

УДК 532.542.2

СВОЙСТВО ВЗАИМНОСТИ ДЛЯ РАССЛОЕННЫХ ЛАМИНАРНЫХ ПОТОКОВ В КАНАЛАХ С ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

П. И. Гешев

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: geshev@itp.nsc.ru

Рассмотрено расслоенное ламинарное течение нескольких жидкостей в канале произвольной формы. Считается, что гидростатическая задача нахождения свободных границ между разными жидкостями решена и области, в которых движутся отдельные жидкости, известны. В предположении, что движение среды возникает под действием приложенного градиента давления и объемных сил тяжести (или сил инерции), доказано в общем виде свойство взаимности между приложенными силами F_j и потоками разных компонентов Q_i , проявляющееся в симметрии матрицы коэффициентов расхода L_{ij} ($Q_i = L_{ij}F_j$). Представлены общие симметричные решения задачи для плоского канала и круглой трубы. Получены формулы для коэффициента увеличения расхода жидкости за счет наличия пристенного слоя газа. Показано, что при частичном заполнении канала расход воды может на порядок превышать расход при его полном заполнении.

Ключевые слова: симметрия, свойство взаимности, коэффициенты расхода, ламинарное течение, уравнение Навье — Стокса, функция Грина, теорема Грина.

В последнее время в связи с развитием микро- и нанофлюидики возрос интерес к исследованию расслоенных течений несмешивающихся жидкостей в микроканалах [1, 2]. Эти течения используются в разделительных мембранных технологиях, при эксплуатации тепловых труб и насосов, в теплообменниках на микросхемах, в аналитических устройствах, применяемых в биологии и медицине [1, 2]. На шероховатых стенках из гидрофобного материала поток жидкости движется над микрокавернами с ненулевой средней скоростью скольжения на стенке, что приводит к уменьшению касательного напряжения трения [3–5] и увеличению расхода жидкости [6]. В пленках жидкости, текущих над такими стенками, возникает дополнительная неустойчивость и возможен разрыв [7].

В данной работе доказано свойство взаимности расслоенных многофазных потоков в канале с поперечным сечением произвольной формы. Построены примеры для N потоков в плоском канале и круглой трубе (рис. 1). В этих примерах для потоков воды и воздуха зафиксировано увеличение расхода жидкости.

Силы, приводящие в движение компоненты (или фазы) потока, могут иметь различный характер (силы давления, силы тяжести или электрические силы, действующие на объемно распределенные заряды (ионы)) [1, 2]. Рассмотрим общий случай течения N

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ.

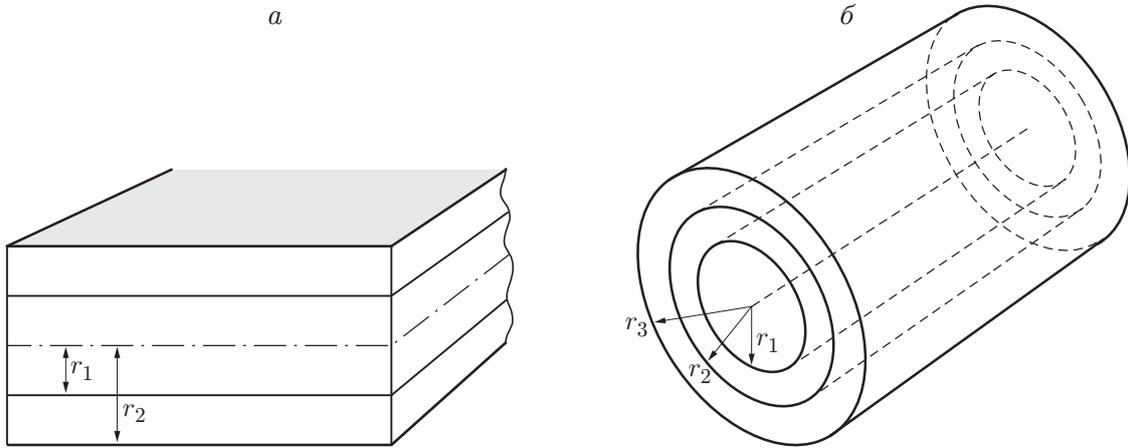


Рис. 1. Расположение слоев жидкостей в плоском канале (а) и круглой трубе (б)

несмешивающихся жидкостей в канале с произвольной внешней границей Γ . Пусть плотность и вязкость i -го компонента есть ρ_i и μ_i соответственно. Плотность объемных сил, действующих в области S_i , определяется по формуле

$$F_i = \rho_i g_z - \frac{\partial p}{\partial z},$$

где z — продольная координата вдоль оси канала; p — общее давление в канале, одинаковое в данном сечении для всех жидкостей; g_z — проекция силы тяжести на ось канала. Сила F_i действует непосредственно на i -ю жидкость в области S_i , и через сопряженные граничные условия на границе i -й и j -й жидкостей влияние этой силы передается на остальные компоненты с $i \neq j$. В силу линейности задачи расход жидкости в i -м канале определяется линейным соотношением

$$Q_i = \sum_{j=1}^N L_{ij} F_j, \quad (1)$$

где L_{ij} — некоторая матрица коэффициентов расхода. Формула (1) аналогична формуле, связывающей обобщенные термодинамические силы и потоки в неравновесной термодинамике Онзагера [8]. В теории Онзагера матрица феноменологических коэффициентов симметрична по индексам. В статистической физике свойство симметрии матрицы Онзагера доказывается строго. Это свойство обусловлено обратимостью движения на микроуровне, т. е. инвариантностью гамильтоновых уравнений движения молекул относительно обращения времени. Докажем симметрию матрицы коэффициентов расхода, т. е. свойство взаимности в общем виде

$$L_{ij} = L_{ji},$$

на основе динамических уравнений движения вязкой жидкости.

Пусть i -й компонент имеет вязкость μ_i и поле скорости $u_i(\mathbf{x})$ в области $\mathbf{x} \in S_i$. Из стационарного уравнения Навье — Стокса для установившегося течения в прямолинейном канале следует система N уравнений Пуассона

$$\mu_i \Delta u_i = -F_i \quad (\mathbf{x} \in S_i, \quad i = 1, \dots, N). \quad (2)$$

На границе Γ_{ij} , разделяющей две соседние области S_i и S_j , выполняются граничные условия, т. е. условия равенства скоростей и касательных напряжений:

$$u_i = u_j \quad (\mathbf{x} \in \Gamma_{ij}); \quad (3)$$

$$\mu_i \frac{\partial u_i}{\partial n} = \mu_j \frac{\partial u_j}{\partial n} \quad (\mathbf{x} \in \Gamma_{ij}). \quad (4)$$

На внешней границе канала Γ скорость жидкости удовлетворяет условию прилипания

$$u_i = 0 \quad (\mathbf{x} \in \Gamma). \quad (5)$$

Доказательство симметрии матрицы L_{ij} проведем на основе обобщенной функции Грина для граничной задачи первого рода для уравнения Пуассона:

$$\nabla_{\xi} [\mu(\xi) \nabla_{\xi} G(\xi, \mathbf{x})] = -\delta(\xi - \mathbf{x}) \quad (6)$$

($\mu(\xi)$ — вязкость жидкости в точке ξ ; $\delta(\xi - \mathbf{x})$ — дельта-функция Дирака). В предположении, что функция Грина удовлетворяет нулевому граничному условию на границе канала

$$G(\xi, \mathbf{x}) = 0 \quad (\xi \in \Gamma), \quad (7)$$

докажем соотношение взаимности для функции Грина

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x}). \quad (8)$$

Для этого рассмотрим уравнение (6) с источником, помещенным в точку \mathbf{y} :

$$\nabla_{\xi} [\mu(\xi) \nabla_{\xi} G(\xi, \mathbf{y})] = -\delta(\xi - \mathbf{y}). \quad (9)$$

Умножим уравнение (6) на $G(\xi, \mathbf{y})$, а уравнение (9) — на $G(\xi, \mathbf{x})$, вычтем из первого уравнения второе, преобразуем полученное уравнение к дивергентной форме и проинтегрируем разность по сечению канала. Используя теорему Гаусса, получаем

$$G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \oint_{\Gamma} \mu(\xi) \left(G(\xi, \mathbf{y}) \frac{\partial G(\xi, \mathbf{x})}{\partial n} - G(\xi, \mathbf{x}) \frac{\partial G(\xi, \mathbf{y})}{\partial n} \right) dl_{\xi}. \quad (10)$$

Однако вследствие нулевого граничного условия (7) контурный интеграл в (10) обращается в нуль. Таким образом, соотношение взаимности (8) для обобщенной функции Грина доказано.

Рассмотрим уравнение (2) в виде

$$\nabla_{\xi} [\mu(\xi) \nabla_{\xi} u(\xi)] = -F(\xi), \quad (11)$$

где $F(\xi)$ — кусочно-постоянная функция со значениями F_i в областях S_i . С использованием формулы Грина представим общее решение уравнения (11) в виде

$$u(\mathbf{x}) = \iint G(\mathbf{x}, \xi) F(\xi) d^2 \xi. \quad (12)$$

При выводе представления (12) использовались теорема Грина и нулевые граничные условия для функций u , G на внешнем контуре Γ . Проинтегрировав по всем областям S_j ,

получаем полное решение

$$u_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N U_{ij}(\mathbf{x}) F_j \quad (\mathbf{x} \in S_i), \quad (13)$$

где матричное решение

$$U_{ij}(\mathbf{x}) = \iint_{S_j} G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d^2 \boldsymbol{\xi}$$

удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\mu_i \Delta U_{ij} = -\delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, N) \quad (14)$$

и сопряженным граничным условиям типа (3), (4) на Γ_{ij} или нулевым условиям (5) на внешнем контуре Γ . Интегрируя выражение (13) по области S_i , получаем расход

$$Q_i = \sum_{j=1}^N F_j \int_{S_i} U_{ij}(\mathbf{x}) d^2 \mathbf{x} = \sum_{j=1}^N L_{ij} F_j,$$

где $L_{ij} = \int_{S_i} \int_{S_j} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d^2 \mathbf{x} d^2 \mathbf{y}$ — матрица, симметричная в силу свойства взаимности (8).

В общем случае в силу произвольности функции $\mu(\boldsymbol{\xi})$ не существует аналитических формул для функции Грина $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$. Однако для кусочно-постоянных функций $\mu(\boldsymbol{\xi})$ систему уравнений (14) можно решить численно методом граничных интегральных уравнений.

Рассмотрим два частных случая, когда задача имеет точные аналитические решения. Это случаи вложенных друг в друга симметричных относительно срединной плоскости $2N - 1$ слоев в плоском канале и N кольцевых слоев в круглой трубе (см. рис. 1). Функция Грина для этих случаев записывается в виде

$$G(x, \xi) = \int_x^R \frac{H(\zeta - \xi)}{(2\pi\zeta)^m \mu(\zeta)} d\zeta,$$

где $H(\cdot)$ — ступенчатая функция Хевисайда; R — радиус трубы или полуширина канала; m — параметр (в случае плоского канала $m = 0$, в случае трубы $m = 1$).

Обозначим расстояние от центра канала ($x = 0$) до i -й границы раздела через r_i . Введем для плоского канала ширину i -го слоя $h_i = r_i - r_{i-1}$, а для круглой трубы — отношение площадей кругов $a_i = A_i/A_{i-1}$ ($A_i = \pi r_i^2$). Тогда решение для плоского канала принимает вид

$$u_i = U_i + (\tau_i + F_i r_i) \frac{x - r_i}{\mu_i} - \frac{F_i}{2\mu_i} (x^2 - r_i^2), \quad (15)$$

где τ_i , U_i — касательные напряжения трения и скорости на границах раздела соответственно:

$$\tau_i = - \sum_{k=1}^i f_k, \quad U_i = \sum_{n=i+1}^N \frac{h_n}{\mu_n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} f_k + \frac{f_n}{2} \right),$$

$f_k = F_k h_k$ — полная сила (на единицу площади стенок канала), действующая на k -й слой жидкости.

Проинтегрируем скорость u_i (15) по i -му слою и найдем отношение объемного расхода Q_i к ширине слоя h_i . В результате получаем среднюю скорость жидкости в этом слое

$$\bar{u}_i = U_i + \frac{h_i}{\mu_i} \left(\frac{1}{3} f_i + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{i-1} f_k \right). \quad (16)$$

Решение для круглой трубы имеет вид

$$v_i = V_i + \left(r_i \tau'_i + \frac{F_i A_i}{2\pi} \right) \frac{\ln(x/r_i)}{\mu_i} - \frac{F_i}{4\mu_i} (x^2 - r_i^2),$$

где τ'_i, V_i — константы, описывающие трение и скорость на границах раздела потоков ($x = r_i$) соответственно:

$$\tau'_i = -\frac{1}{2\pi r_i} \sum_{k=1}^i f'_k, \quad V_i = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=i+1}^N \frac{\lambda_n}{\mu_n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} f'_k + \chi_n f'_n \right).$$

Средняя скорость жидкости в i -м слое в трубе определяется по формуле

$$\bar{v}_i = V_i + \frac{\lambda_i}{4\pi\mu_i} \left(\psi_i f'_i + \chi_i \sum_{k=1}^{i-1} f'_k \right), \quad (17)$$

где $f'_i = F_i S_i$ — полная сила на единицу длины трубы, действующая на i -й слой с площадью сечения $S_i = A_i - A_{i-1}$; $A_i = \pi r_i^2$ — площадь круга радиусом r_i ; величины $\lambda_i, \chi_i, \psi_i$ определяются выражениями

$$\lambda_i = \ln a_i, \quad \chi_i = \frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{a_i - 1}, \quad \psi_i = \frac{1}{2\lambda_i} - \frac{\chi_i}{a_i - 1}, \quad a_i = \frac{A_i}{A_{i-1}}.$$

При $a_i \rightarrow 1$ эти величины имеют предельные значения $\lambda_i \rightarrow 0, \chi_i = 1/2, \psi_i = 1/3$.

В (16), (17) средние скорости выражаются через симметричные матрицы коэффициентов мобильности:

$$\bar{u}_i = M_{ij} f_j, \quad \bar{v}_i = M'_{ij} f'_j.$$

Запишем эти матрицы в виде сумм матриц, соответствующих отдельным слоям:

— для плоского канала

$$M_{ij} = \frac{h_1}{\mu_1} \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{h_2}{\mu_2} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{h_3}{\mu_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots; \quad (18)$$

— для круглой трубы

$$M'_{ij} = \frac{1}{4\pi\mu_1} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\lambda_2}{4\pi\mu_2} \begin{pmatrix} 1 & \chi_2 & 0 \\ \chi_2 & \psi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\lambda_3}{4\pi\mu_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \chi_3 & 0 \\ 1 & 1 & \chi_3 & 0 \\ \chi_3 & \chi_3 & \psi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots \quad (19)$$

Из (18), (19) следует, что матрицы коэффициентов мобильности симметричны. Для матрицы расходных коэффициентов получаем также симметричные представления

$$L_{ij} = h_i h_j M_{ij}, \quad L'_{ij} = S_i S_j M'_{ij}.$$

Следует отметить, что во всех членах ряда (19), кроме первого, при сближении радиусов соседних слоев получаем $\chi_i \rightarrow 1/2$ и $\psi_i \rightarrow 1/3$, а значит, матрицы из формулы (18) для плоского канала. Первое слагаемое ряда (19) описывает течение в первом круге. Полагая, что вблизи оси трубы имеется пренебрежимо малая область площадью $A_0 = \pi r_0^2 \rightarrow 0$, в пределе при $a_1 = A_1/A_0 \rightarrow \infty$ получаем $\lambda_1(\infty)\psi_1(\infty) \rightarrow 1/2$. Таким образом, величину $1/2$ в первой матрице формулы (19) можно представить в том же виде, что и остальные замыкающие диагональные члены: $\lambda_1\psi_1/(4\pi\mu_1)$.

Определим расходы в случае течения вязкой жидкости при наличии слоя газа вблизи стенки. В этом случае имеют место расход жидкости Q_1 , текущей в центре канала, и расход газа Q_2 , движущегося в слое вблизи стенки. Введем коэффициент расхода $K = Q_1/Q_{1*}$, где $Q_{1*} = 2(h_1+h_2)^3 F_1/(3\mu_1)$ — расход жидкости, занимающей все сечение канала (в отсутствие газовой прослойки). Отношение вязкостей газа и жидкости обозначим $\mu = \mu_2/\mu_1$, отношение плотностей сил — $\varphi = F_2/F_1$. Тогда для плоского канала получаем

$$K = \delta^3 + \frac{3\delta(1-\delta)}{2\mu} [\varphi(1+\delta) + 2\delta(1-\varphi)], \quad (20)$$

где $\delta = h_1/(h_1+h_2) = r_1/r_2$ — относительная толщина слоя жидкости.

Положение максимума функции $K(\delta)$ определяется из уравнения

$$(3 - 1,5\varphi - \mu)\delta^2 - 2(1-\varphi)\delta - 0,5\varphi = 0, \quad (21)$$

решение которого имеет вид

$$\delta_m = \frac{1-\varphi + \sqrt{1 - (1+\mu)\varphi/2 + (\varphi/2)^2}}{3 - 1,5\varphi - \mu}. \quad (22)$$

При $\varphi = 0$ и $\varphi = 1$ из (20), (22) следует

$$\begin{aligned} \delta_m|_{\varphi=0} &= \frac{2}{3-\mu}, & \delta_m|_{\varphi=1} &= \frac{1}{\sqrt{3-2\mu}}, \\ K_m|_{\varphi=0} &= \frac{4}{\mu(3-\mu)^2}, & K_m|_{\varphi=1} &= \frac{1}{\mu\sqrt{3-2\mu}}. \end{aligned} \quad (23)$$

Для круглой трубы введем отношение площадей $\Delta = A_1/A_2 = (r_1/r_2)^2$, где $A_2 = \pi r_2^2$; $A_1 = \pi r_1^2$. Тогда для отношения объемных расходов жидкости в случае неполного (Q_1) и полного (Q_{1*}) заполнения потоком жидкости сечения трубы получаем выражение

$$K = \frac{Q_1}{Q_{1*}} = \Delta^2 + \frac{2\Delta}{\mu} \left[\varphi(1-\Delta) + (1-\varphi)\Delta \ln\left(\frac{1}{\Delta}\right) \right], \quad (24)$$

где $Q_{1*} = A_2^2 F_1/(8\pi\mu_1)$ — объемный расход жидкости, занимающей все сечение трубы; величины μ , φ определяются так же, как в случае плоского канала. Дифференцируя (24) по Δ , получаем уравнение для определения точки, в которой величина K достигает максимума:

$$\varphi(1/\Delta_m - 1) + 2(1-\varphi) \ln(1/\Delta_m) - (1-\mu) = 0. \quad (25)$$

При $\varphi = 0$ и $\varphi = 1$ из формул (24), (25) следует

$$\Delta_m|_{\varphi=0} = e^{(\mu-1)/2}, \quad \Delta_m|_{\varphi=1} = \frac{1}{2-\mu}, \quad K_m|_{\varphi=0} = \frac{e^{\mu-1}}{\mu}, \quad K_m|_{\varphi=1} = \frac{1}{\mu(2-\mu)}. \quad (26)$$

Заметим, что максимальное значение $K_m|_{\varphi=1}$ было найдено в работе [6].

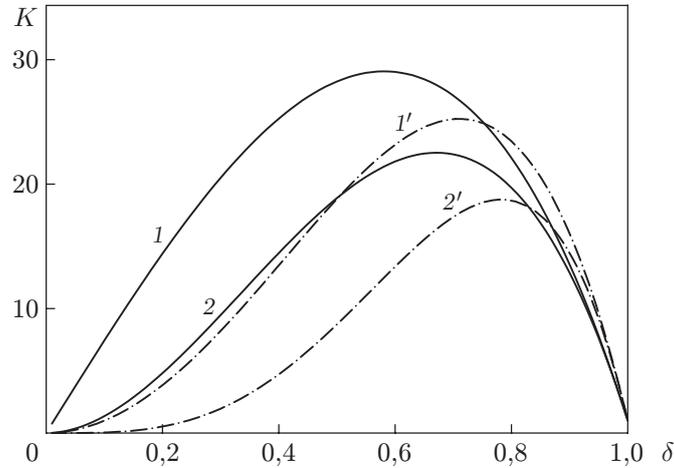


Рис. 2. Зависимость коэффициента увеличения расхода воды от относительной толщины слоя жидкости $\delta = r_1/r_2$ при $\mu = 0,02$:
 1, 2 — случай плоского канала, 1', 2' — случай круглой трубы; 1, 1' — $\varphi = 1$, 2, 2' — $\varphi = 0$

Подставляя $\mu\delta_m^2$ из уравнения (21) в формулу (20) и исключая логарифмический член из уравнений (24), (25), для максимальных значений получаем выражения

$$K_m = \frac{\varphi\delta_m + (1 - \varphi)\delta_m^2}{\mu}, \quad K'_m = \frac{\varphi\Delta_m + (1 - \varphi)\Delta_m^2}{\mu}. \tag{27}$$

Используя предельные значения для δ_m, Δ_m , из выражений (23), (26) можно получить интерполяционные формулы на интервале $0 \leq \varphi \leq 1$:

$$\delta_m = \frac{\varphi}{(3 - 2\mu)^{1/2}} + \frac{2(1 - \varphi)}{3 - \mu}, \quad \Delta_m = \frac{\varphi}{2 - \mu} + \frac{1 - \varphi}{e^{(1-\mu)/2}}, \tag{28}$$

которые определяют положения максимумов с погрешностью менее 1 %. Подставляя (28) в точные формулы (27), можно вычислить максимальные значения коэффициентов расхода с относительной погрешностью, существенно меньшей 1 %.

В случае безнапорного течения ($p'_z = 0$) отношение сил $\varphi = F_2/F_1$ мало, так как оно равно отношению плотностей газа и жидкости $\varphi = \rho_2/\rho_1 \ll 1$. В случае больших приложенных градиентов давления ($|p'_z| \gg \rho_1 g \gg \rho_2 g$) это отношение близко к единице ($\varphi \approx 1$). Таким образом, формулы (27), (28) описывают задачу в широком интервале приложенных сил $0 \leq \varphi \leq 1$, соответствующем как гравитационному, так и напорному режиму течения двухфазного потока.

На рис. 2 для случая вода — воздух ($\mu = 0,02$) показана расчетная зависимость коэффициента K от относительного размера δ для случаев плоского канала и круглой трубы. При этом учтено, что аргумент Δ в формуле (24) равен $\delta^2 = (r_1/r_2)^2$. На рис. 2 видно, что при наличии слоя воздуха вблизи стенки расход воды может быть на порядок больше, чем при полном заполнении канала.

Таким образом, в работе доказана симметрия матрицы коэффициентов расхода L_{ij} — свойство взаимности. Построены общие симметричные решения для N потоков в канале и трубе. Описано явление газовой смазки — значительное увеличение расхода жидкости при наличии тонкого слоя газа вблизи стенки канала или трубы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Eijkel J. C. T., Van den Berg A.** Nanofluidics: what is it and what can we expect from it? // *Microfluid Nanofluid.* 2005. V. 1. P. 249–267.
2. **Conlisk A. T.** Essentials of micro- and nanofluidics: With applications to the biological and chemical sciences. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013.
3. **Wang C. Y.** Flow over a surface with parallel grooves // *Phys. Fluids.* 2003. V. 15, N 5. P. 1114–1121.
4. **Woolford B., Maynes D., Webb B. W.** Liquid flow through microchannels with grooved walls under wetting and superhydrophobic conditions // *Microfluid Nanofluid.* 2009. V. 7. P. 121–135.
5. **Schmieschek S., Belyaev A. V., Harting J., et al.** Tensorial slip of superhydrophobic channels // *Phys. Rev. E.* 2012. V. 85. 016324.
6. **Sinha Ray S., Chando P., Yarin A. L.** Enhanced release of liquid from carbon nanotubes due to entrainment by an air layer // *Nanotechnology.* 2009. V. 20. 095711.
7. **Ajaev V. S., Gatapova E. Ya., Kabov O. A.** Application of Floquet theory to the stability of liquid films on structured surfaces // *Phys. Fluids.* 2013. V. 25. 122102.
8. **De Groot S. R., Mazur P.** Non-equilibrium thermodynamics. N. Y.: Dover Publ., 1984.

Поступила в редакцию 12/V 2014 г.
