

УДК 519.63

ТЕЧЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ РАЗРУШЕНИИ ПЛОТИНЫ НАД УСТУПОМ ДНА

В. В. Остапенко

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

В рамках однослойной модели теории мелкой воды изучаются течения, возникающие при разрушении плотины над разрывом отметки дна, представляющим собой уступ, с которого стекает вода. Основное внимание уделяется подтопленным режимам, при которых волновые процессы в нижнем бьефе оказывают влияние на течение в верхнем бьефе. Рассмотрены решения, в которых полная энергия потока сохраняется на уступе, и решения, в которых она на уступе теряется.

Ключевые слова: мелкая вода, разрушение плотины, уступ дна.

1. Постановка задачи. Дифференциальные уравнения однослойной мелкой воды [1–3] в случае прямоугольного русла постоянной ширины и переменной глубины без учета влияния трения имеют вид

$$h_t + q_x = 0, \quad q_t + (qv + h^2/2)_x = -hb_x, \quad (1.1)$$

где $h(x, t)$, $q(x, t)$, $v = q/h$ — глубина, расход и скорость потока; $b(x)$ — отметка дна. Ускорение свободного падения $g = 1$. Для системы (1.1) рассмотрим задачу о распаде начального разрыва уровня $z = b + h$ в первоначально покоящейся воде

$$z(x, 0) = \begin{cases} z_0, & x > 0, \\ z_1, & x < 0, \end{cases} \quad z_1 > z_0, \quad v(x, 0) = 0 \quad (1.2)$$

над скачком отметки дна

$$b(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ \delta, & x < 0, \end{cases} \quad \delta > 0. \quad (1.3)$$

Поскольку $z_1 > z_0$, при $t > 0$ жидкость в окрестности разрыва (1.3) будет течь в положительном направлении оси x , поэтому разрыв (1.3) с учетом терминологии, принятой в [4], будет представлять собой уступ дна, с которого стекает вода. Так как классическую задачу (1.1), (1.2) о распаде начального разрыва уровня покоящейся жидкости над горизонтальным дном, когда $b_x = 0$, принято называть задачей о разрушении плотины [5], то задачу (1.1)–(1.3) будем называть задачей о разрушении плотины над уступом дна. Решение этой задачи при $x < 0$ будем называть течением слева от уступа, а при $x > 0$ — течением справа от уступа; значение точного решения на разрыве (1.3) при $x = 0 - 0$ будем называть течением на уступе, а при $x = 0 + 0$ — течением за уступом.

Задача (1.1)–(1.3) представляет собой частный случай общей задачи о распаде произвольного разрыва над скачком отметки дна, которая изучалась в [6], где приведены различные примеры ее решения в предположении, что на разрыве (1.3) сохраняется полная

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01-01-00767) и в рамках гранта Президента Российской Федерации по государственной поддержке ведущих научных школ (грант № 902.2003.1).

энергия потока. Однако в [6] не исследована однозначность этих решений и не выделены области их существования. В частном случае задачи (1.1)–(1.3), когда формирующееся течение на уступе дна является критическим, имеет место неподтопленный режим сопряжения бьефов. Этот случай исследовался в [7] при анализе гидравлических процессов, возникающих при разрушении ворот многокамерного судоходного шлюза. Однозначная разрешимость задачи (1.1)–(1.3) при $\delta < 0$, когда течение над разрывом отметки дна представляет собой ступеньку, на которую натекает вода, изучалась в работах [8, 9]. При этом в [9], в отличие от [8], наряду с течениями, в которых полная энергия потока на ступеньке дна сохраняется, рассматривались также течения, в которых полная энергия потока на ступеньке не сохраняется.

В настоящей работе, являющейся продолжением работ [8, 9], изучается разрешимость обобщенной задачи о распаде разрыва (1.1)–(1.3) как в предположении, что полная энергия потока на уступе дна сохраняется, так и в предположении, что она на нем теряется. При этом, в отличие от [7], основное внимание уделяется подтопленным режимам течения, при которых процессы в нижнем бьефе оказывают влияние на течение в верхнем бьефе.

2. Допустимые течения над уступом дна при условии сохранения на нем полной энергии потока. Предположим, что на разрыве (1.3) полная энергия потока сохраняется. С учетом непрерывности расхода это предположение приводит к следующему соотношению на уступе дна [3, 9]:

$$J(H, q) = J(h, q) + \delta, \quad (2.1)$$

где функция $J(\xi, q)$ задается формулой

$$J(\xi, q) = q^2/(2\xi^2) + \xi, \quad (2.2)$$

$q = hv = HV$ — расход; h, v и H, V — параметры потока на уступе и за уступом соответственно. Как показано в [8], условие (2.1) допускает две конфигурации течения на разрыве (1.3), для первой из которых

$$H > h + \delta, \quad V < v, \quad V < \sqrt{H}, \quad v < \sqrt{h}, \quad (2.3)$$

для второй

$$H < h, \quad V > v, \quad V > \sqrt{H}, \quad v \geq \sqrt{h}. \quad (2.4)$$

Из (2.1) следует, что при заданных расходе q и глубине H за уступом глубина h на уступе определяется как аргумент функции (2.2), при котором она принимает значение $J(H, q) - \delta$. Так как при $q = \text{const}$ функция (2.2), график которой приведен на рис. 1, достигает минимума

$$J_c = \min_x J(x, q) = 3q^{2/3}/2$$

при критическом значении $h_c = v_c^2 = q^{2/3}$, то задача определения глубины h имеет решение либо при $H \geq H_c^+(q)$, что соответствует конфигурации (2.3), либо при $H \leq H_c^-(q)$, что соответствует конфигурации (2.4), где $H_c^+(q) > H_c^-(q)$ — аргументы функции (2.2), при которых она принимает значение

$$J_c + \delta = 3q^{2/3}/2 + \delta.$$

Параметры критического потока на уступе

$$h_c = q^{2/3}, \quad v_c = q^{1/3} \quad (2.5)$$

при $q > 0$ являются строго монотонно возрастающими функциями q . Следующая теорема показывает, что это свойство сохраняется при ударных переходах $h_c \rightarrow H_c^\pm$ через разрыв (1.3).

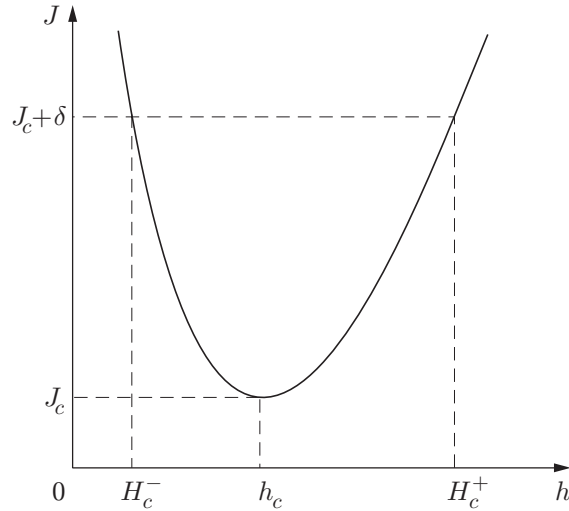


Рис. 1

Теорема 1. *Функции $H_c^\pm(q)$ и $V_c^\pm(q) = q/H_c^\pm(q)$ при $q > 0$ являются строго монотонно возрастающими.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку величины $H_c^\pm(q)$ являются корнями уравнения

$$\frac{q^2}{2H^2} + H = \frac{3}{2}q^{2/3} + \delta,$$

полный дифференциал от которого можно записать в виде

$$\alpha dH = \left(q^{-1/3} - V/H \right) dq, \tag{2.6}$$

где с учетом (2.3) и (2.4)

$$\alpha = 1 - V^2/H = (H - V^2)/H, \tag{2.7}$$

то из (2.6) с учетом (2.5) следует

$$H_q = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{v_c}{h_c} - \frac{V}{H} \right) = \frac{q(H^2 - h_c^2)}{\alpha H^2 h_c^2}. \tag{2.8}$$

Так как $V_q = (q/H)_q = (H - qH_q)/H^2$, то с учетом (2.7) и (2.8) найдем

$$V_q = \frac{1}{H^2} \left(H - \frac{q}{\alpha} \left(\frac{v_c}{h_c} - \frac{V}{H} \right) \right) = \frac{\alpha H + V^2 - v_c^2}{\alpha H^2} = \frac{H - h_c}{\alpha H^2}. \tag{2.9}$$

Поскольку $q > 0$, в случае обеих допустимых конфигураций (2.3) и (2.4), для первой из которых $H > h_c$, $\alpha > 0$, а для второй $H < h_c$, $\alpha < 0$, из формул (2.8) и (2.9) получим $H_q > 0$ и $V_q > 0$. Теорема доказана.

Из теоремы 1 следует, что параметры H, V допустимых течений за уступом лежат на плоскости переменных (h, v) (рис. 2) либо не выше монотонно возрастающей кривой $v = v_c^+(h) = V_c^+(q_c^+(h))$, либо не ниже монотонно возрастающей кривой $v = v_c^-(h) = V_c^-(q_c^-(h))$, расположенных соответственно в областях докритических и сверхкритических течений ($q_c^\pm(H)$ — функции, обратные к $H_c^\pm(q)$). Как показано в [8], при $q > 0$ устойчивым является ударный переход $h_c \rightarrow H_c^-$ (см. рис. 1), которому на рис. 2 соответствует переход с линии критических течений $v = v_c(h) = \sqrt{h}$ на линию $v = v_c^-(h)$, а неустойчивым является ударный переход $h_c \rightarrow H_c^+$, которому на рис. 2 соответствует переход с линии $v = v_c(h)$ на линию $v = v_c^+(h)$.

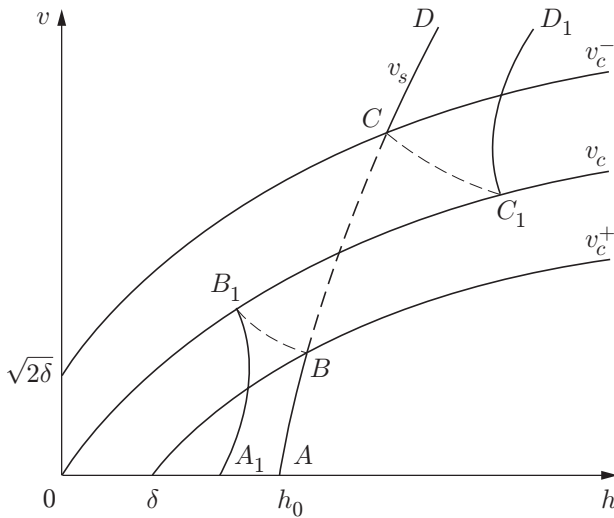


Рис. 2

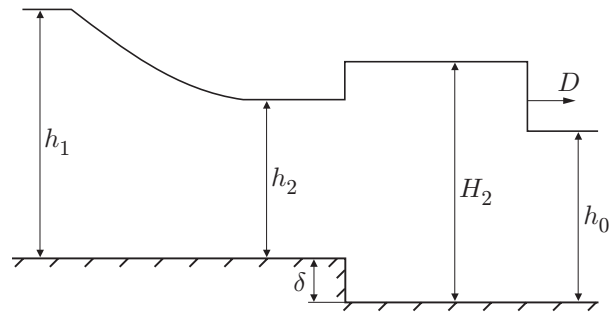


Рис. 3

В решении задачи о распаде разрыва (1.1)–(1.3) справа от уступа дна по фону z_0 распространяется прерывная s -волна, параметры постоянного течения H_2, V_2 за фронтом которой лежат на ударной s -адиабате

$$V = v_s(H, h_0) = \sqrt{(H + h_0)/(2Hh_0)}(H - h_0), \quad h > h_0, \quad (2.10)$$

являющейся монотонно возрастающей функцией, выходящей из точки h_0 на оси h . Слева от уступа дна по фону z_1 распространяется центрированная r -волна понижения, параметры постоянного течения h_2, v_2 за которой лежат на волновой r -адиабате

$$v = v_r(h, h_1) = 2(\sqrt{h_1} - \sqrt{h}), \quad h < h_1, \quad (2.11)$$

являющейся монотонно убывающей функцией, выходящей из точки h_1 на оси h .

Предположим, что постоянные течения (H_2, V_2) и (h_2, v_2) являются докритическими и в силу этого продолжают до уступа дна (рис. 3), формируя на нем устойчивое разрывное течение, удовлетворяющее условиям (2.1) и (2.3). В этом случае для доказательства однозначной разрешимости задачи (1.1)–(1.3) обобщенным методом адиабат [9, 10] необходимо изучить вопрос о сохранении свойства монотонности адиабат (2.10) и (2.11) при переходе через уступ дна. В п. 3 этот вопрос изучается для ударной s -адиабаты (2.10).

3. О сохранении свойства монотонного возрастания функции $V(H)$ при переходе через уступ дна. Рассмотрим однопараметрическое семейство устойчивых разрывных течений с глубинами и скоростями $H, V(H)$ за уступом и $h(H), v(H)$ на уступе и выясним, при каких условиях из монотонного возрастания функции $V(H)$ следуют однозначная определенность и монотонное возрастание функции $v = \tilde{v}(h) = v(H(h))$, $(H(h) —$ функция, обратная к $h(H))$.

Теорема 2. Если положительная строго монотонно возрастающая функция $V(H)$, значения которой принадлежат области докритических (сверхкритических) течений, удовлетворяет условию $V(H) < v_c^+(H)$ ($V(H) > v_c^-(H)$), то соответствующая ей функция $v = \tilde{v}(h)$, значения которой принадлежат области докритических (сверхкритических) течений, однозначно определена и является строго монотонно возрастающей тогда и только тогда, когда для производной V_H функции $V(H)$ выполнены неравенства

$$\frac{V(H - h)}{H(h - V^2)} < V_H < \frac{h^2 - HV^2}{V(H^2 - h^2)}. \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку полный дифференциал от уравнения (2.1) можно записать в виде

$$\alpha_0 dh = \alpha_1 dH + (V/H - v/h) dq, \quad (3.2)$$

где с учетом (2.2)–(2.4)

$$\alpha_0 = J_h(h, q) = 1 - v^2/h \neq 0, \quad \alpha_1 = J_H(H, q) = 1 - V^2/H \neq 0, \quad (3.3)$$

то из (3.2), так же как при доказательстве теоремы 1 в [9], получим

$$h_H = \frac{1}{\alpha_0} \left(\alpha_1 + \frac{q(h^2 - H^2)}{h^2 H^2} q_H \right), \quad v_H = \frac{(h - H)q_H + \alpha_1 H^2 V_H}{\alpha_0 h^2}, \quad (3.4)$$

где

$$q_H = (HV)_H = V + HV_H > 0. \quad (3.5)$$

Так как $\alpha_1(h - H) < 0$, то производные (3.4) не обязаны быть положительными при любом положительном значении V_H . Поэтому, используя формулу (3.5), запишем их в виде

$$h_H = (a - bV_H)/(\alpha_0 h^2), \quad v_H = (cV_H - d)/(\alpha_0 h^2), \quad (3.6)$$

где

$$a = h(h - vV), \quad b = V(H^2 - h^2), \quad c = H(h - V^2), \quad d = V(H - h) \quad (3.7)$$

положительные величины при условиях (2.3) и отрицательные при условиях (2.4). Полагая

$$V_H \neq \frac{a}{b} = \frac{h(h - vV)}{V(H^2 - h^2)} = \frac{h^2 - HV^2}{V(H^2 - h^2)} \Rightarrow h_H \neq 0,$$

из (3.6) найдем

$$v_h = \frac{v_H}{h_H} = \frac{cV_H - d}{a - bV_H} = \alpha \frac{V_H - \beta_1}{V_H - \beta_2}, \quad (3.8)$$

где

$$\alpha = -\frac{c}{b} = \frac{H(V^2 - h)}{V(H^2 - h^2)} < 0, \quad \beta_1 = \frac{d}{c} = \frac{V(H - h)}{H(h - V^2)} > 0, \quad \beta_2 = \frac{a}{b} = \frac{h^2 - HV^2}{V(H^2 - h^2)} > 0. \quad (3.9)$$

Покажем, что $\beta_2 > \beta_1$, т. е. $ac > bd$. Для этого, учитывая (3.7) и равенство $V = hv/H$, преобразуем разность $ac - bd$ следующим образом:

$$\begin{aligned} ac - bd &= H(h - V^2)(h^2 - HV^2) - V^2(H - h)(H^2 - h^2) = \\ &= (h/H)^2 (h(H - v^2)(H^2 - hv^2) - v^2(H - h)(H^2 - h^2)). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Предположим, что выполнены условия (2.3). Тогда положительность выражения (3.10) следует из неравенств

$$h > v^2, \quad H - v^2 > H - h > 0, \quad H^2 - hv^2 > H^2 - h^2 > 0.$$

Если выполнены условия (2.4), то $v^2 > h$ и положительность выражения (3.10), записанного в виде

$$ac - bd = (h/H)^2 (h(v^2 - H)(hv^2 - H^2) - v^2(h - H)(h^2 - H^2)),$$

следует из неравенств

$$h(v^2 - H) > v^2(h - H) > 0, \quad hv^2 - H^2 > h^2 - H^2 > 0.$$

Поскольку $\beta_2 > \beta_1$, из формулы (3.8) следует, что производная v_h положительна только при $\beta_1 < V_H < \beta_2$. При выполнении этих неравенств положительными являются и производные (3.6), что следует из их записи в виде

$$h_H = (\beta_2 - V_H)/(\alpha_0 b h^2), \quad v_H = (V_H - \beta_1)/(\alpha_0 c h^2),$$

где $\alpha_0 b > 0$ и $\alpha_0 c > 0$ в случае обеих допустимых конфигураций (2.3) и (2.4). Теорема доказана.

Неравенства (3.1) накладывают существенные ограничения на значение производной функции $V(H)$, сохраняющей свойство монотонного возрастания при переходе через уступ (1.3) справа налево. Так, в области докритических течений границы

$$\beta_1 = \frac{V(H-h)}{H(h-V^2)} = \frac{v(H-h)}{H^2-hv^2}, \quad \beta_2 = \frac{h^2-HV^2}{V(H^2-h^2)} = \frac{h(H-v^2)}{v(H^2-h^2)} \quad (3.11)$$

интервала сохранения монотонности (β_1, β_2) являются соответственно монотонно возрастающей и монотонно убывающей функциями V и v , причем

$$\lim_{V \rightarrow 0} \beta_1 = 0, \quad \lim_{V \rightarrow 0} \beta_2 = +\infty, \quad \lim_{V \rightarrow v_c^+ - 0} \beta_i = \lim_{v \rightarrow v_c - 0} \beta_i = f(H_c^+, V_c^+).$$

Здесь с учетом (2.5) $f(H, V) = q^{1/3}/(H + q^{2/3})$; $q = HV$. Наоборот, в области сверхкритических течений границы β_1 и β_2 являются соответственно монотонно убывающей и монотонно возрастающей функциями V и v , при этом

$$\lim_{V \rightarrow +\infty} \beta_1 = 0, \quad \lim_{V \rightarrow +\infty} \beta_2 = +\infty, \quad \lim_{V \rightarrow v_c^- + 0} \beta_i = \lim_{v \rightarrow v_c + 0} \beta_i = f(H_c^-, V_c^-).$$

Отсюда следует, что в области докритических течений длина интервала (β_1, β_2) , являясь бесконечно большой при $V \rightarrow 0$, монотонно убывает с увеличением V , становясь бесконечно малой при $V \rightarrow v_c^+ - 0$; в области сверхкритических течений длина этого интервала, являясь бесконечно большой при $V \rightarrow +\infty$, монотонно убывает с уменьшением V , становясь бесконечно малой при $V \rightarrow v_c^- + 0$. Поэтому для того, чтобы функция $V(H)$, значения которой принадлежат области докритических течений, при $V \rightarrow v_c^+ - 0$ сохраняла свойство монотонного возрастания при переходе через уступ, необходимо, чтобы ее производная V_H удовлетворяла условию

$$\lim_{V \rightarrow v_c^+ - 0} V_H = f(H_c^+, V_c^+). \quad (3.12)$$

Аналогично для того, чтобы функция $V(H)$, значения которой принадлежат области сверхкритических течений, при $V \rightarrow v_c^- + 0$ сохраняла свойство монотонного возрастания при переходе через уступ, необходимо, чтобы ее производная V_H удовлетворяла условию

$$\lim_{V \rightarrow v_c^- + 0} V_H = f(H_c^-, V_c^-). \quad (3.13)$$

Если монотонно возрастающая функция $V(H)$ представляет собой ударную s -адиабату (2.10), то глубины H_c^\pm , входящие в условия (3.12), (3.13), должны быть корнями уравнения

$$(H + q^{2/3})(v_s)_H = q^{1/3}, \quad (3.14)$$

где

$$q = Hv_s = (H - h_0) \sqrt{\frac{H(H + h_0)}{2h_0}}, \quad (v_s)_H = \frac{2H^2 + Hh_0 + h_0^2}{2H \sqrt{2Hh_0(H + h_0)}}. \quad (3.15)$$

Поскольку уравнение (3.14) с учетом (3.15) является однородным относительно H и h_0 , его можно записать в виде

$$(\xi + \eta^2)(2\xi^2 + \xi + 1) = 2\xi\eta\sqrt{2\xi(\xi + 1)}, \quad (3.16)$$

где $\eta = \sqrt[6]{\xi(\xi + 1)(\xi - 1)^2/2}$; $\xi = H/h_0$.

Введем обозначения

$$a = 2\xi^2 + \xi + 1, \quad b = \xi\sqrt{2\xi(\xi + 1)}, \quad c = \xi a = \xi(2\xi^2 + \xi + 1)$$

и рассмотрим уравнение (3.16) как квадратное относительно η :

$$a\eta^2 - 2b\eta + c = 0. \quad (3.17)$$

Уравнение (3.17) имеет действительные корни, если его дискриминант

$$D = b^2 - ac = 2\xi^3(\xi + 1) - \xi(2\xi^2 + \xi + 1)^2 \geq 0.$$

Однако при $\xi > 1$ дискриминант

$$D < 2\xi^3(\xi + 1) - \xi(4\xi^4 + 4\xi^3) = 2\xi^3(\xi + 1)(1 - 2\xi) < 0,$$

и, следовательно, уравнения (3.16) и (3.17) не имеют действительных решений при $\xi > 1$, а уравнение (3.14) — при $H > h_0$. Тем самым доказано, что ударная s -адиабата (2.10) не удовлетворяет условиям (3.12) и (3.13) при всех $h_0 > 0$ и $\delta > 0$, и, следовательно, для ударных s -адиабат свойство монотонного возрастания не сохраняется при переходе через уступ дна. Это свойство нарушается при приближении s -адиабаты снизу к критической линии $v_c^+(h)$ и сверху к критической линии $v_c^-(h)$. Как это происходит, показано на рис. 2, на котором монотонная кривая $ABCD$ является графиком адиабаты (2.10), а немонотонные кривые A_1B_1 и C_1D_1 — образами участков AB и CD этой адиабаты при переходе через уступ.

Из рис. 2 следует, что нарушение монотонности обусловлено тем, что при приближении к линии критических течений $v = \sqrt{h}$ функция $v = \tilde{v}(h)$, графиком которой являются кривые A_1B_1 и C_1D_1 , становится неоднозначной, и поэтому функцию $v = \tilde{v}(h)$ нельзя использовать для доказательства однозначной разрешимости задачи о распаде разрыва (1.1)–(1.3) обобщенным методом адиабат. В связи с этим изучим вопрос о сохранении свойства монотонного убывания волновой r -адиабаты (2.11) при переходе через уступ (1.3) слева направо.

4. О сохранении свойства монотонного убывания функции $v(h)$ при переходе через уступ дна. Рассмотрим однопараметрическое семейство устойчивых разрывных течений с глубинами и скоростями $h, v(h)$ на уступе и $H(h), V(h)$ за уступом и выясним, при каких условиях из монотонного убывания функции $v(h)$ следуют однозначная определенность и монотонное убывание функции $V = \tilde{V}(H) = V(h(H))$ ($h(H)$ — функция, обратная к $H(h)$).

Теорема 3. *Если значения положительной строго монотонно убывающей функции $v(h)$ принадлежат области докритических (сверхкритических) течений, то соответствующая ей функция $V = \tilde{V}(H)$, значения которой принадлежат области докритических (сверхкритических) течений, однозначно определена и является строго монотонно убывающей тогда и только тогда, когда для производной v_h функции $v(h)$ выполнены неравенства*

$$\frac{hv^2 - H^2}{v(H^2 - h^2)} < v_h < \frac{v(H - h)}{h(v^2 - H)}. \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из уравнения (3.2) с учетом (3.3) можно получить следующие формулы для производных H_h и V_h , аналогичные формулам (3.4):

$$H_h = \frac{1}{\alpha_1} \left(\alpha_0 + \frac{q(H^2 - h^2)}{H^2 h^2} q_h \right), \quad V_h = \frac{(H - h)q_h + \alpha_0 h^2 v_h}{\alpha_1 H^2}, \quad (4.2)$$

где

$$q_h = (hv)_h = v + hv_h. \quad (4.3)$$

Подставляя (4.3) в (4.2), после преобразований найдем

$$H_h = (b_1 v_h + a_1)/(\alpha_1 H^2), \quad V_h = (c_1 v_h + d_1)/(\alpha_1 H^2), \quad (4.4)$$

где $a_1 = H(H - Vv)$, $b_1 = v(H^2 - h^2)$, $c_1 = h(H - v^2)$, $d_1 = v(H - h)$ — положительные величины при условиях (2.3) и отрицательные при условиях (2.4). Полагая

$$v_h \neq -\frac{a_1}{b_1} = \frac{H(H - Vv)}{v(H^2 - h^2)} = \frac{H^2 - hv^2}{v(H^2 - h^2)} \Rightarrow H_h \neq 0,$$

из (4.4) с учетом обозначений (3.9) получим

$$V_H = \frac{V_h}{H_h} = \frac{c_1 v_h + d_1}{b_1 v_h + a_1} = \beta_2 \frac{v_h - \gamma_2}{v_h - \gamma_1}, \quad (4.5)$$

где

$$\gamma_1 = \alpha = \frac{H(V^2 - h)}{V(H^2 - h^2)} < 0, \quad \gamma_2 = \frac{\alpha\beta_1}{\beta_2} = \frac{V(H - h)}{HV^2 - h^2} < 0.$$

Так как $\beta_2 > \beta_1$, то $\gamma_2 > \gamma_1$, поэтому из формулы (4.5) следует, что производная V_H отрицательна только при $\gamma_1 < v_h < \gamma_2$. При выполнении этих неравенств производная H_h является положительной, а производная V_h — отрицательной, что следует из их записи в виде

$$H_h = (v_h - \gamma_1)/(\alpha_1 b_1 H^2), \quad V_h = (v_h - \gamma_2)/(\alpha_1 c_1 H^2),$$

где $\alpha_1 b_1 > 0$ и $\alpha_1 c_1 > 0$ в случае обеих допустимых конфигураций (2.3) и (2.4). Поскольку $V = hv/H$, выражения для границ интервала сохранения монотонности (γ_1, γ_2) можно записать следующим образом:

$$\gamma_1 = \frac{hv^2 - H^2}{v(H^2 - h^2)}, \quad \gamma_2 = \frac{v(H - h)}{h(v^2 - H)}. \quad (4.6)$$

Теорема доказана.

Неравенства (4.1) накладывают существенные ограничения на значение производной функции $v(h)$, сохраняющей свойство монотонного убывания при переходе через уступ (1.3) слева направо. Подобно границам (3.11) границы (4.6) в области докритических течений являются соответственно монотонно возрастающей и монотонно убывающей функциями v такими, что

$$\lim_{v \rightarrow 0} \gamma_1 = -\infty, \quad \lim_{v \rightarrow 0} \gamma_2 = 0, \quad \lim_{v \rightarrow v_c - 0} \gamma_i = -\frac{1}{\sqrt{h}},$$

в области сверхкритических течений они являются соответственно монотонно убывающей и монотонно возрастающей функциями v такими, что

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} \gamma_1 = -\infty, \quad \lim_{v \rightarrow +\infty} \gamma_2 = 0, \quad \lim_{v \rightarrow v_c + 0} \gamma_i = -\frac{1}{\sqrt{h}}.$$

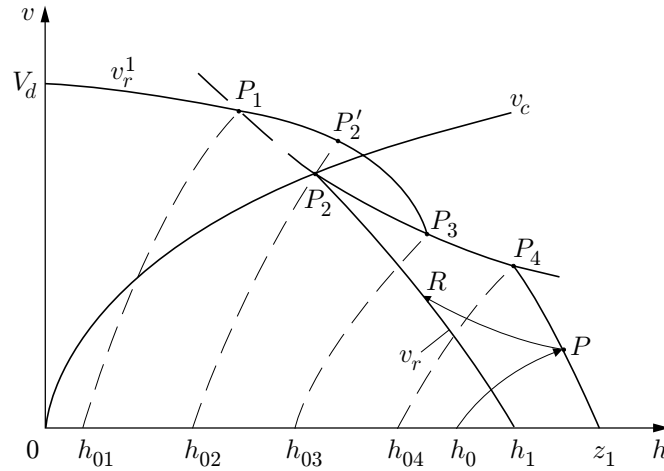


Рис. 4

Отсюда следует, что в области докритических течений длина интервала (γ_1, γ_2) , являясь бесконечно большой при $v \rightarrow 0$, монотонно убывает с увеличением v , становясь бесконечно малой при $v \rightarrow v_c - 0$; в области сверхкритических течений длина этого интервала, являясь бесконечно большой при $v \rightarrow +\infty$, монотонно убывает с уменьшением v , становясь бесконечно малой при $v \rightarrow v_c + 0$. Несмотря на это при всех $h_1 > 0$ производная $(v_r)_h = -1/\sqrt{h}$ волновой r -адиабаты (2.11) как в области докритических течений ($v_r < \sqrt{h}$), так и в области сверхкритических течений ($v_r > \sqrt{h}$) удовлетворяет неравенствам (4.1), т. е.

$$\frac{H^2 - hv_r^2}{v_r(H^2 - h^2)} > \frac{1}{\sqrt{h}} > \frac{v_r(H - h)}{h(H - v_r^2)} \quad (4.7)$$

при всех положительных $h \neq 4h_1/9$.

Для доказательства неравенств (4.7) умножим каждое из них на скорость $v_r > 0$. В результате получим

$$\frac{H^2 - h^2 f_r^2}{H^2 - h^2} > f_r > \frac{(H - h) f_r^2}{H - h f_r} \quad (4.8)$$

($f_r = v_r/\sqrt{h}$ — число Фруда). Непосредственной проверкой убеждаемся в верности неравенств (4.8) как при условиях (2.3), когда $f_r < 1$, так и при условиях (2.4), когда $f_r > 1$.

Таким образом, в отличие от ударной s -адиабаты (2.10) волновая r -адиабата (2.11) при всех значениях $h_1 > 0$ и $\delta > 0$ сохраняет свойство монотонности при переходе через уступ дна, и поэтому, в отличие от задачи о разрушении плотины над ступенькой [9], именно ее образ необходимо использовать в обобщенном методе адиабат для доказательства однозначной разрешимости задачи о распаде разрыва (1.1)–(1.3) при подтопленном режиме течения на уступе.

5. Автомодельные решения при подтопленном режиме течения на уступе.

Как показано в п. 4, часть волновой r -адиабаты (2.11), лежащая в области докритических течений при $h > 4h_1/9$ (линия $h_1 P_2$ на рис. 4), переводится энергетическим соотношением (2.1) в монотонно убывающую функцию $V = \tilde{V}_r(H)$, также принадлежащую области докритических течений (линия $z_1 P_4$ на рис. 4). Поскольку соотношение (2.1) записывается в виде уравнения

$$H^3 - (v^2/2 + h + \delta)H^2 + q^2/2 = 0,$$

кубического относительно H , функцию $V = \tilde{V}_r(H)$ можно задать в параметрическом виде

$$H = H_r(h) = F(h, v_r(h, h_1)), \quad V = V_r(h) = hv_r(h, h_1)/H_r(h), \quad h \in (4h_1/9, h_1), \quad (5.1)$$

где $v_r(h, h_1)$ — волновая r -адиабата (2.11); функция $F(h, v)$ определяется по формуле Кардано

$$F(h, v) = a \left(2 \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(1 - \frac{h^2 v^2}{4a^3} \right) \right) + 1 \right), \quad a = \frac{v^2 + 2(h + \delta)}{6}.$$

Из монотонного возрастания ударной s -адиабаты (2.10) и монотонного убывания функции $V = \tilde{V}_r(H)$, представляющей собой образ волновой r -адиабаты (2.11) при переходе через уступ, следует однозначная разрешимость задачи о распаде разрыва (1.1)–(1.3) при

$$h_0 \in (h_{04}, z_1), \quad z_1 = h_1 + \delta. \quad (5.2)$$

Здесь h_{04} — точка на оси h , для которой ударная s -адиабата $v_s(h, h_{04})$ проходит через точку P_4 на рис. 4.

Значение h_{04} вычисляется следующим образом. Сначала по формулам

$$h_c = 4h_1/9, \quad v_c = \sqrt{h_c} = 2\sqrt{h_1}/3 \quad (5.3)$$

определяются координаты точки P_2 , в которой волновая r -адиабата (2.11) пересекает линию критических течений $v = \sqrt{h}$. Затем по вытекающим из (5.1) и (5.3) формулам

$$H_c^+ = H_r(h_c), \quad V_c^+ = V_r(h_c) = h_c^{3/2}/H_r(h_c)$$

находятся координаты точки P_4 , в которой линия (5.1) пересекается с гиперболой

$$v = q_c/h, \quad q_c = h_c v_c = 8\sqrt{h_1^3}/27, \quad (5.4)$$

выходящей из точки P_2 . После этого значение h_{04} определяется из уравнения

$$v_s(H_c^+, h_{04}) = V_c^+, \quad (5.5)$$

где $v_s(h, h_0)$ — функция ударной s -адиабаты (2.10). Уравнение (5.5) можно записать в виде уравнения

$$\xi^3 - \xi^2 - (2(V_c^+)^2/H_c^+ + 1)\xi + 1 = 0,$$

кубического относительно $\xi = h_{04}/H_c^+$, решая которое получим $h_{04} = G(H_c^+, V_c^+)$, где функция $G(h, v)$ вычисляется по формуле Кардано

$$G(h, v) = \frac{h}{3} \left(2p \cos \left(\frac{1}{3} \left(2\pi - \arccos \frac{9f^2 - 8}{p^3} \right) \right) + 1 \right), \quad (5.6)$$

$$p = \sqrt{6f^2 + 4}; \quad f = v/\sqrt{h}.$$

В точном решении, получаемом при условии (5.2), образуются две области постоянных докритических течений (см. рис. 3): область (h_2, v_2) между r -волной понижения и уступом и область (H_2, V_2) между уступом и прерывной s -волной. Параметры постоянного течения H_2, V_2 представляют собой координаты точки P , в которой волновая s -адиабата (2.10) пересекается с графиком функции (5.1) (линия $z_1 P_4$ на рис. 4), а параметры постоянного течения h_2, v_2 являются координатами точки R пересечения волновой r -адиабаты (2.11) с гиперболой $v = q/h$, $q = H_2 V_2$, выходящей из точки P . Глубины h_2, H_2 и скорости v_2, V_2 этих постоянных течений удовлетворяют системе уравнений

$$v_2 = v_r(h_2, h_1), \quad V_2 = v_s(H_2, h_0), \quad V_2^2/2 + H_2 = v_2^2/2 + h_2 + \delta, \quad H_2 V_2 = h_2 v_2,$$

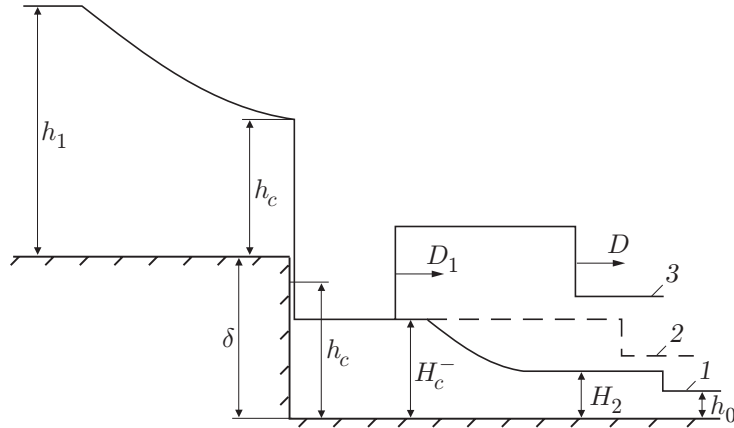


Рис. 5

решение которой можно получить следующим образом. Сначала из уравнения $V_r(h_2) = v_s(H_r(h_2), h_0)$, где $H_r(h)$, $V_r(h)$ — функции (5.1), находится глубина h_2 слева от уступа. Затем по формуле $v_2 = v_r(h_2, h_1) = 2(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2})$ определяется скорость потока v_2 слева от уступа и по формулам $H_2 = H_r(h_2)$, $V_2 = V_r(h_2)$ вычисляются параметры течения H_2, V_2 справа от уступа. После этого по формуле

$$D = \sqrt{H_2(H_2 + h_0)/(2h_0)} \quad (5.7)$$

находится скорость распространения прерывной s -волны. Формула (5.7) вытекает из условий Гюгонио

$$D[h] = [q], \quad D[q] = [qv + h^2/2], \quad (5.8)$$

получаемых из законов сохранения массы и полного импульса (1.1) над горизонтальным дном, когда $b_x = 0$.

Из рис. 4 следует, что при уменьшении начальной глубины h_0 от z_1 до h_{04} глубина H_2 за уступом уменьшается от z_1 до H_c^+ , а скорость V_2 за уступом возрастает от 0 до V_c^+ ; в то же время глубина h_2 на уступе уменьшается от h_1 до h_c , а скорость v_2 на уступе возрастает от 0 до v_c . Таким образом, построенные решения представляют собой течения с подтопленным уступом дна, поскольку в них параметры потока H_2, V_2 за уступом влияют на параметры течения h_2, v_2 на уступе, и при этом уровень потока всегда возрастает при стекании жидкости с уступа (см. рис. 3). Тем самым в случае подтопленного режима течения, возникающего при условии (5.2), задача о распаде разрыва (1.1)–(1.3) однозначно разрешима в рамках предположения (2.1) о сохранении полной энергии потока на уступе дна.

6. Автомодельные решения при неподтопленном режиме течения на уступе. Предположим, что начальная глубина h_0 справа от уступа удовлетворяет неравенству $h_0 < h_{04}$, в силу чего правая граница r -волны понижения, распространяющейся по фону z_1 , находится непосредственно на уступе (рис. 5), формируя на нем критическое течение (h_c, v_c) , параметры которого вычисляются по формулам (5.3). В этом случае слева (при $x \leq 0-0$) на уступ (1.3) приходят две характеристики системы (1.1), создавая на нем неподтопленный режим течения, при котором параметры потока за уступом не оказывают влияния на течение на уступе.

Как показано в [8], в рамках предположения (2.1) о сохранении полной энергии потока при переходе через уступ решения с критическим потоком на уступе устойчивы только при условиях (2.4), когда течение за уступом является сверхкритическим. Параметры H_c^-, V_c^- этого сверхкритического течения не зависят от волновых процессов справа от уступа при

$x > 0$ и полностью определяются критическим потоком (h_c, v_c) на уступе. Значения H_c^- и V_c^- с учетом (2.1) и (5.3) удовлетворяют энергетическому соотношению

$$(V_c^-)^2/2 + H_c^- = 3h_c/2 + \delta,$$

которое с учетом

$$H_c^- V_c^- = H_c^+ V_c^+ = h_c v_c = q_c \quad (6.1)$$

удобно записать в виде уравнения $(V_c^-)^3 - (3h_c + 2\delta)V_c^- + 2q_c = 0$, кубического относительно V_c^- . Решая это уравнение, получим $V_c^- = \Psi(h_c, q_c)$, $H_c^- = q_c/V_c^-$, где функция $\Psi(h, q)$ вычисляется по формуле Кардано

$$\Psi(h, q) = 2r \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(-\frac{q}{r^3}\right)\right), \quad r = \sqrt{h + \frac{2}{3}\delta}.$$

На рис. 4 течению (H_c^-, V_c^-) соответствует точка P_1 на части гиперболы (5.4), показанной штриховой линией, выходящей из точки P_2 в область сверхкритических течений.

Построение решения справа от уступа при $x > 0$ сводится к решению для системы (1.1) классической задачи о распаде разрыва над горизонтальным дном [11] со следующими начальными данными:

$$h(x, 0) = \begin{cases} h_0, & x > 0, \\ H_c^-, & x \leq 0, \end{cases} \quad v(x, 0) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ V_c^-, & x \leq 0. \end{cases} \quad (6.2)$$

Для решения задачи (6.2) необходимо найти точку пересечения монотонно возрастающей ударной s -адиабаты (2.10), выходящей из точки h_0 на оси h , и монотонно убывающей r -адиабаты

$$v = v_r^1(h, H_c^-, V_c^-) = V_c^- + \alpha(h, H_c^-), \quad \alpha(h, H) = \begin{cases} -v_s(h, H), & h \geq H, \\ v_r(h, H), & h \leq H, \end{cases} \quad (6.3)$$

выходящей из точки $P_1 = (H_c^-, V_c^-)$.

Предположим сначала, что $h_0 \in (0, h_{01})$ ($h_{01} = G(H_c^-, V_c^-)$ — точка на оси h , для которой ударная s -адиабата $v_s(h, h_{01})$ проходит через точку P_1). Тогда s -адиабата (2.10) пересекает r -адиабату (6.3) в ее волновой части (левее точки P_1 на рис. 4), формируя справа от уступа течение с r -волной понижения и прерывной s -волной (линия 1 на рис. 5). Глубина H_2 постоянного течения (H_2, V_2) между этими волнами определяется из уравнения $v_s(H_2, h_0) - v_r(H_2, H_c^-) = V_c^-$, после чего скорость V_2 этого течения вычисляется по формуле

$$V_2 = v_s(H_2, h_0), \quad (6.4)$$

а скорость D распространения прерывной s -волны находится по формуле (5.7). Если $h_0 = 0$, то прерывная s -волна вырождается и правая граница r -волны понижения, расположенной справа от уступа, движется по сухому руслу со скоростью $V_d = V_c^- + 2\sqrt{H_c^-}$. Если $h_0 = h_{01}$, то справа от уступа вырождается r -волна понижения и постоянное сверхкритическое течение (H_c^-, V_c^-) продолжается непосредственно до фронта прерывной s -волны (штриховая линия 2 на рис. 5), т. е. в этом случае $H_2 = H_c^-$, $V_2 = V_c^-$.

Предположим теперь, что $h_0 \in (h_{01}, h_{05})$ ($h_{05} = G(H_c^-, -V_c^-)$ — координата точки, в которой r -адиабата (6.3) пересекает ось h). Тогда s -адиабата (2.10) пересекает r -адиабату (6.3) в ее ударной части (правее точки P_1 на рис. 4), формируя течение с двумя прерывными волнами. Глубина H_2 постоянного течения (H_2, V_2) между этими волнами определяется из уравнения $v_s(H_2, h_0) + v_s(H_2, H_c^-) = V_c^-$, после чего скорость V_2 этого течения и скорость D распространения прерывной s -волны вычисляются по формулам (6.4) и (5.7), а скорость D_1 распространения прерывной r -волны находится по формуле

$$D_1 = V_c^- - \sqrt{H_2(H_2 + H_c^-)/(2H_c^-)}, \quad (6.5)$$

получаемой из условий Гюголио (5.8).

В рамках общей задачи (1.1)–(1.3) построенное решение с двумя прерывными волнами справа от уступа (линия 3 на рис. 5) имеет смысл, только когда скорость прерывной r -волны $D_1 > 0$, что эквивалентно условию $H_2 < H_2^*$, где

$$H_2^* = H_c^- (\sqrt{1 + 8(V_c^-)^2/H_c^-} - 1)/2 —$$

корень уравнения (6.5) при $D_1 = 0$. При глубине $H_2 = H_2^*$ прерывная r -волна сливается с разрывом на уступе, формируя вместе с ним единый стоячий скачок, скорость за которым $V_2^* = q_c/H_2^*$. Отсюда с учетом (6.1) следует, что точка $P_3 = (H_2^*, V_2^*)$ является точкой пересечения ударной части r -адиабаты (6.3) (линия $P_1P_2'P_3$ на рис. 4) с частью гиперболы (5.4), расположенной в области докритических течений (линия P_2P_4 на рис. 4). При этом точка $P_3 = (H_2^*, V_2^*)$ лежит на гиперболе (5.4) между точками $P_2 = (h_c, v_c)$ и $P_4 = (H_c^+, V_c^+)$, поскольку на гидравлическом прыжке полная энергия потока теряется, а при ударном переходе $h_c \rightarrow H_c^+$, которому на рис. 4 соответствует переход из точки P_2 в точку P_4 , сохраняется.

Таким образом, решение с двумя прерывными волнами справа от уступа существует только при условии $h_0 \in (h_{01}, h_{03})$, в котором $h_{03} \in (h_{02}, h_{04})$ ($h_{02} = G(h_c, v_c)$, $h_{03} = G(H_2^*, V_2^*)$ — точки на оси h , из которых выходят ударные s -адиабаты (2.10), проходящие соответственно через точки P_2 и P_3 на рис. 4). Отсюда следует, что неподтопленные режимы течения, в которых полная энергия потока сохраняется при переходе через уступ, могут существовать только при $h_0 < h_{03} < h_{04}$. Это означает, что при начальных глубинах нижнего бьефа

$$h_0 \in (h_{03}, h_{04}) \tag{6.6}$$

задача о распаде разрыва (1.1)–(1.3) неразрешима в рамках предположения (2.1) о сохранении полной энергии потока при переходе через уступ дна. В этом заключается ее принципиальное отличие от задачи о распаде разрыва (1.2) над ступенькой дна (в случае $\delta < 0$ в формуле (1.3)), которая, как показано в [9], всегда однозначно разрешима при условии сохранения полной энергии потока при переходе через ступеньку.

7. Энергетически устойчивые решения с тремя характеристиками, приходящими на уступ дна. Поскольку при условии (6.6) задача о распаде разрыва (1.1)–(1.3) неразрешима в рамках энергетического соотношения (2.1), рассмотрим ее решения, в которых полная энергия потока теряется при переходе через уступ дна. Как показано в [9], существует два класса таких решений: решения, в которых на разрыв (1.3) приходят две характеристики системы (1.1), и решения, в которых на разрыв (1.3) приходят три характеристики этой системы. В случае решений первого класса для замыкания модели мелкой воды требуется модификация уравнения (2.1) за счет введения в него эвристического параметра, задающего часть полной энергии потока, которая теряется при переходе через уступ дна. В случае решений второго класса для замыкания условий на разрыве (1.3) достаточно непрерывности расхода $[q] = 0$. В этом случае часть полной энергии потока, которая теряется при переходе через уступ, однозначно определяется в рамках модели мелкой воды без привлечения каких-либо эвристических параметров. В настоящей работе рассматриваются только решения второго класса.

Для того чтобы при решении задачи (1.1)–(1.3) три характеристики приходили на разрыв (1.3), необходимо, чтобы правая граница r -волны понижения, распространяющейся по фону z_1 , находилась на уступе, формируя на нем критическое течение (h_c, v_c) , а за уступом течение (H_2, V_2) было докритическим или критическим, т. е. $V_2 \leq \sqrt{H_2}$, где $H_2 \geq h_c$ (рис. 6). Такие разрывные решения над уступом в определенном смысле подобны прерывным волнам над ровным дном, для характеристической устойчивости которых необходимо, чтобы три характеристики приходили на фронт волны и только одна с него

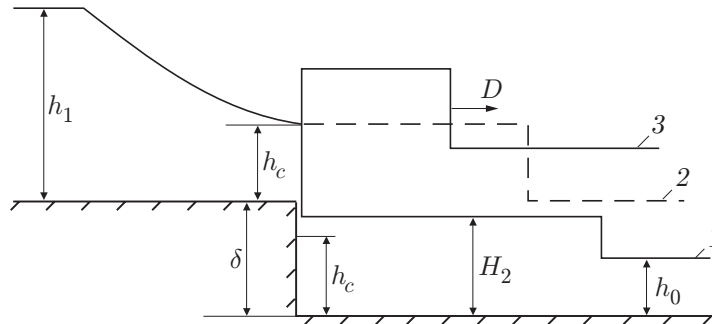


Рис. 6

выходила [11]. Наличие третьей входящей характеристики в случае прерывных волн позволяет однозначно определить скорость их распространения, а в случае неподвижных разрывов над уступом — энергетические потери на нем.

Как известно [11], невозрастание полной энергии на разрывных решениях уравнений мелкой воды (1.1) можно использовать как альтернативный критерий их устойчивости, аналогичный энтропийному критерию устойчивости ударных волн в газовой динамике [12]. Этот критерий был распространен на общую теорию гиперболических систем [13]. Однако в отличие от прерывных волн, для которых характеристический и энергетический (энтропийный) критерии их устойчивости эквивалентны [11, 14], в случае рассматриваемых здесь разрывных решений второго класса энергетический критерий устойчивости существенно ограничивает множество этих решений. Действительно, если на уступе сформировалось критическое течение (h_c, v_c) , то параметры докритического потока за уступом H_2, V_2 ($H_2 V_2 = h_c v_c = q_c$) могут соответствовать любой точке части гиперболы (5.4), расположенной в области докритических течений. Однако, для того чтобы полная энергия потока при переходе через уступ не возрастала, необходимо, чтобы точка (H_2, V_2) лежала между линиями v_c и v_c^+ на рис. 2, т. е. между точками P_2 и P_4 гиперболы (5.4) на рис. 4. Это следует из энергетического критерия устойчивости, который вытекает из закона сохранения полной энергии (см. [8, 11])

$$(qv + h^2/2)_t + (q(v^2/2 + h))_x = -qb_x$$

и на неподвижном разрыве над уступом дна имеет вид

$$q_c[v^2/2 + z] \leq 0. \quad (7.1)$$

Поскольку $q_c > 0$, из (7.1) получим

$$J(H_2, q_c) \leq J(h_c, q_c) + \delta = J_c + \delta, \quad (7.2)$$

где функция $J(\xi, q)$ определяется формулой (2.2). Из графика этой функции (см. рис. 1) следует, что для докритического течения (H_2, V_2) условие (7.2) эквивалентно неравенствам $h_c \leq H_2 \leq H_c^+, V_c^+ \leq V_2 \leq v_c$, которые означают, что точка с координатами H_2, V_2 лежит на гиперболе (5.4) между точками $P_2 = (h_c, v_c)$ и $P_4 = (H_c^+, V_c^+)$. Таким образом, энергетически устойчивые решения второго класса существуют при начальных глубинах нижнего бьефа

$$h_0 \in [h_{02}, h_{04}], \quad (7.3)$$

когда ударная s -адиабата (2.10) пересекает гиперболу (5.4) между точками P_2 и P_4 на рис. 4. В этих решениях (см. рис. 6) глубина постоянного течения (H_2, V_2) между уступом дна и прерывной s -волной определяется из уравнения $H_2 v_s(H_2, h_0) = q_c$, после чего скорость течения вычисляется по формуле $V_2 = q_c/H_2$, а скорость распространения прерывной s -волны — по формуле (5.7).

Из рис. 4 следует, что при увеличении начальной глубины h_0 от h_{02} до h_{04} глубина H_2 за уступом монотонно и непрерывно возрастает от h_c до H_c^+ , а скорость V_2 за уступом монотонно и непрерывно убывает от v_c до V_c^+ . Отсюда с учетом неравенства $H_c^+ > h_c + \delta$ следует существование такой начальной глубины $h'_0 \in (h_{02}, h_{04})$, при которой уровни потоков на уступе и за ним одинаковы, т. е. $h_c + \delta = H_2$ (штриховая линия 2 на рис. 6). Значение h'_0 находится из уравнения $v_s(H_c, h'_0) = V_c$, где $H_c = h_c + \delta$; $V_c = q_c/H_c$, решая которое с использованием формулы (5.6), получим $h'_0 = G(H_c, V_c)$. При $h_0 \in (h_{02}, h'_0)$ уровень потока (H_2, V_2) за уступом ниже уровня критического течения (h_c, v_c) на уступе, т. е. $H_2 < h_c + \delta$ (линия 1 на рис. 6), а при $h_0 \in (h'_0, h_{04})$, наоборот, $H_2 > h_c + \delta$ (линия 3 на рис. 6).

Из диаграммы адиабат, приведенной на рис. 4, следует, что задача о распаде разрыва (1.1)–(1.3) при всех $h_0 \in [0, z_1)$ разрешима либо для течений, в которых полная энергия потока на уступе сохраняется, либо для течений второго класса, в которых полная энергия на уступе теряется. Однако разрешима она неоднозначно, поскольку при каждой начальной глубине $h_0 \in [h_{02}, h_{03})$ наряду с решением второго класса с одной прерывной волной и докритическим потоком за уступом (см. рис. 6), которое получается при пересечении s -адиабатой (2.10) гиперболы (5.4) на участке P_2P_3 (в этом решении энергия на уступе теряется), существует решение с двумя прерывными волнами и сверхкритическим потоком за уступом (линия 3 на рис. 6), которое получается при пересечении s -адиабатой (2.10) ударной части r -адиабаты (6.3) на участке P'_2P_3 (в этом решении полная энергия на уступе сохраняется). Какой из этих режимов течения реализуется на практике, зависит от конкретных условий проведения лабораторных экспериментов.

Рассмотрим более подробно границы отрезка (7.3), на котором энергетически устойчивы решения второго класса. Если начальная глубина h_0 , непрерывно возрастая, переходит через правую границу h_{04} отрезка (7.3) (на рис. 4 этому соответствует непрерывный переход точки P с гиперболы P_2P_4 на линию P_4z_1), то решения второго класса (линия 3 на рис. 6) непрерывно переходят в решения с подтопленным водосливом (см. рис. 3). В случае решения второго класса, получаемого при $h_0 = h_{02}$, потоки на уступе и за ним принимают одинаковые критические значения h_c, v_c , совпадающие с параметрами постоянного течения, возникающего между прерывной s -волной и r -волной понижения при решении классической задачи о разрушении плотины над горизонтальным дном с начальными данными (1.2) при $z_0 = h_0 = h_{02}$. Однако такое решение, в отличие от решений, получаемых при $h_0 \in (h_{02}, h_{04}]$, является неустойчивым относительно малого изменения начальных данных: при $h_0 = h_{02} - \varepsilon$ ($\varepsilon \ll 1$) поток за уступом становится сверхкритическим, что приводит к скачкообразному переходу с гиперболы (5.4) на ударную часть r -адиабаты (6.3), т. е. с линии P_2P_4 на линию $P_1P'_2P_3$ на рис. 4, в результате чего данное решение преобразуется в решение с двумя прерывными волнами справа от уступа (линия 3 на рис. 5).

Закключение. В работе рассматривались только такие решения с потерей полной энергии на уступе дна, в которых на разрыв (1.3) приходят три характеристики системы (1.1). В то же время для реальных уступов энергетические потери на них будут иметь место и в случае решений с двумя характеристиками, приходящими на разрыв (1.3). Однако, как следует из результатов работы [9], в которой изучались аналогичные решения над ступенькой дна, учет таких энергетических потерь, который возможен только на основе некоторой эвристической информации, приведет лишь к определенному сжатию в направлении линии критических течений $v = \sqrt{h}$ всей диаграммы адиабат, показанной на рис. 4, что в свою очередь вызовет сужение интервалов существования неподтопленных режимов течения с двумя прерывными волнами и энергетически устойчивых течений с тремя характеристиками, приходящими на уступ. В результате учет таких потерь энергии, приводя к некоторым количественным изменениям параметров построенных течений,

принципиально не меняет их структуру. В некоторой степени этот вывод подтвержден результатами лабораторных опытов, проведенных сотрудниками лаборатории экспериментальной прикладной гидродинамики Института гидродинамики СО РАН В. И. Букреевым и А. В. Гусевым с целью экспериментальной проверки автомодельных решений задачи о распаде разрыва (1.1)–(1.3). Полученные в работе типы волн, скорости их распространения и асимптотические глубины за фронтом прерывной s -волны хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Автор выражает благодарность В. И. Букрееву и А. В. Гусеву за сотрудничество и полезные замечания, высказанные при обсуждении результатов данной работы. Автор также признателен А. А. Атавину за предоставленную возможность ознакомиться с полным текстом доклада [7], материалы которого использованы при написании пп. 6, 7 данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стокер Дж. Дж. Волны на воде. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
2. Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985.
3. Ляпидевский В. Ю., Тешуков В. М. Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
4. Букреев В. И., Гусев А. В. Волны за ступенькой в открытом канале // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 1. С. 62–70.
5. Dressler R. F. Comparison of theories and experiments for the hydraulic dam-break wave // Intern. Assoc. Sci. Hydrology. 1954. V. 3, N 38. P. 319–328.
6. Alcrudo F., Benkhaldon F. Exact solutions to the Riemann problem of the shallow water equations with bottom step // Comp. Fluids. 2001. V. 30. P. 643–671.
7. Атавин А. А., Васильев О. Ф. Оценка возможных последствий аварий на судоходном шлюзе, связанных с разрушением затворов его камер // Тез. докл. Междунар. симп. “Гидравлические и гидрологические аспекты надежности и безопасности гидротехнических сооружений”, Санкт-Петербург, 28 мая — 1 июня 2002 г. СПб.: Всерос. науч.-исслед. ин-т гидротехники, 2002. С. 121.
8. Остапенко В. В. О разрывных решениях уравнений “мелкой воды” над уступом дна // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 6. С. 62–74.
9. Остапенко В. В. Течения, возникающие при разрушении плотины над ступенькой дна // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 4. С. 51–63.
10. Яушев И. К. Распад произвольного разрыва в канале со скачком площади сечения // Изв. АН СССР. Сер. техн. наук. 1967. № 8, вып. 2. С. 109–120.
11. Атавин А. А., Гладышев М. Т., Шугрин С. М. О разрывных течениях в открытых руслах // Динамика сплошной среды / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1975. Вып. 22. С. 37–64.
12. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.
13. Lax P. D. Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves. Philadelphia: Soc. Industr. and Appl. Math., 1972.
14. Остапенко В. В. Устойчивые ударные волны в двухслойной “мелкой воде” // Прикл. математика и механика. 2001. Т. 65, вып. 1. С. 94–113.

*Поступила в редакцию 25/III 2003 г.,
в окончательном варианте — 14/IV 2003 г.*