ПМТФ, № 6, 1971

УДК 533.9+537.56

# СТАЦИОНАРНОЕ ИСТЕЧЕНИЕ В ВАКУУМ ДВУХТЕМПЕРАТУРНОЙ ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЫ

*И. И. Литвинов*

*(Москва)*

Показано, что при учете теплопроводности электронов и теплообмена между компонентами макроскопический процесс истечения плазмы из расширяющегося сопла определяется единственным безразмерным параметром — параметром адиабатичности, характеризующим переход от адиабатического течения плотной плазмы к течению сравнительно разреженной плазмы, когда длина пробега частиц сравнима с характерным размером сопла. Численным методом найдено распределение газодинамических и электрических параметров потока плазмы и соотношение между обобщенными выходными параметрами. Показано, что в последнем случае энергия ионов на бесконечности благодаря высокой теплопроводности по электронам может быть в десятки раз больше энергии при адиабатическом истечении, однако для ее достижения необходимо нереально большое расширение сопла. Рассмотрены также «особые» режимы течения, возникающие при расчете стационарного истечения плазмы на бесконечность.

Теоретическому и экспериментальному исследованию истечения ионизованного газа в вакуум посвящено большое число работ. В них рассматривается течение как разреженной плазмы [1-7], когда длина пробега частиц $\lambda$ сравнима или даже меньше характерного размера источника $L$, так и плотной плазмы [8-15], для которой $\lambda \ll L$. В последнем случае большое внимание уделяется нарушению ионизационного, температурного и т. п. равновесия при уменьшении начальной плотности плазмы и его влиянию на газодинамические параметры потока.

Наряду с упомянутыми факторами при уменьшении плотности важную роль начинает играть теплопроводность электронного газа, приводящая к неадиабатическому характеру течения. Однако этот эффект в упомянутых работах не рассматривался. Более того, в работе [12], результаты которой по утверждению авторов пригодны и для случая $\lambda \lessapprox L$, тепловой поток электронов $q_e$, роль которого в этом случае особенно велика, вообще выпал из системы уравнений.

Целью данной работы является исследование эффекта теплопроводности электронов при течении плазмы в сопле в «чистом виде», для чего в ней рассматривается идеализированный случай истечения полностью ионизованной двухтемпературной плазмы в широком диапазоне начальных плотностей. Эти результаты затем сопоставляются с обычным адиабатическим решением.

**1. Качественный анализ течения плазмы в сопле.** Ниже используется система уравнений полностью ионизованной двухтемпературной плазмы из [16]. В одномерном стационарном случае уравнение неразрывности имеет вид

$$NVS = I \tag{1.1}$$

где $N = N_e = N_i$ — плотность, $V = V_e = V_i$ — скорость плазмы, $S$ — сечение канала, $I$ — расход частиц.

Вместо двух раздельных уравнений движения для электронов и ионов удобно использовать уравнение равновесия электронов

$$0 = -dP_e / dX - eNE + R_T \tag{1.2}$$

и уравнение движения для плазмы в целом

$$MNVdV / dX = -d(P_e + P_i) / dX \tag{1.3}$$

В уравнениях (1.2), (1.3) $R_T = -0.71 \; NdT_e / dX$ — термосила. Кроме того, в них пренебрежено инерцией электронов ($m / M \ll 1$) и вязкостью.

Из двух энергетических уравнений используем уравнение тепла для ионов

$$\frac{3}{2} NV \frac{dT_i}{dX} + \frac{P_i}{S} \frac{d}{dX}(SV) = Q_\Delta, \quad Q_\Delta = \frac{3m}{M} \frac{N}{\tau_e}(T_e - T_i) \tag{1.4}$$

и суммарное уравнение переноса энергии

$$SNV\left[\frac{MV^2}{2} + \frac{5}{2}(T_e + T_i)\right] + Sq_e = H = \text{const} \tag{1.5}$$

где $H$ — мощность потока плазмы.

В уравнении учитывается тепловой поток

$$q_e = -\varkappa_e dT_e / dX \qquad (\varkappa_e = 3.16 \; NT_e\tau_e / m)$$

потоком же $q_i$ в (1.5) пренебрегается.

Роль электронной теплопроводности легко оценить по величине отношения потока $q_e$ к конвективному потоку тепла

$$\zeta = \frac{q_e}{NVT_e} \sim \sqrt{\frac{M}{m}} \frac{\lambda_e}{L} \tag{1.6}$$

Отсюда видно, что масштабом эффекта теплопроводности является большая длина [17] $L_0 = \lambda_e \sqrt{M/m}$. При $L \sim L_0$ тепловой поток порядка конвективного. При $L \sim \lambda_e$ поток $q_e$ преобладающе велик, при этом $\zeta \sim \sqrt{M/m} \gg 1$. Заметим, что при $L \sim \lambda_e$ эти результаты справедливы лишь по порядку величины, но уже для $L / \lambda_e$ порядка нескольких единиц их точность сильно возрастает [18], поэтому ниже за границу макроскопического описания условно берется $L \gtrsim \lambda_e$. Остальные отброшенные в (1.2) — (1.5) слагаемые существенны на длинах $\sim \lambda_e$ и при $L \gg \lambda_e$ ими действительно можно пренебречь.

Как следует из (1.5) и (1.6), $\varkappa_e$ почти не зависит от $N$, поэтому с ростом расхода $I$ относительная роль $q_e$ падает и течение стремится к адиабатическому с температурой $T = T_e + T_i = 2T_e$ и показателем адиабаты $^5/_3$. При этом параметры потока связаны между собой конечными алгебраическими соотношениями [10, 19, 20].

При учете теплопроводности электронов эти параметры зависят также и от хода процесса, причем мощность $H$ в (1.5) в отличие от параметров $N$, $T_e$, $T_i$, $V$ из-за неопределенности $dT_e / dX$ во входном сечении является фактически неизвестной самоустанавливающейся валичиной, зависящей от упомянутых «входных» параметров и формы канала. Правильное решение этого вопроса представляет главную трудность рассматриваемой задачи.

Выясним качественно условие перехода через скорость звука для указанного течения плазмы с подогревом. Как известно [17, 19], удобной моделью такого процесса является политропический закон

$$P / \rho^k = \text{const}, \qquad \text{или} \qquad T / N^{k-1} = \text{const} \tag{1.7}$$

где $k$ — показатель политропы. Такая аппроксимация позволяет обычным путем через уравнение Бернулли прийти к алгебраическому соотношению

$$1-\left(\frac{N}{N_0}\right)^{k-1}=\frac{k-1}{k}\,\frac{MV_0^2}{2T_0}\left[\left(\frac{V}{V_0}\right)^2-1\right]\qquad (k\neq 1)\tag{1.8}$$

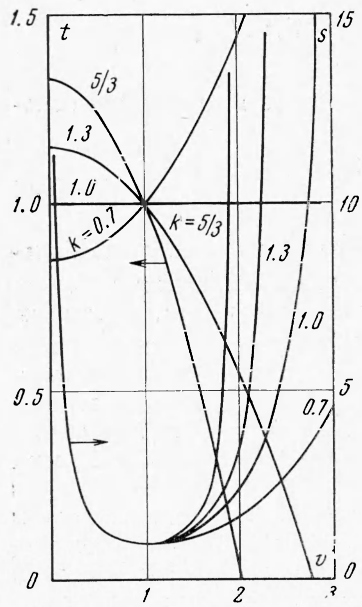
в котором нулевой индекс соответствует величинам в исходном сечении для интегрирования. Отношение $MV_0^2\,/\,2T_0$ в (1.8) остается пока неопределенным. Нормируя затем все величины в (1.1), (1.7) и (1.8) на их значения в этом сечении (малые буквы вместо больших) и требуя, чтобы это сечение совпало с критическим, для чего при $s=1$ должно быть $ds\,/\,dv=0$, находим важную для дальнейшего связь энергии и температуры в критическом сечении

$$\frac{MV_*^2}{2T_*}=\frac{k}{2}\tag{1.9}$$

После этого легко выразить все параметры течения через скорость

$$t=\frac{k+1}{2}-\frac{k-1}{2}v^2,\qquad n=t^{(k-1)^{-1}},\qquad s=n^{-1}v^{-1}\tag{1.10}$$

Эти зависимости для разных значений $k$ представлены на фиг. 1. Видно, что при $k>1$ максимум скорости достигается на бесконечности при $t_\infty\to 0$, причем $v_\infty^2=(k+1)\,/\,(k-1)$. Отсюда для адиабаты получается обычное соотношение $v_\infty=2$. При $k\leqslant 1$ скорость по длине канала растет безгранично. Следовательно, подвод тепла в сверхзвуковую часть сопла при наличии соответствующего расширения ведет к росту скорости истечения.




Фиг. 1

Из (1.9) и фиг. 1 следует, что в критическом сечении сопла скорость потока плазмы проходит через «политропическую» скорость звука $a_*=\sqrt{kP_*\,/\,\rho_*}$, где теперь $P_*=P_e^*+P_i^*$. Этот результат совпадает с выводами для обычного газа [20]. Зависимость безразмерной скорости от сечения в дозвуковой части для разных $k$ почти одинакова, поэтому здесь достаточно рассмотреть решение в сверхзвуковой части. Это решение ниже сшивается с политропическим в критическом сечении. Естественно, что на достаточном удалении это решение будет отличаться от политропического. Однако такая аппроксимация, как известно [17, 21], является весьма полезной в широкой области. Точное решение позволит также найти зависимость эффективного показателя $k$ от других параметров, характеризующих течение плазмы в целом.

**2. Система уравнений для счета и ее особенности.** Для приведения системы к виду, пригодному для метода Рунге — Кутта, в качестве неизвестных выберем величины $T_e$, $T_i$ и энергию ионов $W$. Уравнения для $T_e$ и $T_i$ вытекают из (1.5) и (1.4). Уравнение для $W$ получается из уравнения импульса (1.3) с учетом соотношения $-N'\,/\,N=S'\,/\,S+W'\,/\,2W$ из (1.1), причем производная $T'=T_e'+T_i'$ в правой части выражается через уравнения для $T_e$ и $T_i$. Здесь и ниже штрих обозначает производную по $X$.

Как следует из (1.4) и (1.5), эти уравнения содержат свои характерные масштабы, поэтому решение в целом зависит от профиля сопла. В качестве такого выберем нормированное сечение в виде скругленного конуса

$$s(x) = 1 + x^2, \qquad x = X / X_* \tag{2.1}$$

Существенные особенности решения, связанные с неопределенностью мощности $H$ в (1.5), проще всего рассмотреть сначала на примере течения с $T_i \equiv 0$; далее будет рассмотрен и случай $T_i \not\equiv 0$.

*Течение с* $T_i \equiv 0$. Уравнение (1.5), в котором теперь $T \equiv T_e$, из-за неопределенности $H$ удобнее расписать через параметры в критическом сечении

$$\frac{S\varkappa_e}{I} T_e' - \frac{S_*\varkappa_e^*}{I} T_{e*}' = W - W_* + \frac{5}{2}(T_e - T_e^*) \tag{2.2}$$

Деля далее (2.2) на $T_e^*$ и нормируя затем все остальные величины на их значения при $X = 0$ (а координату $X$ на $X_*$), находим с учетом (1.9)

$$t_e' = \frac{1}{st_e^{5/2}}\left\{t_{e*}' + \frac{\beta}{2}[k(w-1) - 5(1-t_e)]\right\} \tag{2.3}$$

где $t_e^{5/2} = \varkappa_e / \varkappa_e^*$, а $\beta = IX_* / S_*\varkappa_e^*$ — безразмерный параметр течения.

Аналогично имеем уравнение для безразмерной энергии

$$\frac{w'}{2}\left(k - \frac{t_e}{w}\right) = t_e \frac{s'}{s} - t_e' \tag{2.4}$$

Входящий в (2.3) безразмерный градиент температуры $t_{e*}'$ найдем из политропического решения (1.10). Для этого, выражая в соотношении $n^2 w = s^{-2} n$ и $w$ через $t$ и подставляя туда ряд $t = 1 + \tau_1 x + \ldots$, из равенства коэффициентов при $x^2$ находим

$$\tau_1 = -\frac{\sqrt{2}(k-1)}{\sqrt{k+1}} = t_{e*}' \tag{2.5}$$

Аналогично, используя (2.5), имеем $w_*' = \varepsilon_1 = 2\sqrt{2} / \sqrt{k+1}$.

И, наконец, параметр течения $\beta$ после подстановки для случая $T_i \equiv 0$ приобретает вид

$$\beta = \frac{1}{3.16}\,\frac{m v_e^* V_*}{T_e^*}\,\frac{X_*}{\lambda_e^*} = \frac{2\sqrt{2}}{3.16}\sqrt{\frac{k}{\pi}}\sqrt{\frac{m}{M}}\,\frac{X_*}{\lambda_e^*} \tag{2.6}$$

где $v_e^* = (8T_e^* / \pi m)^{1/2}$ — тепловая скорость электронов.

Наиболее существенная величина в (2.6) — это параметр

$$\beta^\circ = \sqrt{\frac{m}{M}}\,\frac{X_*}{\lambda_e^*} \tag{2.7}$$

определяемый как отношение характерного размера сопла $X_*$ к масштабу эффекта теплопроводности $L_0$. Очевидно, в данном случае это единственный обобщенный управляющий параметр, зависящий от входных параметров и геометрии сопла. Этот параметр должен также однозначно определять и эффективный показатель $k$. При $\beta^\circ \to \infty$ течение должно стремиться к адиабатическому, при уменьшении $\beta^\circ$ — к изотермическому. Учитывая сказанное, $\beta^\circ$ естественно назвать параметром адиабатичности. Практически, однако, удобнее задаться сначала величиной $k$ и уже затем найти $\beta$ и $\beta^\circ$.

Для малых $x$ квадратная скобка в (2.3) имеет вид

$$^1/_2\beta[k(w-1)-5(1-t_e)]\approx {}^3/_4\beta\varepsilon_1(^5/_3-k)x$$

Поэтому из (2.3) нетрудно заметить, что если для заданного $k<{}^5/_3$ величина $\beta$ меньше, чем требуется, то выражение в фигурных скобках в (2.3) с ростом $x$ убывает по модулю недостаточно быстро, и тогда из-за множителя $t_e^{5/2}$ в знаменателе $t_e$ круто пойдет к нулю. Аналогично, если $\beta$ велико, то в этой скобке, начиная с некоторого $x$, произойдет смена знака на положительный, т. е. $t_e$ станет нарастать. Эти явления условно названы $T$- и $T'$-кризисами.

Очевидно, для получения решения, удовлетворяющего требуемым условиям на бесконечности $T_e\to 0$, $T_e'\to 0$, необходима итерационная настройка параметра $\beta_j(k)$. Эта процедура эквивалентна упомянутой выше подстройке мощности $H$ во входном сечении. Фактически входной градиент $T_{e*}'$, а в данной постановке $\beta^\circ(k)$, является собственным значением нелинейной краевой задачи.

Для определения первого приближения $\beta_1(k)$ рассмотрим ход решения вблизи $x=0$. Подставляя для этого ряды в (2.3) и (2.4), находим при нулевой степени

$$\tau_1^e=\tau_1,\qquad \varepsilon_1=-2\tau_1/(k-1)$$

т. е. то же, что и для политропы. Последующие коэффициенты разложения $\tau_j$ и $\varepsilon_j$ выражаются затем через $\tau_1$, $\varepsilon_1$ и $\beta$. Учитывая далее, что для политропы при $k\to{}^5/_3$ величина $|\tau_2|$ конечна и весьма мала и стремится к нулю при $k\to 1$, для определения $\beta_1(k)$ положим в решении $\tau_2\equiv 0$. Отсюда

$$\beta_1=\frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{k+1}}\,\frac{(k-1)^2}{^5/_3-k}\tag{2.8}$$

Это выражение качественно удовлетворяет искомой зависимости $k\,(\beta^\circ)$.

Настройка $\beta_j(k)$ производилась в работе автоматически путем деления пополам интервала $\Delta\beta_j$ между двумя ближайшими $\beta_j$, соответствующими $T$- и $T'$-кризисам. По мере уточнения $\beta_j$ координаты кризисов отодвигаются в сторону бóльших $x$.

*Течение с* $T_i\not\equiv 0$. Аналогично (2.3) теперь имеем

$$t_e'=\frac{1}{st_e^{5/2}}\left\{t_{e*}'+\frac{\beta}{2}\left[k(w-1)-5\left(1-\frac{t_e+t_i}{1+\tau_*}\right)\right]\right\}\tag{2.9}$$

Умножая далее уравнения для $W$ и $T_i$ на $X_*/T_e$, получаем в безразмерном виде

$$\frac{w'}{2}\left[k(1+\tau_*)-\frac{1}{w}\left(t_e+\frac{5}{3}t_i\right)\right]=\frac{s'}{s}\left(t_e'+\frac{5}{3}t_i\right)-t_e'-\frac{2}{3}\frac{Q_\Delta SX_*}{IT_e^*}\tag{2.10}$$

$$t_i'=-\frac{2}{3}t_i\left(\frac{s'}{s}+\frac{w'}{2w}\right)+\frac{2}{3}\frac{Q_\Delta SX_*}{IT_e^*}\tag{2.11}$$

В отличие от общего правила в уравнениях (2.9) — (2.11) температура $T_i$ нормирована на $T_e^*$, причем $t_i^*=\tau_*$. Кроме того, параметр настройки $\beta$ в (2.9) в общем случае $\tau_*\neq 0$ имеет вид

$$\beta=(1+\tau_*)IX_*/S_*\varkappa_e^*$$

Для приведения последних членов в (2.10) и (2.11), обозначенных как $B_\Delta = B^* b_\Delta$, с учетом (1.1) и (1.9) находим

$$b_\Delta = \frac{t_e - t_i}{sw\, t_e^{7/2}}$$

$$B^* = \frac{2m}{M} \frac{\nu_e^*}{V_*} \frac{X_*}{\lambda_e^*} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi k}} \frac{\beta^\circ}{\sqrt{1+\tau_*}}$$

Таким образом, теплообмен между компонентами определяется тем же параметром $\beta^\circ$, что и эффект теплопроводности.

При настройке $\beta_j$ параметры $\beta_j^\circ$ и $B_j^*$ можно найти из соотношений

$$\beta_j^\circ = 1.58 \sqrt{\frac{\pi}{2k}} \frac{\beta_j}{(1+\tau_*)^{7/2}}, \qquad B_j^* = \frac{6.32}{k} \frac{\beta_j}{(1+\tau_*)^2} \qquad (2.12)$$

Для определения зависимости $\tau$ $(k)$ учтем, что в плотном потоке $(k \to {}^5/_3)$ из-за большого теплообмена $(Q_\Delta \sim N^2)$ температура $T_i$ должна стремиться к $T_e$ $(\tau_* \to 1)$. При уменьшении $k$ ионы не успевают подогреваться, поэтому $\tau_* \to 0$. Подставляя опять ряды в (2.9) и (2.11) и приравнивая коэффициенты при $x^{(0)}$, имеет соотношения

$$\tau_1^e = \tau_1^c, \quad \tau_1^i = -{}^1/_3\, \tau_* \varepsilon_1 + B^* (1 - \tau_*), \quad \varepsilon_1 = -2\tau_1 / (k-1) \qquad (2.13)$$

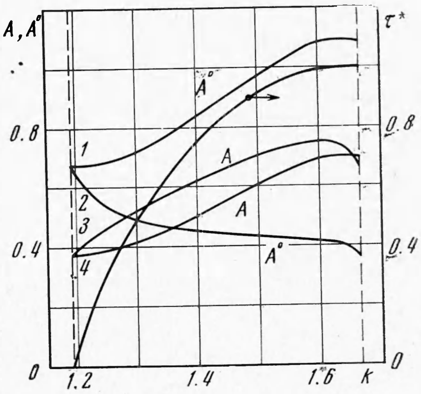
Отсюда видно, что для сшивания решения с политропическим надо задать величины $\tau_1$ и $\varepsilon_1$, где теперь $\tau_1$ — безразмерный начальный градиент полной температуры

$$\tau_1 = (\tau_1^e + \tau_1^i) / (1 + \tau_*)$$

При этом $\tau_1^e$ и $\tau_1^i$ остаются пока произвольными. Однако из (2.13) нетрудно заметить, что при $k \to {}^5/_3$ $\tau_1^i \to -\tau_* \varepsilon_1 / 3$, где $-\varepsilon_1 / 3$ стремится к адиабатическому градиенту $\tau_1 = -1/\sqrt{3}$. Поэтому если принять естественное допущение, что $\tau_1^i$ пропорционально $\tau_*$ и $\tau_1$ для всех $k$ $(\tau_1^i = \tau_* \tau_1)$, то тогда опять получим $\tau_1^e = \tau_1$, а для $\tau_*$ из (2.13) с учетом (2.12) имеем уравнение

$$\frac{\tau_* (1+\tau_*)^2}{1-\tau_*} = \frac{6.32}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{k+1}}{k} \frac{\beta_j}{{}^5/_3 - k} \qquad (2.14)$$

Это кубическое относительно $\tau_*$ уравнение легко решается по формуле Кардана.



Фиг. 2

Таким образом, система (2.9) — (2.11) с учетом (2.12) и (2.14) полностью готова для счета и итерационной настройки $\beta_j$, и параметров $\tau_*^j$, $\beta_j^\circ$, $B_j^*$. В качестве первого приближения для $\beta_1$ можно снова взять (2.8).

Очевидно, что принятая здесь взаимосвязь $\tau_1^i = \tau_* \tau_1$ не является единственно возможной.

**3. Численные результаты и обсуждение.** При настройке $\beta_j$ $(k)$ оказалось, что с уменьшением $k$, начиная с некоторого значения $k_*$, $T$ — кризис отсутствует. Объяснение этого явления таково. Вблизи порога $(k \to k_*)$ $\beta \to 0$, поэтому, полагая здесь $\beta \equiv 0$ и отбрасывая квадратную скобку в (2.3), (2.9), получаем решение

$$t_e = (1 - 7/2\, |\tau_1|\, \mathrm{arc\,tg}\, x)^{2/7}$$

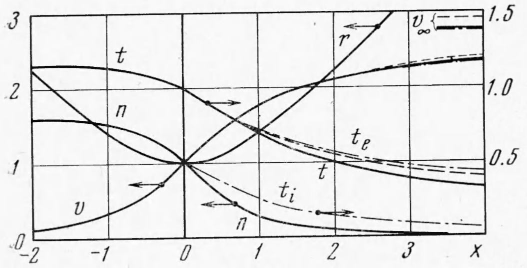
Для $|\tau_1| < {}^4/_7\,\pi$ это решение при $x \to \infty$ уже не достигает нуля. Отсюда для граничного $k$ имеем уравнение

$$(k-1)/\sqrt{k+1} = 2\sqrt{2}/7\pi$$

решение которого есть $k_* = 1.19035$.

Величина $k_*$ зависит от профиля сопла $r(x)$. При меньшей расходимости сопла по сравнению с (2.1) $k_* \to 1$.

Как выяснилось при настройке $\beta$ и $\beta°$, их зависимость от $k$ хорошо описывается формулами вида $A(k-k_*)/({}^5/_3 - k)$, где $A(k)$ — множители порядка единицы, представленные на фиг. 2. Кривые *1* и *4* относятся к случаю $T_i \equiv 0$, кривые *2*, *3* — к случаю $T_i \not\equiv 0$. Там же дана зависимость $\tau_*(k)$. Вертикальные штриховые прямые задают диапазон изменения $k$ от $k_* = 1.19035$ до $k = {}^5/_3$.




Фиг. 3

На фиг. 3 представлено типичное расчетное распределение газодинамических величин для $k = 1.3$ и профиля $r(x)$ согласно (2.1). Там же приведено политропическое решение. Здесь и ниже при сравнении трех случаев кривые представлены сплошной линией для политропы, штриховой — для $T_i \equiv 0$ и штрих-пунктиром — для $T_i \not\equiv 0$. Видно, что общий ход решения весьма близок к политропическому. Более заметно различие в ходе температур, причем $t_i$ с ростом $x$ падает быстрее $t_e$, но суммарная температура $t$ также близка в политропической. При $k \to k_*$ расхождение точного и политропического решений возрастает. Видно также, что в этом случае эффект теплообмена не имеет существенного значения.

При $k \to {}^5/_3$ из-за больших значений $\beta°$ точности настройки $\beta_j$ (вплоть до девятого знака) оказалось недостаточно для заметного продвижения решения по $x$.

Распределение энергии ионов для разных $k$ и нормированной на $W_*$ разности потенциалов в потоке ($T_i \not\equiv 0$) представлено на фиг. 4 (последняя — пунктиром). Уравнение для разности потенциалов $e|\Delta\varphi|$ получено из (1.2)

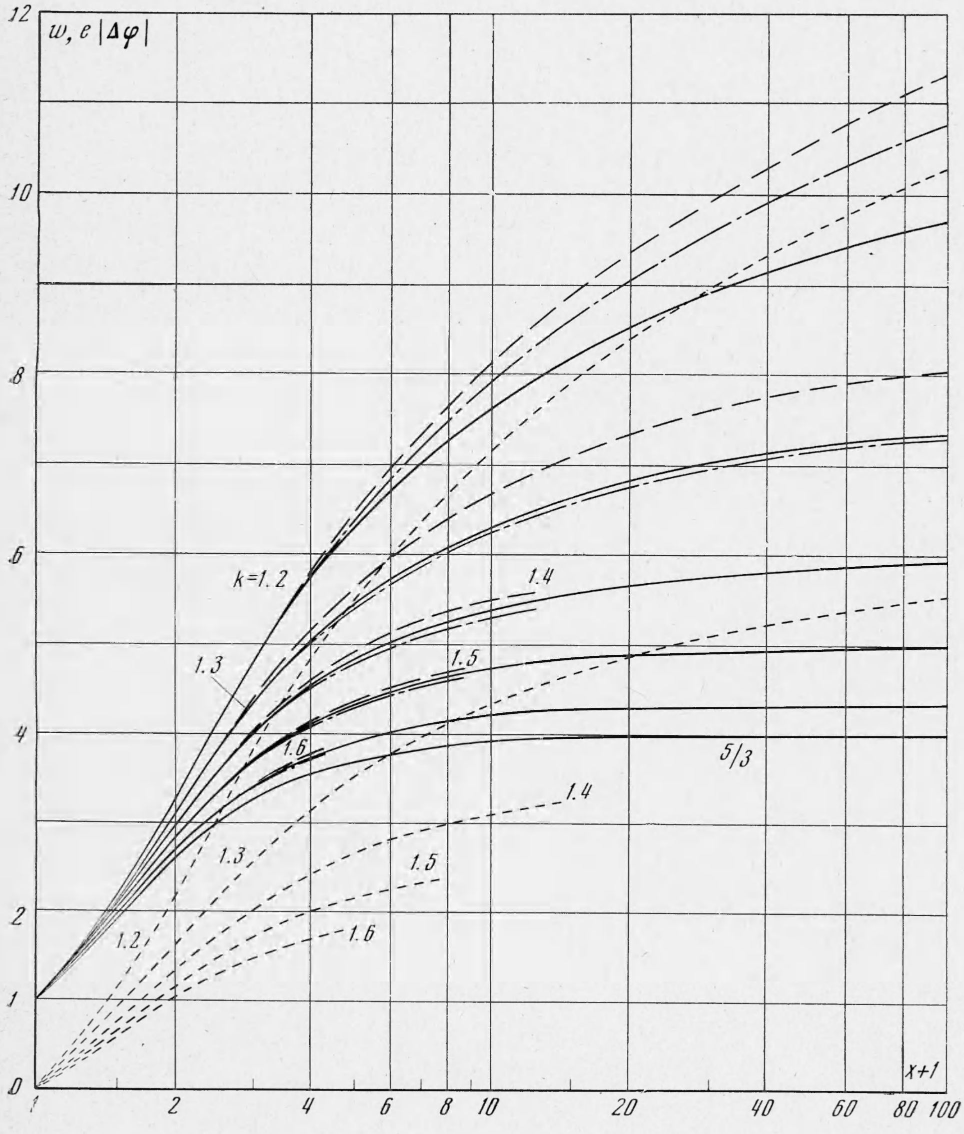
$$e|\Delta\varphi|' = \frac{2}{k(1+\tau_*)}\left[t_e\left(\frac{s'}{s} + \frac{w'}{2w}\right) - 1.71\,t_e'\right]$$

Из фиг. 4 и анализа (1.2), (1.3) вытекает интересный вывод о роли термосилы $R_T$. Поскольку $R_T$ — сила внутренняя, она в целом не сказывается на ускорении плазмы (см. (1.3)), однако существенно влияет на величину другой внутренней силы — электрической — и на соотношение перепада потенциалов $e|\Delta\varphi|$ и энергии ионов $w$. Например, при $k \to k_*$, когда $T_i \sim 0$, сила $eNE$ больше $-dP_e/dX$ на величину $R_T$, поэтому разность потенциалов может быть больше энергии ионов. При $k \to {}^5/_3$, когда вклад силы $-dP_i/dX$ велик, $e|\Delta\varphi|$ меньше $w$, но и при адиабатическом истечении ($k = {}^5/_3$), в потоке реализуется вполне определенный конечный перепад потенциала.

Важной характеристикой течения плазмы является энергия ионов на бесконечности. Ее величину можно найти из (1.5)

$$w_\infty = \frac{H}{IW_*} = 1 + \frac{5}{k} + \frac{2}{k}\,\frac{|\tau_1{}^e|}{\beta} \qquad (3.1)$$

Последнее слагаемое в (3.1) определяет вклад теплопроводности электронов. При $\beta \to \infty$ (адиабата) роль $q_e$ несущественна, и тогда получаем обычное значение $w_\infty = v_\infty^2 = 4$.




Фиг. 4

Формально энергия ионов на бесконечности при $k \to k_*$ может быть сколько угодно большой, однако на самом деле здесь вступает в силу ряд существенных физических ограничений. Первое из них — необходимость выполнения условия макроскопического описания. Тогда, полагая в критическом сечении $\lambda_e^* \lesssim X_*$, получаем для разных газов таблицу предельных значений.

Такое ограничение $w_\infty$ физически соответствует тому, что тепловой поток электронов $q_e^*$ не может превысить своего естественного верхнего предела — хаотического потока тепла

$$q_e^\circ = 2T_e^* N_* \nu_e^* / 4 \qquad (3.2)$$

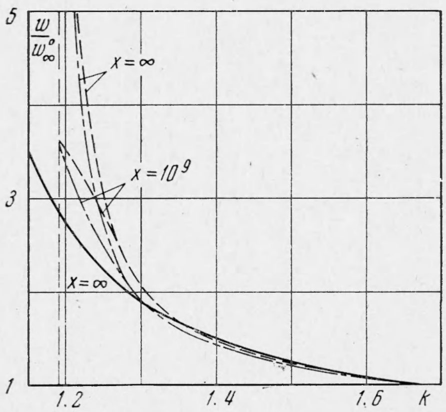
В последнем случае находим

$$w_{\max}^\infty = 1 + \frac{5}{k} + \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \sqrt{\frac{M}{m}}$$

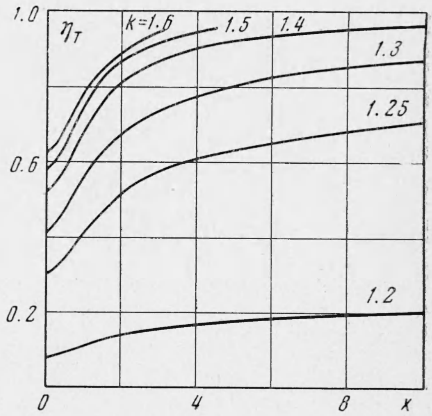
Эта величина всего примерно в $^4/_3$ раза больше значений, приведенных в таблице.

Необходимо также учитывать, что условие $\lambda_e^* < X_*$ для течения с подогревом не всегда ведет к условию $\lambda_e < X$ по потоку. В самом деле, учитывая, что $\lambda_e = \lambda_e^* t_c^2 / n$, для политропы имеем $\lambda_e = \lambda_e^* n^{2k-3}$. Аналогично из уравнения неразрывности находим $X \approx X_* w^{-0.25} n^{-0.5}$, где $w^{-0.25} \sim 1$. Тогда условие в потоке $\lambda_e < X$ переходит в неравенство $n^{2k-2.5} < X_* / \lambda_e^*$. Для его выполнения при $n_\infty \to 0$ требуется $k > 1.25$. При $k < 1.25$, начиная с некоторого значения $x$, первоначальное условие $X / \lambda_e^* \gg 1$ уже не выполняется, и дальше необходимо кинетическое решение. Интересно, что в этом случае параметры $\beta_j$, а следовательно, и мощность потока $H$, известны уже с достаточной точностью, поэтому задачей кинетического решения является лишь уточнение пространственного хода усредненных параметров и функций распределения частиц.

| Газ | $\beta^\circ_{min} \cdot 10^3$ | $k_{min}$ | $W^\infty_{\max}/W^\circ_\infty$ |
|---|---|---|---|
| H | 23.3 | 1.208 | 6.5 |
| $H_2$ | 16.5 | 1.203 | 8.85 |
| He | 11.6 | 1.199 | 12.1 |
| Li | 8.85 | 1.197 | 16.2 |
| $N_2$ | 4.41 | 1.1935 | 31.5 |
| Ar | 3.70 | 1.1930 | 38.3 |
| Fe | 3.12 | 1.1926 | 45.0 |
| Zs | 2.02 | 1.1918 | 68.3 |
| Hg | 1.65 | 1.1916 | 84.0 |



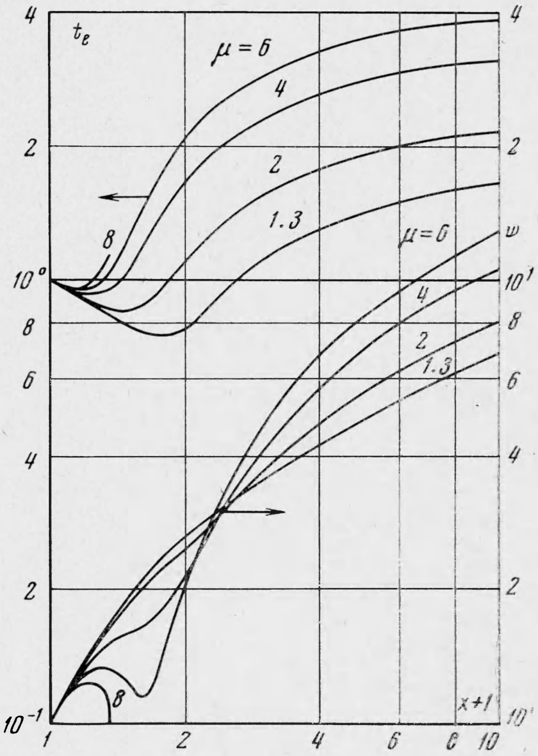

Фиг. 5




Фиг. 6

Второе условие применимости макроскопических уравнений — условие малости дебаевского радиуса $\delta \ll X$. Нетрудно показать, что это условие, которое для политропы переходит в неравенство $n^{0.5(k-1)} \ll X_* / \delta_*$, выполняется при $n_\infty \to 0$ вплоть до $k = 1$. Следовательно, в этом случае, несмотря на нарушение условия $\lambda_e < X$ в потоке, тепловая энергия электронов благодаря электрическому полю $E$ целиком переходит в кинетическую энергию ионов на бесконечности.

Сравним энергию ионов с энергией при адиабатическом истечении. На фиг. 5 для разных $k$ приведены предельные энергии ионов на бесконечности, а также ее расчетные значения для достаточно больших $x$ (вплоть до $x = 10^9$). Эти величины отнесены к адиабатической энергии на бесконечности $w_\infty{}^\circ$. Согласно фиг. 5 и таблице при $k \to k^*$ энергия ионов на бесконечности может быть больше адиабатической в десятки раз. Однако даже для $x = 10^9$ расчетная энергия превышает адиабатическую не более чем в 3.7 раза. Это составляет примерно $W \sim \sim 9T_e{}^*$. При реальных значениях $x \sim 10^1 - 10^2$ энергия ионов $\sim 5{-}7T_e{}^*$, что примерно соответствует потенциалу изолированного тела в плазме [5]. Такая энергия ионов неоднократно отмечалась в экспериментах [5-7, 15]. Учитывая сказанное, замечаем, что течения разреженной плазмы с $\lambda_e{}^* \sim X_*$ реально характеризуются очень низким к.п.д. $\eta_T = F^2/2MIH$, где $F(X) = S(P + MIV)$, поскольку для достижения $\eta_T \sim 1$ требуется недопустимо большое расширение сопла (см. фиг. 6). Такое снижение к.п.д. определяется большими потерями тепла за срез ускорителя, идущими на «обогрев» бесконечности. Аналогичный вывод сохраняет силу и для ускорителей плазмы других типов, в которых имеется прямой тепловой контакт области разряда с бесконечностью.




Фиг. 7

Заметим, что этот механизм потерь в лабораторных условиях проявляется не в полной мере, так как реально длина канала ограничена стенкой и электроны, запертые заряженным пристеночным слоем, уносят на стенку мощность $H_e = I \cdot 2T_e$, т. е. потери энергии на каждый электрон составляют не более $2T_e$ в отличие от $\sim T_e\sqrt{M/m}$ в случае истечения на бесконечность при $\lambda_e{}^* \sim X_*$. Фактически при наличии стенки вместо условий для $T_e$ на бесконечности для настройки решения необходимо граничное условие на стенке, которое легко вывести по аналогии с выводом диффузионного потока частиц [18], пользуясь упомянутым выше хаотическим потоком тепла (3.2)

$$T_e = -f\lambda_e\, dT_e / dX \qquad (X = X_w) \tag{3.3}$$

где $f$ — кинетический коэффициент порядка единицы. Условие (3.3) определяет воможность лабораторного моделирования течения плазмы на бесконечность. В частности, в указанном здесь случае разреженной плазмы оба течения из-за различия в потоках тепла должны сильно отличаться.

Стоит, однако, отметить, что все выводы о состоянии на бесконечности получены для стационарного режима. Для течения с $\lambda_e{}^* \sim X_*$, когда существенны процессы на очень больших длинах, реальное течение фактически нестационарно, и здесь необходимо дополнительное рассмотрение.

В процессе счета был выяснен также ход решения в «закризисных» режимах. Оказалось, что при $\beta < \beta_\infty$ ($T$ — кризис), $t_e$ по-прежнему круто идет в нуль при медленном росте $w$. Другой случай $\beta > \beta_\infty$ ($T'$-кризис) оказался интереснее (см. фиг. 7; случай $T_i \not\equiv 0$, $k = 1.5$). При небольшом превышении

$$\mu = \beta / \beta_\infty \gtrsim 1$$

$t_e$ сначала падает, затем растет и выходит на постоянное значение. Энергия из-за роста $t_e$ (а также $t_i$) растет быстрее, чем при $\mu = 1$. Это решение формально соответствует наличию впереди по потоку источника тепла. При $\mu = 4 \div 8$ температуры нарастают настолько быстро, что происходит запирание потока. Это явление напоминает известное в аэродинамике явление теплового кризиса [19].

В заключение автор благодарит И. К. Фетисова за полезное обсуждение.

Поступила 14 VI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Плютто А. А. Ускорение положительных ионов в расширяющейся плазме вакуумных искр. ЖЭТФ, 1960, т. 39, вып. 6, стр. 1589.
2. Плютто А. А., Рыжков В. Н., Капин А. Т. Высокоскоростные потоки плазмы вакуумных дуг. ЖЭТФ, 1964, т. 47, вып. 2, стр. 494.
3. Salz F., Meyerand R. G., Lary E. C., Walch A. P. Electrostatic potential gradients in a Penning discharge. Phys. Rev. Letters, 1961, vol. 6, No. 10, p. 523.
4. Rose D. J., Esterling R. J. Calculation of distributions in one-dimensional plasma sheaths. J. Appl. Phys., 1962, vol. 33, No. 11, p. 3317.
5. Габович М. Д. Плазменные источники ионов. Киев, «Наукова думка», 1964.
6. Габович М. Д., Романюк Л. И., Усталов В. В. Истечение плазмы из разряда Пеннинга с накаленным катодом в вакуумную область, свободную от магнитного поля. Ж. техн. физ., 1969, т. 39, вып. 2, стр. 291.
7. Andersen S. A., Jensen V. O., Nielsen P., D'Angelo N. Continuous supersonic plasma wind tunnel. Phys. Fluids, 1969, vol. 12, No. 3, p. 557.
8. Beckmann H., Chapman A. J. Thrust from partly ionised monatomic gases. ARS Journal, 1962, vol. 32, No. 9, p. 1369.
9. Габович М. Д., Пасечник Л. Л., Лозовая Е. А. Выход в вакуум плазмы с большой концентрацией заряженных частиц. Ж. техн. физ., 1961, т. 31, вып. 9, стр. 1049.
10. Сарычев В. М. Одномерное движение термически неравновесной плазмы. ПМТФ, 1962, № 3, стр. 15.
11. Кузнецов Н. М., Райзер Ю. П. О рекомбинации электронов в плазме, расширяющейся в пустоту. ПМТФ, 1965, № 4, стр. 10.
12. Chou Y. S., Talbot L. Sourse — flow expansion of a partialli ionised gas into a vacuum. AIAA Journal, 1967, vol. 5,No. 12, p. 2166.
13. Лукьянов Г. А. Стационарный сверхзвуковой источник неравновесной плазмы. ПМТФ, 1968, № 6, стр. 13.
14. Ваулин Е. П., Одинцова Г. А. Некоторые вопросы истечения плазмы смесей в вакуум. В сб. «Генераторы низкотемпературной плазмы», М., «Энергия», 1969.
15. Афанасьев Н. В., Капельян С. Н., Филиппов Л. П., Морозов В. А. О скоростях плазменных струй. Ж. прикл. спектроскопии, 1969, т. 11, вып. 4, стр. 629.
16. Брагинский С. И. Явления переноса в плазме. В сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 1, М., Госатомиздат, 1963, стр. 183.
17. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., «Наука», 1966.
18. Литвинов И. И. Распределение диффундирующих частиц вблизи поглощающей стенки. ПМТФ, 1971, № 2, стр. 21.
19. Абрамович Г. Н. Прикладная газовая динамика. М., «Наука», 1969.
20. Вулис Л. А. Термодинамика газовых потоков. М., Госэнергоиздат, 1950.
21. Домбровский Г. А. Метод аппроксимации адиабаты в теории плоских течений газа. М., «Наука», 1964.