

УДК 539.3, 550.3, 517.968.28, 517.956.224

ЗАВИСИМОСТЬ ЭФФЕКТИВНЫХ УПРУГИХ МОДУЛЕЙ КАВЕРНОЗНЫХ ТЕЛ ОТ ЧАСТОТЫ

Е. Б. Сибиряков

Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука СО РАН,
630090 Новосибирск, Россия
E-mail: sibiryakoveb@ipgg.sbras.ru

С использованием метода граничных интегральных уравнений построена зависимость эффективных параметров микронеоднородных сред от частоты и структуры порового пространства. Впервые для решения динамических трехмерных упругих задач в многосвязных областях в случае стационарных колебаний применен метод потенциала. Показано, что в случае, если длина волны соответствует конечному числу блоков, эффективные упругие модули уменьшаются.

Ключевые слова: метод граничных интегральных уравнений теории упругости, кавернозная среда, микроструктура, структура порового пространства, контрастные среды, блочные среды.

Введение. В настоящее время существует два основных подхода к вычислению эффективных упругих модулей микронеоднородных сред. Первый подход, основанный на осреднении дифференциальных операторов [1], можно назвать аналогом теории смесей. Главным недостатком данного подхода является пренебрежение взаимодействием фаз. Соответственно вычисляемые таким способом эффективные упругие модули зависят только от пористости. Очевидно, что в контрастных микронеоднородных средах, в которых различие физико-механических характеристик матрицы и включения составляет множество порядков, погрешность подобных методов вычислений будет недопустимо велика. Во втором подходе вместо классического континуума Коши — Пуассона используется процедура осреднения, основанная на замене разностных операторов дифференциальными [2]. В этом случае вся среда включая поры и трещины моделируется с помощью некоторого среднего поля, что приводит к существенному упрощению граничных условий, однако усложняет уравнения движения. Данный подход предсказывает снижение эффективных скоростей упругих волн при увеличении отношения характерного линейного размера элементов структуры к длине волны. Этим обусловлен интерес к проверке качественного соответствия результатов, полученных с использованием данного метода, результатам, полученным путем интегрирования классических уравнений упругости с учетом всех граничных условий.

Согласно существующей в механике блочных сред гипотезе длинноволнового приближения в случае, если длина волны значительно больше характерного размера блока ($\lambda/d \gg 1$), напряженное состояние на отдельном блоке является статическим. Соответственно упругие модули можно вычислять, интегрируя статическое уравнение упругого

равновесия на отдельном блоке [3]. В связи с этим представляет интерес зависимость погрешности, связанной с использованием статических уравнений, от отношения λ/d . Для исследования этой зависимости необходимо проинтегрировать упругие уравнения движения с достаточно сложными граничными условиями.

Метод граничных интегральных уравнений позволяет свести трехмерную задачу к решению двумерных интегральных уравнений. При этом с уменьшением шага разбиения число обусловленности не увеличивается. Более того, появляется возможность искать решение для вектора потенциала не поточечно, а путем вычисления коэффициентов разложения этого вектора по ортогональным функциям. Суть метода граничных интегральных уравнений состоит в том, что в любой точке объема (в том числе на поверхности) перемещения ищутся в виде свертки тензора Грина для пространства с некоторым потенциалом [4]:

$$U_i(x) = \frac{1}{2\pi} \int \Gamma_{ik}(x, y) F_k(y) dS_y, \quad (1)$$

где по индексу k проводится суммирование; точка x находится внутри объема (в том числе сколь угодно близко к поверхности), точка y — на поверхности. В статическом случае тензор $\Gamma_{ik}(x, y)$ имеет вид

$$\Gamma_{ik}(x, y) = \frac{1}{2\mu(\lambda + 2\mu)} \left((\lambda + \mu) \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_k} + (\lambda + 3\mu) \delta_{ik} \right) \frac{1}{r(x, y)},$$

где r — расстояние между фиксированными точками x и y ; δ_{ik} — символ Кронекера; λ , μ — упругие константы Ламе. Если точка x стремится к поверхности изнутри, то в этой точке можно вычислить нагрузки

$$\begin{aligned} P^x(\Gamma_{ik}(x, y)) &= 2\mu \frac{\partial \Gamma_{ik}}{\partial n_0} + \lambda n_0 \operatorname{div}_x(\Gamma_{ik}) + \mu(n_0 \times \operatorname{rot}_x(\Gamma_{ik})) = \\ &= \frac{1}{\lambda + 2\mu} \left[\left(\mu \delta_{ik} + 3(\lambda + \mu) \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial n_0} \frac{1}{r} + \mu \left(\cos(n_0, x_k) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r} - \cos(n_0, x_i) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{r} \right) \right] \quad (2) \end{aligned}$$

(n_0 — единичная нормаль в точке x). Таким образом, если на поверхности заданы нагрузки, то для вычисления потенциала в трехмерном случае (с помощью которого можно найти перемещения в любой точке объема) необходимо решить систему двумерных сингулярных интегральных уравнений (уравнений, содержащих неинтегрируемую особенность). В этом случае нужно вычислять главное значение интеграла (вследствие наличия последнего члена в (2)). Численное решение подобного рода уравнений представляет отдельную проблему, поэтому метод граничных интегральных уравнений использовался только для решения двумерных задач.

Совершенствование тензора фундаментальных решений третьего рода.

Проблема устранения сингулярности в статике была решена путем сложения тензора фундаментальных решений для пространства с некоторым дополнительным решением Z_{ik} [5]. Решение аналогично выражению для тензора Грина для полупространства

$$M_{ik}(x, y) = \frac{1}{\lambda + \mu} \left[(\lambda + 2\mu) \Gamma_{ik}(x, y) - \frac{1}{2} Z_{ik}(x, y) \right]. \quad (3)$$

При этом тензор Z_{ik} имеет вид

$$Z_{ik} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} & -\frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} & -\frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial x_3^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$g = |x_1| \ln(r + |x_1|) - r,$$

направление оси x_1 совпадает с направлением внешней нормали к поверхности в точке y , направления осей x_2, x_3 совпадают с направлениями двух взаимно ортогональных касательных к поверхности (e_{τ_1}, e_{τ_2}) в точке y (соответственно $x_1 = (r, n)$), точка x имеет координаты (x_1, x_2, x_3) . Тензор нагрузок имеет вид

$$P^x(M_{ik}) = 3 \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2 & \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_2} & \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_3} \\ \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_2} & \left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\right)^2 & \frac{\partial r}{\partial x_2} \frac{\partial r}{\partial x_3} \\ \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_3} & \frac{\partial r}{\partial x_2} \frac{\partial r}{\partial x_3} & \left(\frac{\partial r}{\partial x_3}\right)^2 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial n_0} \frac{1}{r} +$$

$$+ \frac{\mu}{\lambda + \mu} (n_0, e_{\tau_1}) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial^3 g}{\partial x_1 \partial x_3^2} & \frac{\partial^3 g}{\partial x_2 \partial x_3^2} & \frac{\partial^3 g}{\partial x_3^3} \\ -\frac{\partial^3 g}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} & -\frac{\partial^3 g}{\partial x_2^2 \partial x_3} & -\frac{\partial^3 g}{\partial x_2 \partial x_3^2} \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{\mu}{\lambda + \mu} (n_0, e_{\tau_2}) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial^3 g}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} & -\frac{\partial^3 g}{\partial x_2^2 \partial x_3} & -\frac{\partial^3 g}{\partial x_2 \partial x_3^2} \\ \frac{\partial^3 g}{\partial x_1 \partial x_2^2} & \frac{\partial^3 g}{\partial x_2^3} & \frac{\partial^3 g}{\partial x_2^2 \partial x_3} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, для нахождения потенциала и решения задачи в уравнениях (1), (2) целесообразно вместо Γ_{ik} и $P^x(\Gamma_{ik})$ использовать тензоры M_{ik} , $P^x(M_{ik})$. Далее $P^x(M_{ik})$ обозначим P_{ik} . При этом уравнения уже не являются сингулярными (все особенности являются интегрируемыми типа dS/r). Следует отметить, что x_1, x_2, x_3 — не произвольные координаты, а проекции вектора, проведенного из точки x в точку y , на нормаль и две произвольные взаимно ортогональные касательные. В итоге в статике тензор M_{ik} имеет вид

$$M_{ik} = \frac{1}{2\mu} \begin{bmatrix} \frac{1}{r} + \frac{x_1^2}{r^3} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{1}{r} & \frac{x_1 x_2}{r^3} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{x_1 x_3}{r^3} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{x_1 x_2}{r^3} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{1}{r} + \frac{x_2^2}{r^3} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} & \frac{x_2 x_3}{r^3} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{x_1 x_3}{r^3} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{x_2 x_3}{r^3} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{1}{r} + \frac{x_3^2}{r^3} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2 g}{\partial x_3^2} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

При достаточно общих предположениях функцию на определенном интервале можно разложить в ряд Фурье. В этом случае динамическая задача сводится к набору задач о стационарных колебаниях при различных частотах. Такой подход позволяет избавиться от временной координаты. Следовательно, решение (5) необходимо аналитически продолжить на область ненулевых частот, т. е. найти решение уравнения

$$(\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} M_{ik}(x, y) - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} M_{ik}(x, y) + \rho \omega^2 M_{ik} = 0, \quad (6)$$

которое при $\omega \rightarrow 0$ стремится к виду (5). Решение (6) ищем в виде (3):

$$M_{ik}(x, y) = \frac{1}{\lambda + \mu} \left[(\lambda + 2\mu)\Gamma_{ik}(x, y) - \frac{1}{2} Z_{ik}(x, y) \right].$$

При этом

$$\Gamma_{ik}(x, y) = \frac{1}{\mu} \left[\frac{\cos(kr)}{r} \delta_{ik} + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left(\frac{\cos(kr)}{r} - \frac{\cos(\gamma kr)}{r} \right) \right], \quad (7)$$

где $k = \omega\sqrt{\rho/\mu}$; $\gamma = \sqrt{\mu/(\lambda + 2\mu)}$.

Рассмотрим аналитическое продолжение Z_{ik} . Первый столбец Z_{ik} (4) представляет собой градиент $\partial g/\partial x_1$. В статическом случае функция g удовлетворяет уравнению Лапласа. Для того чтобы первый столбец матрицы удовлетворял уравнению (6), необходимо, чтобы функция g удовлетворяла уравнению Гельмгольца $\Delta g + \gamma^2 k^2 g = 0$. Дивергенция от элементов второго и третьего столбцов матрицы (4) равна нулю. Следовательно, чтобы данные столбцы удовлетворяли упругому уравнению стационарных колебаний, необходимо, чтобы функция g в этих столбцах также удовлетворяла уравнению Гельмгольца, но с другим параметром: $\Delta g + k^2 g = 0$. Далее построим функцию g для второго уравнения Гельмгольца. Существует два способа вычисления g . Первый — аналитический, через разложения g по функциям Бесселя первого рода. Для статической задачи функцию $g = |x_1| \ln(r + |x_1|) - r$ обозначим через g_0 . Тогда получаем

$$g = g_0 J_0(kr_\tau) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{r + |x_1|/(2m)}{4m^2 - 1} \frac{r_\tau^{2m}}{(r + |x_1|)^{2m}} J_{2m}(kr_\tau) \right),$$

где $x_1 = (r, n)$; $r_\tau = \sqrt{r^2 - x_1^2}$. Второй способ — определить функцию g численно (он и использовался в дальнейшем). Представим функцию g_0 в виде интеграла

$$g_0 = \int_0^{\infty} \frac{e^{-kr|x_1|} J_0(kr r_\tau) - 1 + kr|x_1| J_0(kr)}{k_r^2} dk_r$$

и, используя это выражение, вычислим функцию g :

$$g = \int_0^{\infty} \frac{e^{-kr|x_1|} J_0(\sqrt{k_r^2 + k^2} r_\tau) - J_0(kr_\tau) + kr|x_1| J_0(kr) J_0(kr_\tau)}{k_r^2} dk_r. \quad (8)$$

По формулам (3), (4), (7), (8) построим тензор M_{ik} :

$$M_{ik}(x, y) = \frac{1}{\lambda + \mu} \left[(\lambda + 2\mu)\Gamma_{ik}(x, y) - \frac{1}{2} Z_{ik}(x, y) \right],$$

где

$$Z_{ik} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} & -\frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} & -\frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial x_3^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}.$$

Затем, как и в статическом случае, через производные от M_{ik} вычислим P_{ik} . Следует отметить, что в M_{ik} входят вторые производные от функции g , а в P_{ik} — третьи. Вычислить численно третьи производные от g непросто. Покажем это на примере третьей производной по переменной x_1 :

$$\frac{\partial^3 g}{\partial x_1^3} = - \int_0^\infty k_r e^{-k_r |x_1|} J_0(\sqrt{k_r^2 + k^2} r_\tau) dk_r. \quad (9)$$

При малых x_1 подынтегральное выражение сходится очень медленно, однако при больших (по сравнению с k) значениях k_r функцию Бесселя, входящую в формулу (9), можно разложить следующим образом:

$$J_0(\sqrt{k_r^2 + k^2} r_\tau) \approx J_0(k_r r_\tau) - \frac{k^2}{2k_r r_\tau} J_1(k_r r_\tau).$$

При этом выражение

$$- \int_0^\infty k_r e^{-k_r |x_1|} J_0(k_r r_\tau) dk_r = - \frac{x_1}{r^3} \quad (10)$$

представляет собой третью производную от g_0 :

$$\int_0^\infty \frac{k^2}{2r_\tau} e^{-k_r |x_1|} J_1(k_r r_\tau) dk_r = \frac{k^2}{2} \left(1 - \frac{|x_1|}{r}\right). \quad (11)$$

Будем называть выражение (10) статической частью разложения, а (11) — квазистатической. Соответственно формула (9) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 g}{\partial x_1^3} = & - \int_0^\infty k_r e^{-k_r |x_1|} \left(J_0(\sqrt{k_r^2 + k^2} r_\tau) - J_0(k_r r_\tau) + \frac{k^2}{2k_r r_\tau} J_1(k_r r_\tau) \right) dk_r - \\ & - \frac{x_1}{r^3} + \frac{k^2}{2} \left(1 - \frac{|x_1|}{r}\right). \quad (12) \end{aligned}$$

Подынтегральное выражение в (12) достаточно быстро убывает и легко находится численно. Аналогично проводятся вычисления для других третьих производных от g .

Следует отметить, что x_1, x_2, x_3 — не произвольные координаты, а проекции вектора \mathbf{r} на нормаль и две касательные в точке y , лежащей на поверхности. Обозначим единичные векторы нормали и касательных в точке поверхности y через $\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2$ соответственно, в фиксированной точке x — $\mathbf{n}_0, \boldsymbol{\tau}_{10}, \boldsymbol{\tau}_{20}$. В случае если нагрузка p_0 на поверхности известна, вычислим проекции тензора P_{ik} и решим систему интегральных уравнений (найдем проекции вектора потенциала \mathbf{F}):

$$\begin{aligned} p_{n0}(x) &= F_{n0}(x) - \frac{1}{2\pi} \int (P_{n0n}(x, y)F_n(y) + P_{n0\tau_1}(x, y)F_{\tau_1}(y) + P_{n0\tau_2}(x, y)F_{\tau_2}(y)) dS_y, \\ p_{\tau_10}(x) &= F_{\tau_10}(x) - \frac{1}{2\pi} \int (P_{\tau_10n}(x, y)F_n(y) + P_{\tau_10\tau_1}(x, y)F_{\tau_1}(y) + P_{\tau_10\tau_2}(x, y)F_{\tau_2}(y)) dS_y, \quad (13) \\ p_{\tau_20}(x) &= F_{\tau_20}(x) - \frac{1}{2\pi} \int (P_{\tau_20n}(x, y)F_n(y) + P_{\tau_20\tau_1}(x, y)F_{\tau_1}(y) + P_{\tau_20\tau_2}(x, y)F_{\tau_2}(y)) dS_y. \end{aligned}$$

Если потенциал известен, то перемещение вычисляется аналогично по формуле

$$U_i(x) = \frac{1}{2\pi} \int M_{ik}(x, y)F_k(y) dS_y$$

(по индексу k проводится суммирование).

Решение системы (13) целесообразно искать не в каждой точке разбиения (так называемое поточечное решение), а в виде коэффициентов разложения вектора \mathbf{F} в ряд Фурье. В этом случае для нахождения потенциала необходимо вычислить (13) в некоторых точках x , количество которых равно числу неизвестных коэффициентов разложения. Фактически данный метод представляет собой использование быстрого преобразования Фурье. Далее во всех случаях вычислялось 11 коэффициентов разложения вектора потенциала.

Постановка задач. Рассмотрим три задачи. Во всех задачах на поверхности единичного шара с $\rho = \mu = \lambda = 1$ задавался вектор нагрузки с одной ненулевой компонентой

$$p_z(x) = \begin{cases} \exp(-6\theta/\pi)^2, & \theta \leq \pi/2, \\ -\exp(-6(\pi - \theta)/\pi)^2, & \theta \geq \pi/2, \end{cases}$$

$p_x = p_y = 0$ на всех частотах. Частоты k менялись в диапазоне $0 \div \pi/2$ с шагом $\pi/10$ (в статическом случае $k = 0$). Подобный диапазон частот является квазистатическим. Если считать единичный шар элементарным объемом среды, то при $k = \pi/10$ длина поперечной волны равна 10 блокам, при $k = \pi/2$ — двум блокам.

В задаче 1 необходимо вычислить распределение перемещений по заданным нагрузкам на поверхности сплошного шара единичного радиуса, в задаче 2 — на внешней поверхности шара такого же размера с полостью радиусом 0,5 в центре, в задаче 3 — с полостью в виде эллипсоида вращения, описываемого параметрическим уравнением

$$x = 0,2 \sin \theta \cos \varphi, \quad y = 0,2 \sin \theta \sin \varphi, \quad z = 0,8 \cos \theta.$$

При этом все компоненты вектора нагрузки на поверхности полости равны нулю.

Во всех случаях находился вектор перемещений на поверхности единичного шара. Далее с использованием теоремы о градиентах через перемещения на поверхности сферы вычислялись средние деформации в объеме.

В работах [3, 6] предложены различные методы вычисления эффективных упругих модулей микронеоднородной среды в длинноволновом приближении, использующие решения статических упругих задач. Желательно выяснить, можно ли использовать статические методы, если длина волны соответствует конечному числу блоков.

Как известно, упругие модули — это коэффициенты, связывающие средние по представительному объему напряжения и деформации. В статическом случае выполняется соотношение между тензором напряжений и вектором нагрузок:

$$\int_V \sigma_{ik} dV = \int_S p_i x_k dS. \quad (14)$$

В случае стационарных колебаний действие инерционных сил приводит к тому, что соотношение (14) не выполняется. При $k \neq 0$ имеем

$$\int_V (\sigma_{ik} + \rho \omega^2 U_i x_k) dV = \int_S p_i x_k dS. \quad (15)$$

Таким образом, при одной и той же нагрузке средние напряжения будут меньше, если $U_i x_k > 0$. Следовательно, если средние упругие модули определять путем решения статических задач, необходимо учитывать вклад инерционных сил в увеличение эффективного напряжения, т. е. вычислять средние эффективные напряжения по формуле (14), а не (15). Полученные таким образом упругие модули можно назвать упругими квазимодулями, которые следует определять с помощью методов, описанных в работах [3, 6].

Результаты вычислений. Во всех случаях компонента вектора потенциала F_φ равна нулю. Соответствующая компонента вектора перемещений также равна нулю.

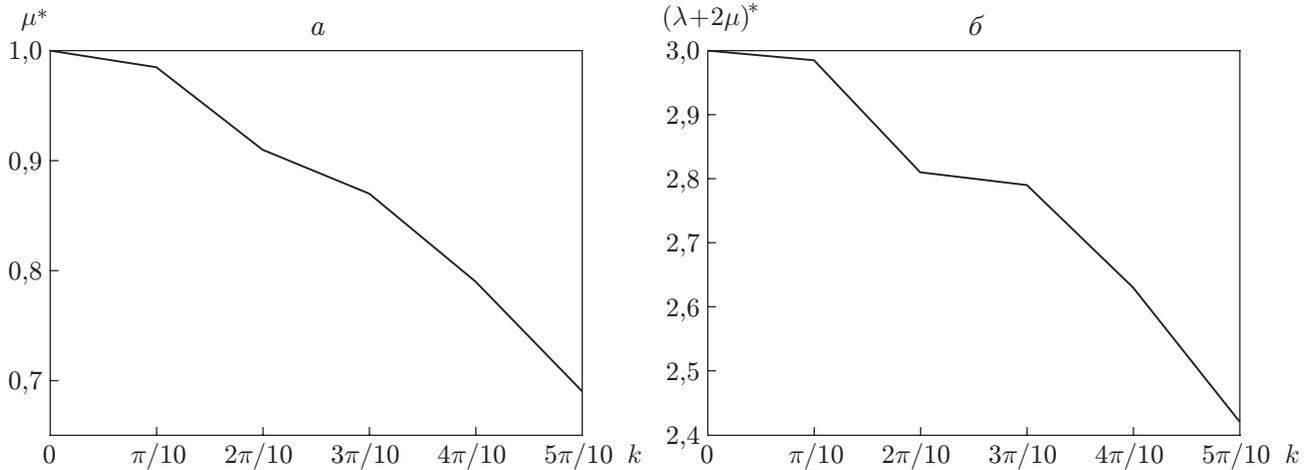


Рис. 1. Зависимости упругих квазимодулей μ^* (а) и $(\lambda + 2\mu)^*$ (б) от частоты k для задачи 1

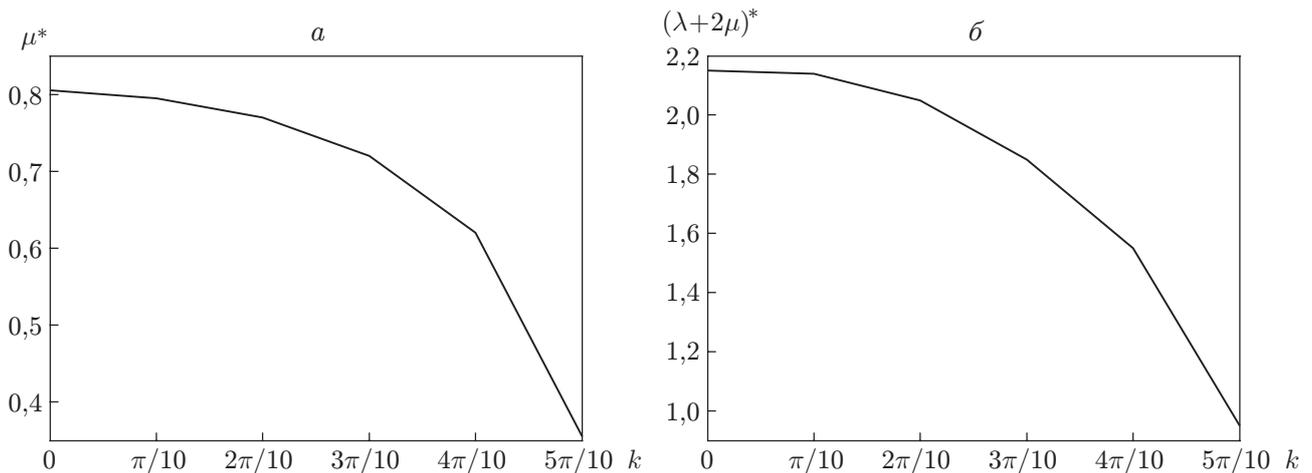


Рис. 2. Зависимости упругих квазимодулей μ^* (а) и $(\lambda + 2\mu)^*$ (б) от частоты k для задачи 2

На рис. 1 приведены зависимости упругих квазимодулей μ^* , $(\lambda + 2\mu)^*$ от частоты k для случая, когда полости в шаре отсутствуют (задача 1).

На рис. 2 представлены зависимости упругих квазимодулей μ^* , $(\lambda + 2\mu)^*$ от частоты k для задачи 2, когда в центре единичного шара имеется полость радиусом 0,5. Если рассматривать шар с полостью как представительный объем среды, то получившиеся статические упругие модули являются эффективными упругими модулями среды.

На рис. 3 представлены зависимости упругих квазимодулей μ^* , $(\lambda + 2\mu)^*$ от частоты k для задачи 3 (шар с полостью в виде эллипсоида вращения с полуосями длиной 0,2, 0,8). Последняя точка на рис. 3, б ($k = \pi/2$) находится вблизи резонансной частоты.

На рис. 1–3 видно, что в квазистатическом диапазоне частот (до достижения резонанса) упругие квазимодули уменьшаются, как и предполагалось. Нетривиальным является тот факт, что отношение упругих квазимодулей $\mu^*/(\lambda + 2\mu)^*$ практически не меняется в квазистатическом диапазоне частот как в случае сплошного шара (следствие из задачи 1), так и в случае шара, имеющего внутри сферическую или эллиптическую полость (следствие из задач 2, 3).

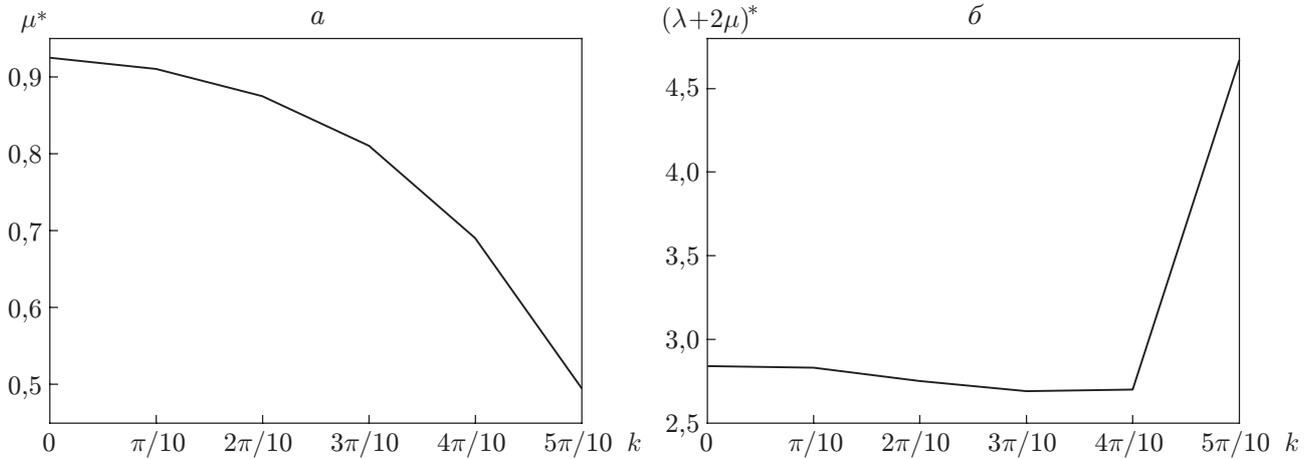


Рис. 3. Зависимости упругих квазимодулей μ^* (а) и $(\lambda + 2\mu)^*$ (б) от частоты k для задачи 3

Наличие полости приводит к тому, что упругие квазимодули уменьшаются значительно быстрее, чем в сплошном теле (также это приводит к уменьшению резонансной частоты). Например, в одном и том же частотном диапазоне упругий квазимодуль μ^* в сплошном шаре уменьшается приблизительно на 30 % (см. рис. 1,а), в шаре со сферической либо эллиптической полостью (см. рис. 2,а, 3,а) — почти в два раза. В задаче 3 пористость меньше, чем в задаче 2, приблизительно в четыре раза, удельная поверхность — в два раза. Различие геометрических параметров порового пространства влияет в основном на эффективные статические упругие модули ($k = 0$). Несмотря на существенное различие параметров порового пространства, скорость уменьшения квазимодулей примерно одинаковая. Нетривиальным является также тот факт, что в задаче 3 существенно уменьшилась первая резонансная частота (см. рис. 3,б). Скорее всего, это означает, что резонансная (первая) частота микронеоднородного ограниченного тела зависит не только от интегрально-геометрических характеристик порового пространства, но и от расстояния между поверхностью раздела фаз и поверхностью, к которой прикладывается нагрузка. Заметим также, что при значениях частоты, близких к резонансной, амплитуда перемещений достигает максимума на границе полости, т. е. на достаточно большом расстоянии от поверхности, к которой прикладывается нагрузка. Это означает, что процесс разрушения начинается изнутри, от поверхности раздела скелет — флюид.

Выводы. Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы.

Обосновано использование связей между нагрузками и перемещениями для определения упругих модулей в теле конечных размеров. Этот вывод нетривиален, так как деформирование элемента сплошной среды с фиксированными границами отличается от деформирования элемента объема в среде без границ. При этом упругие модули трактуются как коэффициенты пропорциональности между средней нагрузкой и средними деформациями в объеме.

Переход от статического случая к динамическому зависит от отношения длины волны к размеру элемента структуры. Эффективные скорости упругих волн уменьшаются с увеличением отношения размера элемента структуры к длине волны. Этот вывод соответствует результатам иного теоретического подхода, основанного на использовании модели континуума с микроструктурой.

Впервые метод граничных интегральных уравнений с модифицированным тензором фундаментальных решений третьего рода использован для решения трехмерных упругих задач стационарных колебаний в многосвязных областях.

Наличие как сферических, так и эллиптических каверн внутри замкнутого упругого тела приводит к снижению резонансных частот. При этом вблизи резонанса амплитуда перемещений максимальна на внутренней поверхности. Это означает, что материал при колебаниях вблизи резонансной частоты будет разрушаться изнутри.

Несмотря на то что упругие казимодули уменьшаются с ростом частоты в квазистатическом диапазоне, их отношение практически не зависит от частоты.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шермергор Т. Д.** Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977.
2. **Sibiryakov V. P., Prilous V. I., Kopeikin A. V.** The nature of instability of blocked media and distribution law of unstable states // Phys. Mesomech. 2013. V. 16, N 2. P. 141–151.
3. **Сибиряков Б. П.** Упругие свойства пустых скелетов зернистых коллекторов // ПМТФ. 1983. № 4. С. 142–146.
4. **Купрадзе В. Д.** Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963.
5. **Сибиряков Е. Б., Сибиряков Б. П.** Структура порового пространства и расклинивающее давление в зернистой среде // Физ. мезомеханика. 2010. Т. 13, № 1. С. 40–43.
6. **Сибиряков Е. Б.** Зависимость между коэффициентом Пуассона и микроструктурой в микронеоднородной среде // Физ. мезомеханика. 2004. Т. 7, № 1. С. 63–68.

Поступила в редакцию 27/VIII 2013 г.
