y}, \\ P' &\approx \Phi_0(y) + \mu\Phi_1(y) + \mu^2\Phi_2(y) + \dots, \quad \mu(\nu_1) \rightarrow 0, \quad \nu_1 \rightarrow 0, \\ \Phi_0 &= \frac{a_0\rho_0(z_1)}{k^3z_m^3} \frac{d^3\varphi_0}{dy^3} - \frac{i\mu\rho_0(z_1)\delta_0}{kz_1} y \frac{d\varphi_0}{dy} + \frac{i\rho_0(z_1)w_0}{kz_0} \varphi_0. \end{aligned}$$

Сшивание полей v'_x , v'_z , ρ' , P' осуществляется одновременно на четырех уровнях $z^{(1)}$, $z^{(2)}$, $z^{(3)}$, $z^{(4)}$ (см. рисунок) с учетом первых членов разложения φ_0 , ψ_{-1} , f_{-1} , Φ_0 . При этом имеем 16 уравнений для определения 16 параметров: $z^{(n)}$ ($n = 1, \dots, 4$), $z^{(m)}$ ($m = 4, 5$), $C_n^{(m)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$. В точках сшивания возможны разрывы производных.

Таким образом, учет диссипации приводит к устранению бесконечных значений полей v'_x , ρ' при $z = z_1$ (см. (14), (16), (17)). Использование «внутренних» и «внешних» разложений позволяет построить непрерывное представление полей v'_x , v'_z , ρ' , P' .

ЛИТЕРАТУРА

1. Госсард Э., Хук У. Волны в атмосфере. М.: Мир, 1978.
2. Дикий Л. А. Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1976.
3. Павлов В. А. О влиянии неоднородного ветра на распространение акустико-гравитационных волн // Проблемы дифракции и распространения волн: Сб. науч. тр. / Под ред. Э. М. Гюнниной. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1983. Вып. 19. С. 16–30.
4. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972.

Поступила в редакцию 23/XI 1998 г.,
в окончательном варианте — 11/III 1999 г.