

УДК 532.135

ЗАДАЧА О ЗАПОЛНЕНИИ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ В СРЕДЕ КЕЛЬВИНА — ФОЙГТА

С. В. Осипов

Тюменский нефтяной научный центр, 625000 Тюмень

E-mail: svosipov@tnk-bp.com

Проводится математическое моделирование и решение задачи схлопывания сферической полости в вязкоупругой среде под действием постоянного давления на бесконечности. Построено дифференциальное уравнение движения границы полости и получено его численное решение. Установлено существование трех режимов движения границы и построена карта этих режимов на плоскости определяющих параметров. Получена асимптотика решения задачи во всех найденных режимах. Сформулирована и решена задача схлопывания полости с учетом капиллярных сил.

Ключевые слова: среда Кельвина — Фойгта, вязкоупругая среда, заполнение полости, конечные деформации.

Задачи о схлопывании пузырьков в жидких средах изучались различными исследователями. Одним из первых задачу о заполнении сферической полости в невязкой несжимаемой жидкости рассмотрел Дж. Рэлей. В [1] обнаружено, что направленная к центру скорость поверхности полости в конце процесса заполнения неограниченно увеличивается по закону $r^{-3/2}$, т. е. происходит неограниченная кумуляция энергии. Это может служить причиной быстрого износа гребневых винтов и турбин, работающих в условиях кавитации: схлопывание пузырьков на металлической поверхности может приводить к ее интенсивному разрушению. В работах [2, 3] рассмотрена задача Рэля для вязкой жидкости (результаты этих исследований приведены также в [4]). Показано, что в зависимости от начального радиуса полости существует два режима ее заполнения: при радиусе, меньшем критического, заполнение происходит за неограниченное время, кумуляция энергии полностью устраняется вязкостью; при достаточно большом начальном радиусе полость быстро схлопывается с неограниченной кумуляцией энергии на стадии фокусировки. Независимо от других исследователей элегантное решение проблемы о заполнении полости в вязкой жидкости представил Е. И. Забабахин [5], поэтому данную задачу называют задачей Забабахина.

В. К. Андреев и В. А. Гальперин, исследовав поведение пузырьков в вязкой жидкости с учетом капиллярных сил, получили иной результат: если начальный радиус пузырька достаточно мал (меньше критического), то скорость заполнения уменьшается, но не до нуля, и пузырек заполняется за конечное время [6].

Диффузионное растворение пузырьков в релаксирующей среде рассматривалось в работах [7, 8], диффузионный рост — в [9, 10]. В работах [11, 12] проведен численный анализ схлопывания пустой каверны и нелинейных колебаний пузырьков в жидкостях Олдройда, Ривлина — Эриксона, Джеффри и в жидкости с запаздыванием скорости деформации.

Представляет интерес изучение движения границы пузырьков при наличии сил упругости. В данной работе рассматривается задача о заполнении сферической полости в вязкоупругой среде Кельвина — Фойгта под действием постоянного давления на бесконечности.

1. Модель среды Кельвина — Фойгта определяется уравнением состояния вида

$$P = -pI + 2\mu D + 2\rho\kappa E, \quad (1)$$

где P — тензор напряжений; D — тензор скоростей деформаций; E — тензор конечных деформаций; p — давление; μ , ρ , κ — вязкость, плотность и удельный модуль сдвига соответственно, являющиеся постоянными. В силу сферической симметрии движения тензор P является диагональным, причем $P_{\theta\theta} = P_{\varphi\varphi}$. Тензор D также является диагональным, и $D_{rr} = \partial u / \partial r$, $D_{\theta\theta} = D_{\varphi\varphi} = u/r$.

Для определения компонент тензора деформаций E в сферической системе координат используем представление

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \varphi \sin \theta, & x_2 &= r \sin \varphi \sin \theta, & x_3 &= r \cos \theta, \\ X_1 &= \xi \cos \varphi \sin \theta, & X_2 &= \xi \sin \varphi \sin \theta, & X_3 &= \xi \cos \theta. \end{aligned}$$

Здесь X_i , $\xi = (r^3 - s(t)^3 + a^3)^{1/3}$ и x_i , r — лагранжевы и эйлеровы координаты в декартовой и сферической системах соответственно; $r = s(t)$ — свободная граница пузырька; a — начальный радиус. Тензор конечных деформаций определяется соотношением (см. [13, 14])

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(I_{ij} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \right).$$

Так как

$$X_i = x_i \frac{((x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2} - s^3 + a^3)^{1/3}}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}},$$

то

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} &= \delta_{ij} \frac{((x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2} - s^3 + a^3)^{1/3}}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}} + \\ &+ x_i x_j \frac{s^3 - a^3}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2} ((x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2} - s^3 + a^3)^{2/3}} = \\ &= \delta_{ij} \frac{(r^3 - s^3 + a^3)^{1/3}}{r} + x_i x_j(r, \varphi, \theta) \frac{s^3 - a^3}{r^3 (r^3 - s^3 + a^3)^{2/3}} \end{aligned}$$

(δ_{ij} — символ Кронекера).

Поскольку задача обладает сферической симметрией, будем считать $\cos \varphi \sin \theta = 1$. В результате в сферической системе координат имеем

$$2E_{rr} = 1 - r^4 (r^3 - s^3 + a^3)^{-4/3}, \quad 2E_{\theta\theta} = 2E_{\varphi\varphi} = 1 - r^2 (r^3 - s^3 + a^3)^{2/3}.$$

Используя формулу для вычисления дивергенции тензора в сферической системе координат, с учетом симметрии движения из общего уравнения импульса $\rho dv/dt = \operatorname{div} P$ получаем

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 P_{rr})}{\partial r} - \frac{2P_{\theta\theta}}{r}. \quad (2)$$

Обозначим $P_{rr} = Q$ и введем новую искомую функцию $P_{rr} - P_{\theta\theta} = R$. Тогда уравнение (2) записывается в виде

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\partial Q}{\partial r} + \frac{2R}{r}. \quad (3)$$

Так как среда Кельвина — Фойгта является несжимаемой жидкостью, уравнение неразрывности для нее в сферических координатах имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r} = 0. \quad (4)$$

Реологическое соотношение (1) для среды Кельвина — Фойгта формально содержит три уравнения, соответствующих пространственным координатам, но второе и третье уравнения совпадают, поэтому остается два независимых:

$$Q = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} + \rho\chi[1 - r^4(r^3 - s^3 + a^3)^{-4/3}],$$

$$Q - R = -p + 2\mu u/r + \rho\chi[1 - r^{-2}(r^3 - s^3 + a^3)^{2/3}].$$

Из этих уравнений можно исключить давление (не определяя его в дальнейшем, так как динамическое условие на свободной границе содержит лишь функцию Q). В результате, используя равенство (4) и учитывая область определения, получим

$$R = -6\mu u/r + \rho\chi[r^{-2}(r^3 - s^3 + a^3)^{2/3} - r^4(r^3 - s^3 + a^3)^{-4/3}], \quad t > 0, \quad r > s(t). \quad (5)$$

Система (3)–(5) является замкнутой, причем уравнение (4) интегрируется:

$$u = s^2 \dot{s} / r^2, \quad t > 0, \quad r \geq s(t). \quad (6)$$

Здесь учтено кинематическое условие $u = \dot{s}$ на свободной границе пузырька $r = s(t)$; точка обозначает производную по t . Подставив выражение (6) в уравнения (3), (5), имеем

$$\frac{\partial Q}{\partial r} + \frac{2R}{r} = \rho \left(\frac{s^2 \ddot{s} + 2s \dot{s}^2}{r^2} - \frac{2s^4 \dot{s}^2}{r^5} \right), \quad t > 0, \quad r > s(t); \quad (7)$$

$$R = -6\mu s^2 \dot{s} / r^3 + \rho\chi[r^{-2}(r^3 - s^3 + a^3)^{2/3} - r^4(r^3 - s^3 + a^3)^{-4/3}], \quad t > 0, \quad r > s(t). \quad (8)$$

После исключения функции R из системы (7), (8) получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial r} = 12\mu \frac{s^2 \dot{s}}{r^4} - 2\rho\chi[r^{-3}(r^3 - s^3 + a^3)^{2/3} - r^3(r^3 - s^3 + a^3)^{-4/3}] + \\ + \rho \left(\frac{s^2 \ddot{s} + 2s \dot{s}^2}{r^2} - \frac{2s^4 \dot{s}^2}{r^5} \right), \quad t > 0, \quad r > s(t). \end{aligned} \quad (9)$$

Начальное условие для (9) имеет вид

$$Q = 0, \quad t > 0, \quad r = s(t). \quad (10)$$

Интегрируя уравнение (9) с использованием условия (10), имеем

$$Q + c = -4\mu \frac{s^2 \dot{s}}{r^3} - \rho\chi \frac{r^3 + s^3 - a^3}{r^2(r^3 - s^3 + a^3)^{1/3}} + \rho \left(-\frac{s^2 \ddot{s} + 2s \dot{s}^2}{r} + \frac{s^4 \dot{s}^2}{2r^4} \right), \quad (11)$$

где

$$c = -4\mu \frac{\dot{s}}{s} - \rho\chi \frac{2s^3 - a^3}{s^2 a} - \rho \left(s \ddot{s} + \frac{3}{2} \dot{s}^2 \right).$$

Устремляя r к бесконечности и используя предельное значение $Q = -p_0$, $r \rightarrow \infty$, из равенства (11) получим нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка для функции $s(t)$ с известными начальными условиями:

$$\ddot{s} + \frac{3}{2} \frac{\dot{s}^2}{s} + 4\nu \frac{\dot{s}}{s^2} + \chi \frac{2s^3 - a^3}{s^3 a} + \left(\frac{p_0}{\rho} - \chi \right) \frac{1}{s} = 0; \quad (12)$$

$$s(t) = a, \quad \dot{s}(t) = 0, \quad t = 0. \quad (13)$$

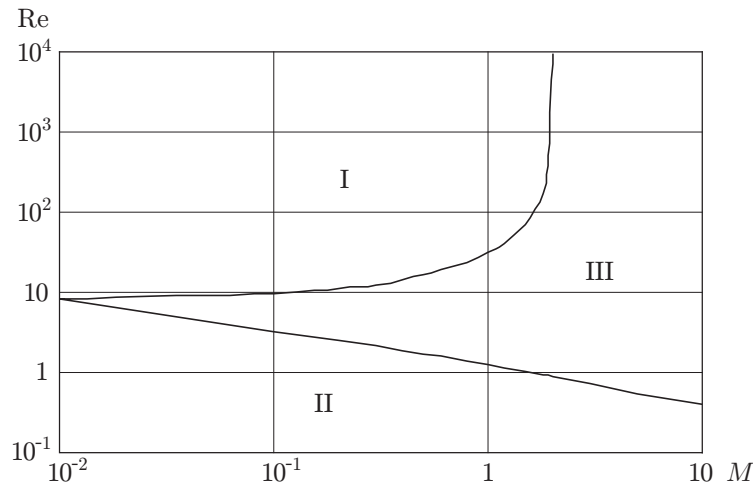


Рис. 1. Режимы поведения границы полости на плоскости (M, Re)

Данное уравнение решается численно. Для удобства проведем обезразмеривание переменных, введя в качестве масштабов длины и скорости величины a/Re и $\sqrt{p_0/\rho}$ соответственно ($\text{Re} = (a/\nu)\sqrt{p_0/\rho}$ — число Рейнольдса). В результате уравнение (12) с начальными условиями (13) принимает вид

$$\ddot{s} + \frac{3}{2} \frac{\dot{s}^2}{s} + 4 \frac{\dot{s}}{s^2} + (1 - M) \frac{1}{s} - M \text{Re}^2 \frac{1}{s^3} + 2 \frac{M}{\text{Re}} = 0; \quad (14)$$

$$s(t) = \text{Re}, \quad \dot{s}(t) = 0, \quad t = 0, \quad (15)$$

где $M = \kappa\rho/p_0$.

Из решения задачи (14), (15) следует, что существует несколько режимов движения границы полости (на рис. 1 приведена карта этих режимов на плоскости (M, Re)):

- 1) схлопывание в точку (область I);
- 2) монотонное уменьшение радиуса до некоторого значения $s > 0$ (область II);
- 3) немонотонное уменьшение радиуса до некоторого значения $s > 0$ (область III).

В первом случае скорость схлопывания увеличивается до бесконечности, во втором и третьем становится равной нулю.

На рис. 2–4 приведены решения $s(t)$ задачи (14), (15) при различных значениях параметров Re , M (кривые 1).

Для режима 1, когда полость сходится в точку, можно построить асимптотику решения уравнения (14) в нуле (в момент схлопывания). Для этого выделим главные члены, используя представление $s(t) = A(t_* - t)^n$. В результате получим уравнение для определения коэффициентов A , n :

$$\left(\frac{5n^2}{2} - n\right)A(t_* - t)^{n-2} - \frac{4n}{A}(t_* - t)^{-n-1} - \frac{M \text{Re}^2}{A^3}(t_* - t)^{-3n} = 0.$$

Находим показатель $n = 1/2$. В этом случае получаем биквадратное уравнение

$$A^4 - 16A^2 - 8M \text{Re}^2 = 0.$$

Поскольку $s(t) \geq 0$, это уравнение имеет два корня:

$$A_{1,2} = \sqrt{8 \pm (64 + 8M \text{Re}^2)^{1/2}},$$

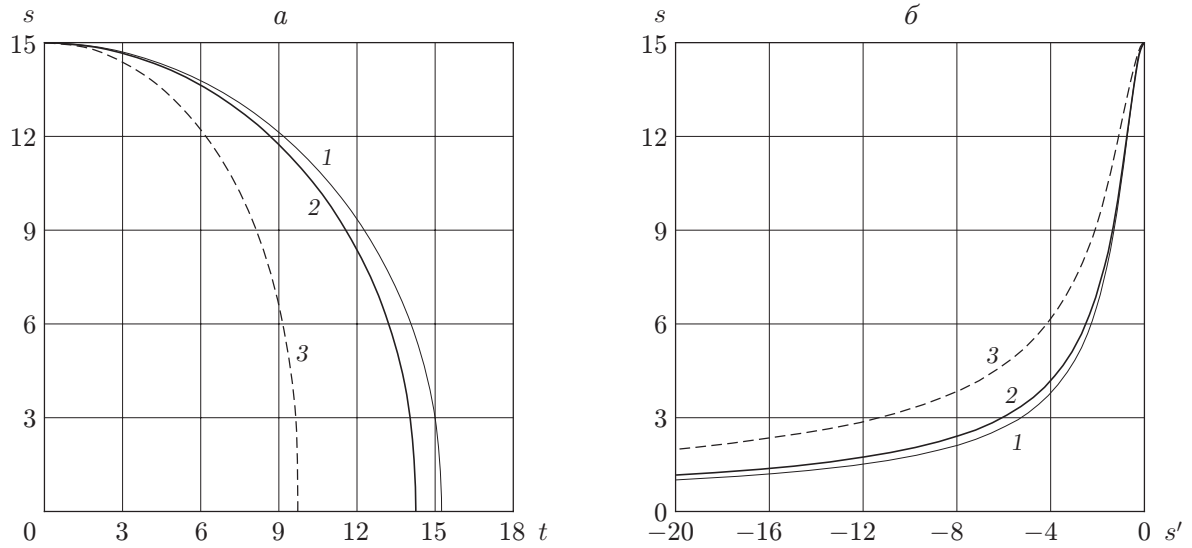


Рис. 2. Зависимости радиуса полости от времени (а) и скорости движения ее границы (б) при $Re = 10, M = 0,1$:
 1 — $N = 0$; 2 — $N = 1$; 3 — $N = 10$

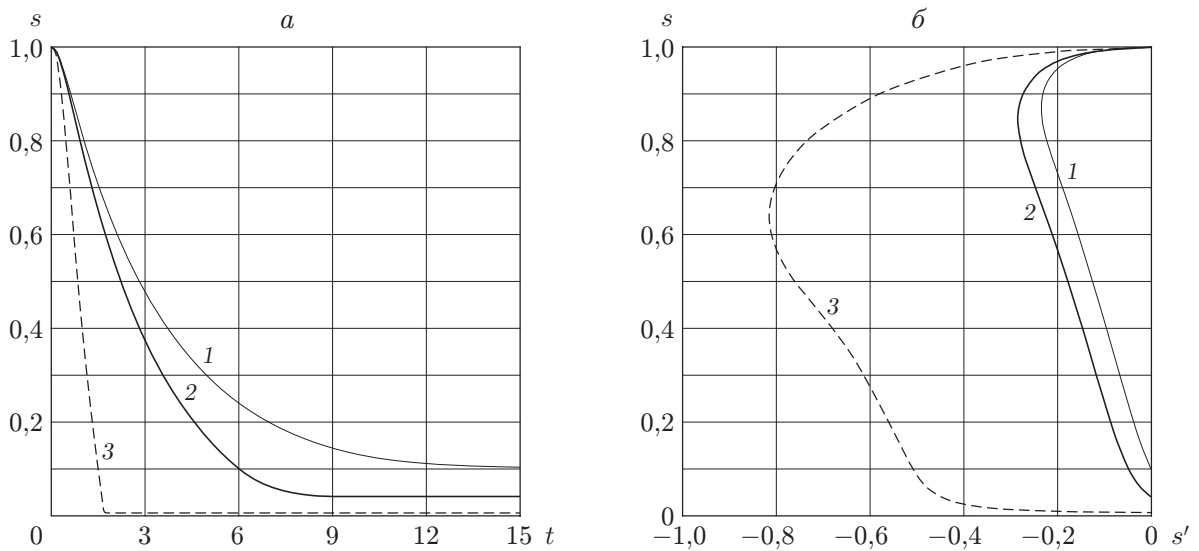


Рис. 3. Зависимости радиуса полости от времени (а) и скорости движения ее границы (б) при $Re = 1, M = 0,01$:
 1 — $N = 0$; 2 — $N = 0,1$; 3 — $N = 1$

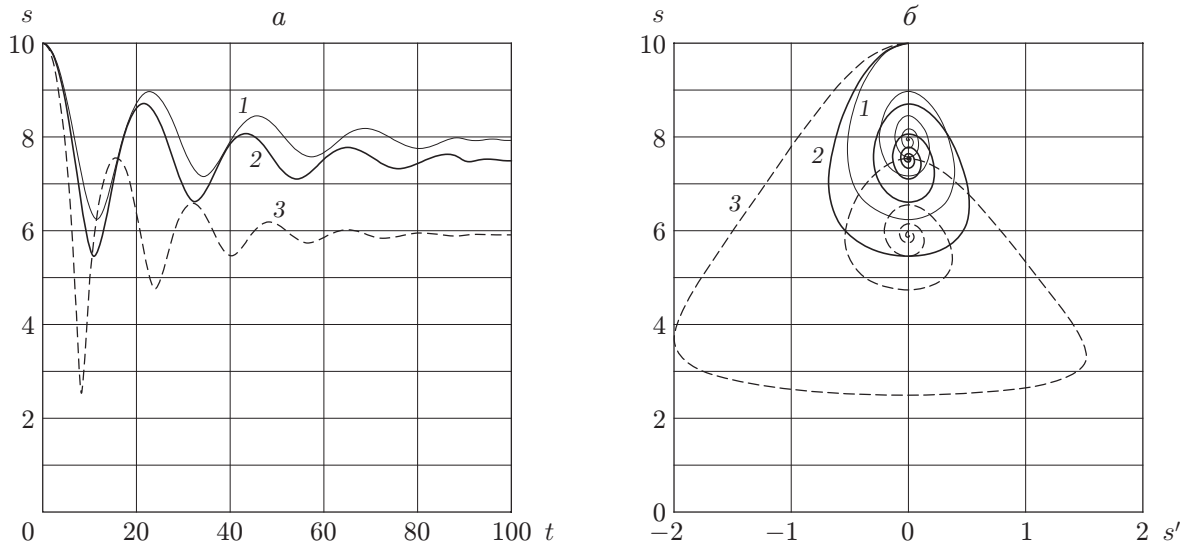


Рис. 4. Зависимости радиуса полости от времени (а) и скорости движения ее границы (б) при $Re = 10$, $M = 1$:
1 — $N = 0$; 2 — $N = 1$; 3 — $N = 5$

из которых физический смысл имеет корень с неотрицательным дискриминантом. В результате асимптотическое поведение границы в момент схлопывания полости может быть описано выражением

$$s(t) = [8 + (64 + 8M Re^2)^{1/2}]^{1/2} (t_* - t)^{1/2}, \quad t \rightarrow t_*.$$

Соответственно выражение для скорости схлопывания имеет вид

$$\dot{s}(t) = -[8 + (64 + 8M Re^2)^{1/2}]^{1/2} (t_* - t)^{-1/2} / 2, \quad t \rightarrow t_*$$

или

$$u(s) = -[8 + (64 + 8M Re^2)^{1/2}] / (2s), \quad s \rightarrow 0.$$

Переходя к пределу “по упругости” $M \rightarrow 0$, имеем $u(s) = -8/s$, $s \rightarrow 0$, что согласуется с решением задачи Забабахина о схлопывании полости в вязкой жидкости [5].

Для режимов 2, 3, когда силы упругости достаточно велики и препятствуют схлопыванию полости, предельный радиус границы полости d может быть определен из уравнения (14). Учитывая, что скорость и ускорение движения границы стремятся к нулю ($s(t) \rightarrow d$, $\dot{s}(t) \rightarrow 0$, $\ddot{s}(t) \rightarrow 0$), для определения константы d получаем уравнение

$$2Md^3 + Re(1 - M)d^2 - M Re^3 = 0, \quad (16)$$

действительный корень которого является предельным значением d .

Используя обозначения $u = \dot{s}$, $r = s(t)$, понизим порядок уравнения (14):

$$\frac{du}{ds} + \frac{3}{2} \frac{u}{s} + \frac{4}{s^2} + (1 - M) \frac{1}{su} - M Re^2 \frac{1}{s^3 u} + 2 \frac{M}{Re u} = 0. \quad (17)$$

Исследуем уравнение (17) вблизи особой точки $s = d$, $u = 0$. Для этого выполним замену $q = s - d$ и с учетом соотношения (16) запишем (17) в виде

$$\frac{du}{dq} = - \frac{(4 Re (1 - M)d + 12Md^2)q + (3 Re d^2 + 8 Re d)u + \varphi(q, u)}{2 Re d^3 u + \phi(q, u)},$$

где $\varphi(q, u) = \bar{o}(q, u)$; $\phi(q, u) = o(q, u)$. Соответствующее характеристическое уравнение и его корни имеют вид

$$\lambda^2 + (3 \operatorname{Re} d^2 + 8 \operatorname{Re} d)\lambda + 2 \operatorname{Re} d^3(4 \operatorname{Re}(1 - M)d + 12Md^2) = 0,$$

$$\lambda_1 = -\{ \operatorname{Re}(3d^2 + 8d) + [\operatorname{Re}^2(3d^2 + 8d)^2 - 8 \operatorname{Re} d^3(4 \operatorname{Re}(1 - M)d + 12Md^2)]^{1/2} \}/2,$$

$$\lambda_2 = -\{ \operatorname{Re}(3d^2 + 8d) - [\operatorname{Re}^2(3d^2 + 8d)^2 - 8 \operatorname{Re} d^3(4 \operatorname{Re}(1 - M)d + 12Md^2)]^{1/2} \}/2.$$

Очевидно, если корни различные и вещественные, то они имеют один и тот же знак. При этом особой точкой является узел, что соответствует режиму 2. Отметим, что тому же режиму соответствует случай вязкой жидкости при $M = 0$, а также случай, когда корни равны (при этом особой точкой является вырожденный узел). При мнимых корнях, очевидно, присутствует действительная часть, поэтому в данном случае особая точка представляет собой фокус, что соответствует режиму 3.

Для получения асимптотики скорости, когда $s(t) \rightarrow d$ монотонно, запишем $u(s) = A(s - d)^\alpha$. Подставляя данное соотношение в уравнение (17), имеем

$$\alpha A^2 (s - d)^{2\alpha - 1} + \frac{3}{2} A^2 \frac{(s - d)^{2\alpha}}{s} + 4A \frac{(s - d)^\alpha}{s^2} + \frac{2M}{\operatorname{Re}} \frac{(s - d_1)(s - d_2)(s - d)}{s^3} = 0.$$

Положим $\alpha = 1$. Тогда из уравнения

$$A^2 + 4A/d^2 + 2M(d - d_1)(d - d_2)/(d^3 \operatorname{Re}) = 0$$

определяется значение A

$$A_{1,2} = [-2d \operatorname{Re} \pm \sqrt{4d^2 \operatorname{Re}^2 - 2M \operatorname{Re} d^3 (d - d_1)(d - d_2)}] / (d^3 \operatorname{Re}),$$

где d_1, d_2 — второй и третий корни уравнения (16).

При $M \rightarrow 0$ искомому значению A соответствует знак “—”. Таким образом, скорость стремится к нулю как линейная функция границы полости:

$$u(s) = [-2d \operatorname{Re} - \sqrt{4d^2 \operatorname{Re}^2 - 2M \operatorname{Re} d^3 (d - d_1)(d - d_2)}] (s - d) / (d^3 \operatorname{Re}).$$

2. Рассмотрим поведение полости в вязкоупругой среде Кельвина — Фойгта с учетом капиллярных сил. В этом случае уравнение (12) принимает вид

$$\ddot{s} + \frac{3}{2} \frac{\dot{s}^2}{s} + 4\nu \frac{\dot{s}}{s^2} + \left(\frac{p_0}{\rho} - \varkappa \right) \frac{1}{s} + \frac{2\sigma}{\rho s^2} + \varkappa \frac{2s^3 - a^3}{s^3 a} = 0.$$

В безразмерных переменных это уравнение и начальные условия записываются следующим образом:

$$\ddot{s} + \frac{3}{2} \frac{\dot{s}^2}{s} + 4 \frac{\dot{s}}{s^2} + (1 - M) \frac{1}{s} + 2N \frac{1}{s^2} - M \operatorname{Re}^2 \frac{1}{s^3} + 2 \frac{M}{\operatorname{Re}} = 0; \quad (18)$$

$$s(t) = \operatorname{Re}, \quad \dot{s}(t) = 0, \quad t = 0. \quad (19)$$

Здесь $N = \sigma / (\nu \sqrt{p_0 \rho})$.

Решение задачи (18), (19) ищется с помощью численного интегрирования. Учет капиллярных сил приводит к результатам, аналогичным рассмотренным выше. В отличие от результата, полученного В. А. Гальпериным и описанного в работе [6], в случае малого начального радиуса при учете капиллярных сил скорость движения границы полости не стремится к конечному ненулевому значению и схлопывания полости за конечное время не происходит. Режим, обнаруженный В. А. Гальпериным, при учете сил упругости соответствует режиму 2: при стремлении радиуса полости к некоторому положительному

значению скорость уменьшается до нуля. Влияние капиллярных сил проявляется в том, что полость стягивается быстрее, чем это происходит только под действием постоянного давления на бесконечности (см. рис. 2–4). Однако в процессе схлопывания при достижении достаточно малого радиуса силы упругости становятся преобладающими и начиная с некоторого момента препятствуют стягиванию полости в точку, стабилизируя ее радиус на определенном уровне.

Асимптотическое поведение границы полости в среде Кельвина — Фойгта в момент схлопывания при наличии капиллярных сил совпадает с асимптотикой движения границы при их отсутствии, что легко проверяется подстановкой соотношения $s(t) = A(t_* - t)^n$ в уравнение (18).

В случаях, когда силы упругости велики и препятствуют схлопыванию полости, предельное значение границы c определяется из уравнения (18). Уравнение для определения константы c имеет следующий вид:

$$2Mc^3 + \operatorname{Re}(1 + M)c^2 + 2\operatorname{Re} Nc - M\operatorname{Re}^3 = 0. \quad (20)$$

Исследуем уравнение (18) на фазовой плоскости вблизи особой точки $s = c$, $u = 0$. Для этого выполним замену $q = s - c$ и с учетом соотношения (16) запишем (18) в виде

$$\frac{du}{dq} = - \frac{(4\operatorname{Re}(N - M + 1)c + 12Mc^2)q + (3\operatorname{Re}c^2 + 8\operatorname{Re}c)u + \varphi(q, u)}{2\operatorname{Re}c^3u + \phi(q, u)},$$

где $\varphi(q, u) = o(q, u)$; $\phi(q, u) = o(q, u)$. Соответствующее характеристическое уравнение и его корни принимают вид

$$\begin{aligned} \lambda^2 + (3\operatorname{Re}c^2 + 8\operatorname{Re}c)\lambda + 2\operatorname{Re}c^3(4\operatorname{Re}(N - M + 1)c + 12Mc^2) &= 0, \\ \lambda_1 &= -\{\operatorname{Re}(3c^2 + 8c) + [\operatorname{Re}^2(3c^2 + 8c)^2 - 8\operatorname{Re}c^3(4\operatorname{Re}(N - M + 1)c + 12Mc^2)]^{1/2}\}/2, \\ \lambda_2 &= -\{\operatorname{Re}(3c^2 + 8c) - [\operatorname{Re}^2(3c^2 + 8c)^2 - 8\operatorname{Re}c^3(4\operatorname{Re}(N - M + 1)c + 12Mc^2)]^{1/2}\}/2. \end{aligned}$$

Их отличие от соответствующих соотношений, полученных без учета сил поверхностного натяжения, состоит в том, что капиллярные силы добавляют в дискриминант уравнения слагаемое, которое расширяет область, соответствующую особой точке — фокусу.

В случае $s(t) \rightarrow c$ для построения асимптотики запишем уравнение (18) в терминах скорости движения границы:

$$\frac{du}{ds} + \frac{3}{2} \frac{u}{s} + \frac{4}{s^2} + (1 - M) \frac{1}{su} + 2 \frac{N}{s^2u} - M\operatorname{Re}^2 \frac{1}{s^3u} + 2 \frac{M}{\operatorname{Re}u} = 0 \quad (21)$$

и подставим соотношение $u(s) = A(s - c)^\alpha$ в уравнение (21):

$$\alpha A^2(s - c)^{2\alpha - 1} + \frac{3}{2} A^2 \frac{(s - c)^{2\alpha}}{s} + 4A \frac{(s - c)^\alpha}{s^2} + \frac{2M}{\operatorname{Re}} \frac{(s - c_1)(s - c_2)(s - c)}{s^3} = 0$$

(c_1, c_2 — второй и третий корни уравнения (20)). Аналогично решению задачи в отсутствие капиллярных сил находим

$$u(s) = \left[-2c\operatorname{Re} - \sqrt{4c^2\operatorname{Re}^2 - 2M\operatorname{Re}c^3(c - c_1)(c - c_2)} \right] (s - c) / (c^3\operatorname{Re}).$$

Скорость стремится к нулю как линейная функция границы полости.

Автор выражает благодарность В. В. Пухначеву за полезные замечания и большое внимание к работе, а также С. В. Стебновскому за ценные консультации и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Рэлей Дж.** Теория звука. М.: Гостехтеоретиздат, 1955. Т. 2.
2. **Poritsky Н.** The collapse or growth of a spherical bubble or cavity in viscous fluid // Proc. of the 1st United States national congress of applied mechanics, Chicago, 17–21 June 1951. N. Y.: ASME, 1952. P. 813–821.
3. **Shu S. S.** Note on the collapse of a spherical cavity in a viscous incompressible fluid // Cal. Inst. Tech. Report. 1952. V. 26, N 4. P. 823–825.
4. **Перник А. Д.** Проблемы кавитации. Л.: Судпромгиз, 1963.
5. **Забабахин Е. И.** Заполнение пузырьков в вязкой жидкости // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, вып. 6. С. 1129–1131.
6. **Андреев В. К.** Устойчивость неустановившихся движений жидкости со свободной границей. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1992.
7. **Zana E., Leal L. G.** Dissolution of a stationary gas bubble in a quiescent viscoelastic liquid // Industr. Engng Chem. Fundam. 1975. V. 14, N 3. P. 175–182.
8. **Zana E., Leal L. G.** Dynamics and dissolution of gas bubbles in a viscoelastic fluid // Intern. J. Multiphase Flow. 1978. V. 4, N 3. P. 237–262.
9. **Yoo H. J., Han C. D.** Oscillatory behavior of a gas bubble growing (or collapsing) in viscoelastic liquids // AIChE J. 1982. V. 28, N 6. P. 1002–1009.
10. **Yoo H. J., Han C. D.** Development of a mathematical model of foam devolatilization // Polym. Proc. Engng. 1984. V. 2, N 2. P. 129–151.
11. **Pearson G., Middleman S.** Elongational flow behavior of viscoelastic liquids. Pt 1. Modeling of bubble collapse // AIChE J. 1977. V. 23, N 5. P. 714–722.
12. **Ting R. Y.** Viscoelastic effect of polymers on single bubble dynamics // AIChE J. 1975. V. 21, N 4. P. 810–813.
13. **Годунов С. К.** Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978.
14. **Жермен П.** Курс механики сплошных сред. М.: Высш. шк., 1983.

*Поступила в редакцию 24/VII 2007 г.,
в окончательном варианте — 28/I 2008 г.*
