ПМТФ, № 6, 1961

ЗАТУХАНИЕ УДАРНЫХ ВОЛН В СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЯХ

О. С. Рыжов

(Москва)

Асимптотические законы затухания нестационарных ударных волн на больших расстояниях от места взрыва были найдены Л. Д. Ландау [1], С. А. Христиановичем [2], Л. И. Седовым [3] и Уитэмом [4] в предположении, что среда является однородной. Изучение распространения ударных волн в неоднородной движущейся среде в рамках геометрической акустики проводилось в работе Келлера [5]. Уточнению акустической теории, в которой не учитывается нелинейный характер уравнений газовой динамики, посвящены статьи К. Е. Губкина [6], Оттермана [7], О. Ю. Полянского [8] и автора [9].

Законы затухания слабых ударных волн в стационарных сверхзвуковых течениях менее исследованы. Для плоскопараллельных и осесимметрических равномерных потоков они были установлены Л. Д. Ландау [1] и Уитэмом [10]. В работе Фридрихса [11] исследовано поведение плоских ударных волн с более высокой степенью точности в рамках теории второго приближения.

В настоящей работе выясняются основные особенности развития ударных волн малой амплитуды в неоднородных стационарных сверхзвуковых потоках, причем ширина зоны возмущенного течения предполагается малой по сравнению с радиусом кривизны скачка уплотнения и расстоянием, иа котором существенно меняются параметры исходной среды. В основу исследования положен тот факт, что каждый небольшой элемент возмущенной области в первом приближении можно рассматривать как нестационарную волну Римана, сносимую в поперечном направлении равномерным потоком. Законы изменения параметров среды на ударных фронтах можно вывести тогда с помощью метода, аналогичного применявшемуся Л. Д. Ландау [1]. Оказывается, однако, что результаты, которые получены в работе [9] для нестационарных ударных волн, движущихся в неоднородной среде, нельзя непосредственно применить для расчета стационарных сверхзвуковых течений. Причина этого заключается в различных законах, определяющих изменение ширины возмущенной области в стационарных и нестационарных процессах.

1. Исходную систему уравнений газовой динамики можно записать в виде

$$v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} = g_i, \qquad \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} = 0, \qquad v_j \frac{\partial s}{\partial x_j} = 0, \qquad p = p(\rho, s) \quad (1.1)$$

Здесь v_i, g_i, p, ρ и s означают соответственно компоненты скорости потока и массовых сил, давление, плотность и энтропию в точке с декартовыми координатами x_i. Используется обычная тензорная запись сумм по повторяющимся индексам i, j, которые принимают значения 1, 2, 3.

В дальнейшем будем рассматривать только сверхзвуковые течения. Описывающая их система уравнений (1.1) будет тогда гиперболического типа. Уравнение, определяющее C_+-характеристические поверхности $\varphi(x_i) = 0$ этой системы, запишется как

$$v_j n_j + a = 0 \qquad \left(a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}\right) \quad (1.2)$$

Здесь a — скорость звука, а n_i — компоненты нормали к этим поверхностям, для которых справедлива формула

$$n_i = \frac{\partial \varphi / \partial x_i}{\sqrt{(\partial \varphi / \partial x_j)^2}}$$

Система уравнений газовой динамики (1.1), приведенная к C_+-характеристикам, принимает вид

$$(v_i + an_i)\frac{\partial p}{\partial x_i} + a\rho\,(a\delta_{ij} + n_i v_j)\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \rho a n_i g_i$$
$$(\delta_{ij} = 1 \text{ при } i = j \text{ и } \delta_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j) \qquad (1.3)$$

Уравнение (1.3) содержит производные от искомых функций только вдоль C_+-характеристических поверхностей.

Перейдем к изучению поведения слабых ударных волн в неоднородном потоке. Будем считать, что в невозмущенном состоянии давление p_0, плотность ρ_0, скорость звука a_0 и компоненты скорости потока v_{0i} заданы как функции координат x_i. В силу малости амплитуды скачка уплотнения относительные изменения всех параметров газа на его фронте малы. Положим поэтому

$$p = p_0 + p', \qquad \rho = \rho_0 + \rho', \qquad a = a_0 + a', \qquad v_i = v_{0i} + v_i'$$

Здесь p', ρ', a' и v'_i — избыточные давление, плотность, скорость звука и компоненты скорости частиц в зоне возмущенного течения. Безразмерные величины p' / p_0, ρ' / ρ_0, a' / a_0 и v'_i / a_0 малы по сравнению с единицей, поэтому их квадратами в дальнейшем будем пренебрегать. Сделаем еще два предположения относительно геометрических свойств изучаемых течений. Именно: будем считать, что область возмущенного движения газа является узкой, т. е. ее ширина λ_* много меньше характерного радиуса кривизны ударного фронта R и расстояния H, на котором существенно меняются параметры среды в состоянии равновесия. Величинами λ_* / R и λ_* / H также в дальнейшем будем пренебрегать по сравнению с единицей. Предположим, кроме того, что в направлениях, касательных к фронту скачка уплотнения, все избыточные величины меняются медленно (т. е. существенно на расстояниях порядка R и H).

В акустическом приближении ударную волну можно отождествить с C_+-характеристической поверхностью (1.2), уравнение которой в результате отбрасывания малых величин приобретает вид

$$v_{0j} n_j + a_0 = 0 \qquad (1.4)$$

Характеристические кривые (бихарактеристики) уравнения (1.4) являются траекториями элементов поверхности ударного фронта или лучами, они определяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{v_{0i} + a_0 n_i} = \frac{dn_i}{(n_i n_j - \delta_{ij})\,(\partial a_0 / \partial x_j + n_k \partial v_{0k} / \partial x_j)} \qquad (1.5)$$

В стационарных сверхзвуковых течениях каждый элемент поверхности ударного фронта в своем движении вдоль луча проходит по траектории предыдущего элемента аналогично тому, как любая частица газа, двигаясь по линии тока, повторяет путь предыдущей частицы. Отметим, что в случае стационарных течений лучи целиком лежат на характеристических поверхностях $\varphi(x_i) = 0$, в то время как в нестационарных процессах лучи в пространстве (x_i) пересекают волновые фронты $\varphi(t, x_i) = 0$, нигде не касаясь этих поверхностей. Этот факт, как будет показано в дальнейшем, приводит к различным законам затухания ударных волн в стационарных и нестационарных явлениях.

На ударных фронтах малой амплитуды в первом приближении верны следующие зависимости между возмущенными параметрами газа [12]

$$\rho' = \frac{1}{a_0^2}\,p', \qquad a' = \frac{m_0 - 1}{\rho_0 a_0}\,p', \qquad v' = \frac{1}{\rho_0 a_0}\,p'$$
$$\left(m_0 = \frac{1}{2\rho_0^3 a_0^2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V_0^2}\right)_s, \; V = \frac{1}{\rho}, \; v' = \sqrt{(v_i')^2}\right) \qquad (1.6)$$

причем $v_i' = v'n_i$. Для идеального газа коэффициент m_0 равен $(\varkappa + 1)/2$, где $\varkappa$ — показатель адиабаты Пуассона. Поскольку в рассматриваемом приближении ударные волны совпадают с характеристическими поверхностями, то формулы (1.6) можно использовать для исключения функций ρ', a' и v_i' из уравнения (1.3) после его линеаризации. В результате имеем

$$\frac{1}{p'}\frac{dp'}{dt} - \frac{1}{2\rho_0 a_0}\frac{d\rho_0 a_0}{dt} + \frac{1}{2}\left(a_0\frac{\partial n_j}{\partial x_j} + k_0\frac{\partial v_{0j}}{\partial x_j} + n_i n_j \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_j}\right) = 0 \qquad (1.7)$$

$$(k_0 = 2m_0 - 1)$$

Здесь

$$\frac{d}{dt} = (v_{0j} + a_0 n_j)\frac{\partial}{\partial x_j}$$

означает производную вдоль луча, определяемого системой (1.5). Для идеального газа коэффициент k_0 равен показателю адиабаты Пуассона $\varkappa$. Интегрируя уравнение (1.7), получим формулу Келлера, дающую закон изменения избыточного давления на фронте скачка уплотнения [5]

$$p' = \frac{p_0'}{L}\sqrt{\frac{\rho_0 a_0}{\rho_{00} a_{00}}}, \qquad L = \exp\left[\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left(a_0\frac{\partial n_j}{\partial x_j} + k_0\frac{\partial v_{0j}}{\partial x_j} + n_i n_j\frac{\partial v_{0i}}{\partial x_j}\right)dt\right] \qquad (1.8)$$

Здесь p_0', ρ_{00} и a_{00} означают избыточное давление на ударном фронте и равновесные плотность и скорость звука в начальный момент времени t_0, взятые в начальной точке луча. Так как значение лучевой скорости $q_0 = \sqrt{(v_{0j} + a_0 n_j)^2}$ будет $\sqrt{v_0^2 - a_0^2}$, то время t связано с длиной луча l соотношением

$$dt = \frac{1}{\sqrt{v_0^2 - a_0^2}}\,dl \qquad \left(v_0 = \sqrt{(v_{0i})^2}\right) \qquad (1.9)$$

Формула (1.8) справедлива как для стационарных, так и для нестационарных процессов распространения ударных волн.

По предположению ширина возмущенной области λ_*, которую по аналогии с нестационарными течениями будем называть также длиной волны, мала по сравнению с характерными размерами R и H, а избыточные величины p', ρ', a' и v'_i существенно меняются в направлениях, касательных к ударному фронту, только на расстояниях того же порядка, что R и H. В работе [6] показано, что в таком случае формулы (1.6) и (1.8) остаются справедливыми во всем поле возмущенного течения, если под p_0' понимать избыточное давление, взятое в произвольной точке профиля волны при $t = t_0$.

Обозначим через λ длину волны в акустическом приближении. Выведем закон изменения λ при движении элемента волны вдоль луча. Для этого удобно рассматривать структуру возмущенной области в стационарном движении газа с точки зрения нестационарных течений.

На характеристической поверхности, несущей нулевое значение избыточного давления, возьмем произвольную точку и окружим ее малым цилиндром с осью, совпадающей с нормалью n_{0i} к этой поверхности. За основания цилиндра примем характеристическую поверхность, где $p' = 0$, и поверхность ударного фронта. Эти поверхности назовем соответственно хвостом и фронтом волны. Элемент волны, заключенный в рассматриваемом цилиндре, в первом приближении сносится как целое вдоль луча со скоростью q_0. В силу формулы (1.4) скорость распространения его хвоста по нормали n_{0i} к себе остается равной нулю во все время движения. Скорость распространения фронта вдоль той же нормали будет, очевидно,

$$\lambda n_{0j}\partial(a_0 + v_{0i}n_{0i}) / \partial x_j.$$

Выражая a_0 при помощи равенства (1.4), получим, что изменение величины λ в геометрической акустике определяется соотношением

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\lambda v_{0i} n_j \frac{\partial n_i}{\partial x_j}$$

Решая это уравнение, имеем

$$\lambda = \lambda_0 \exp\left(-\int_{t_0}^{t} v_{0i} n_j \frac{\partial n_i}{\partial x_j} dt\right) \qquad (1.10)$$

Здесь λ_0 — начальная длина элемента волны, время t вводится выражением (1.9), а нулевой индекс у компонент нормали опущен.

Из формулы (1.10) следует, что длина волны изменяется уже в приближении геометрической акустики, если среда неоднородна. Однако соотношение для λ, полученное в работе [8] при изучении нестационарных процессов распространения ударных волн, отлично от (1.10). Этот факт является прямым следствием указанного выше различия в расположении лучей относительно характеристических поверхностей в установившихся и неустановившихся явлениях. В свою очередь он приводит, как будет видно в дальнейшем, к различию в соответствующих законах затухания избыточных параметров газа вдоль скачков уплотнения.

2. До сих пор свойства ударных волн рассматривались в рамках геометрической акустики. Воспользуемся приведенными в предыдущем параграфе результатами для того, чтобы выяснить свойства волн малой амплитуды во втором приближении. По-прежнему структуру возмущенной области в стационарном течении будем рассматривать с точки зрения неустановившихся движений.

Прежде всего отметим, что формулы (1.6), которые определяют зависимости между величинами p', ρ', a' и v', соответствуют течениям типа простой волны [12]. Поэтому, если в неоднородном сверхзвуковом течении имеется расходящаяся ударная волна с малой шириной возмущенной области, то каждый ее небольшой элемент можно рассматривать как плоскую волну Римана, которая сносится в поперечном направлении равномерным потоком со скоростью q_0. При наличии разрывов решение Римана теряет силу, однако для волн малой амплитуды с точностью до членов второго порядка относительно p' / p_0 волна остается простой.

Рассмотрим более подробно движение элемента волны, причем будем считать для простоты, что все избыточные величины в возмущенной области, ограниченной ударным фронтом, имеют треугольные профили. Скорость U перемещения фазы профиля в римановском решении равна [12]

$$U = v_0 + a_0 + m_0 \frac{p'}{\rho_0 a_0} \qquad (2.1)$$

где v_0 — скорость частиц в невозмущенном потоке. Согласно равенству (2.1) точки с большими избыточными давлениями с течением времени обгоняют точки, несущие меньшие избыточные давления. В решении появляется неоднозначность, которая устраняется введением поверхности разрыва. Его положение определяется простым геометрическим условием, которое гласит, что площадь, заключенная под кривой, изображающей профиль элемента волны, остается такой же, как для неоднозначной кривой, определяемой римановским решением [1].

Выведем уравнение, согласно которому меняется расстояние l', разделяющее в непрерывном трехзначном решении точки с нулевым избыточным давлением и точки, соответствующие максимальному избыточному давлению. Как и в рассмотренной выше теории первого приближения, скорость распространения хвоста элемента волны, где $p' = 0$, по нормали n_{0i} к себе остается равной нулю во все время движения. Скорость распространения точек с максимальным избыточным давлением вдоль той же нормали дается равенством

$$l' n_{0j} \frac{\partial (a_0 + v_{0i} n_{0i})}{\partial x_j} + m_0 \frac{p'}{\rho_0 a_0}$$

Выражая a_0 с помощью формулы (1.4), имеем отсюда уравнение

$$\frac{dl'}{dt} = - l' v_{0i} n_j \frac{\partial n_i}{\partial x_j} + m_0 \frac{p'}{\rho_0 a_0} \tag{2.2}$$

Его решение запишем в виде

$$l' = \lambda + \exp\Big(-\int_{t_0}^{t} v_{0i} n_j \frac{\partial n_i}{\partial x_j} d\tau\Big) \int_{t_0}^{t} \Big[\frac{m_0}{\rho_0 a_0} \exp\Big(\int_{t_0}^{\tau} v_{0i} n_j \frac{\partial n_i}{\partial x_j} d\tau'\Big) p'\Big] d\tau \tag{2.3}$$

Здесь время t вводится равенством (1.9), величина λ — равенством (1.10), а нулевой индекс у компонент нормали, как и прежде, опущен.

Формулы (2.2) и (2.3) показывают, что распространение скачков уплотнения в неоднородных сверхзвуковых течениях сопровождается своеобразным наложением акустического эффекта изменения длины волны при прохождении через слои с различными невозмущенными параметрами на явление, обусловленное эффектом более высокого порядка по амплитуде [9]. В рамках геометрической акустики величины l' и λ совпадают.

Используя указанное выше геометрическое условие, определяющее положение ударного фронта в римановском решении, легко получить теперь выражения для ширины области возмущенного течения λ_* и избыточного давления на ударном фронте p_*' в следующем за геометрической акустикой приближении. Имеем

$$\lambda_* = \lambda \Big\{1 + \frac{p_0'}{\lambda_0 \sqrt{\rho_{00} a_{00}}} \int_{t_0}^{t} \Big[\frac{m_0}{\sqrt{\rho_0 a_0}} \frac{1}{L} \exp\Big(\int_{t_0}^{\tau} v_{0i} n_j \frac{\partial n_i}{\partial x_j} d\tau'\Big)\Big] d\tau\Big\}^{1/2} \tag{2.4}$$

$$p_*' = p_0' \frac{1}{L} \sqrt{\frac{\rho_0 a_0}{\rho_{00} a_{00}}} \Big\{1 + \frac{p_0'}{\lambda_0 \sqrt{\rho_{00} a_{00}}} \int_{t_0}^{t} \Big[\frac{m_0}{\sqrt{\rho_0 a_0}} \frac{1}{L} \exp\Big(\int_{t_0}^{\tau} v_{0i} n_j \frac{\partial n_i}{\partial x_j} d\tau'\Big)\Big] d\tau\Big\}^{-1/2}$$

$$(dt = dl \,/\, \sqrt{v_0^2 - a_0^2}) \tag{2.5}$$

Следует отметить, что формулы (2.4) и (2.5) отличаются от соответствующих равенств, приведенных в работе [9] и определяющих законы изменения длины волны и избыточного давления на ударном фронте нестационарных волн. Причина этого, как уже отмечалось выше, объясняется тем, что в рамках геометрической акустики в физическом пространстве (x_i) лучи в нестационарных явлениях пересекают область возмущенного течения, а в стационарных — целиком располагаются в ней, не выходя за ее границы.

3. Остановимся на частном случае плоскопараллельных течений, имеющем большое практическое значение.

Для приращения единичного вектора нормали $\mathbf{n}$ к характеристической кривой при переходе между двумя бесконечно близкими характеристиками справедливо равенство

$$d\mathbf{n} = - \boldsymbol{\tau} d(\alpha_0 + \vartheta_0) \tag{3.1}$$

Здесь $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор касательной к характеристической кривой, $\alpha_0 = \arcsin (a_0 / v_0)$ — угол Маха, ϑ_0 — угол наклона вектора скорости по отношению к некоторому фиксированному направлению. В дальнейшем совместим его с осью x_1; направление, перпендикулярное ему,— с осью x_2. Из формулы (3.1) следует

$$v_{0i} dn_i = - v_{0i} \tau_i d(\alpha_0 + \vartheta_0)$$

Отсюда находим

$$-v_{0i}n_j\frac{\partial n_i}{\partial x_j}=v_0\cos\alpha_0\, n_j\frac{\partial(\alpha_0+\vartheta_0)}{\partial x_j} \qquad (3.2)$$

причем $n_1=-\sin(\alpha_0+\vartheta_0)$, $n_2=\cos(\alpha_0+\vartheta_0)$. Переходя в интеграле (1.10) от переменной t к переменной l, имеем выражение для λ в виде

$$\lambda=\lambda_0\exp\left(\int\limits_{l_0}^{l}n_j\frac{\partial(\alpha_0+\vartheta_0)}{\partial x_j}dl\right) \qquad (3.3)$$

Преобразуем равенство (1.8), дающее значение коэффициента L. Первые два слагаемых в нем без труда вычисляются по значениям α_0, v_0 и ϑ_0. Действительно, обозначив $\theta_{01}=\cos\vartheta_0$ и $\theta_{02}=\sin\vartheta_0$, получим

$$\frac{\partial v_{0j}}{\partial x_j}=\theta_{0j}\frac{\partial v_0}{\partial x_j}+v_0\frac{\partial\theta_{0j}}{\partial x_j} \qquad (3.4)$$

Выражение для последнего слагаемого можно несколько упростить. С этой целью продифференцируем соотношение (1.4)

$$n_i dv_{0i}=v_{0i}\,dn_i-da_0$$

Отсюда получим, учитывая равенство (3.1),

$$n_i dv_{0i}=v_0\cos\alpha_0\,d\vartheta_0-\sin\alpha_0 dv_0$$

Последнее слагаемое в выражении для L представим в виде

$$n_i n_j\frac{\partial v_{0i}}{\partial x_j}=v_0\cos\alpha_0\, n_j\frac{\partial\vartheta_0}{\partial x_j}-\sin\alpha_0 n_j\frac{\partial v_0}{\partial x_j} \qquad (3.5)$$

Объединяя формулы (3.4) и (3.5) и переходя в интеграле (1.8) к переменной l, имеем

$$L=\exp\left\{\frac{1}{2}\int\limits_{l_0}^{l}\left[a_0\frac{\partial n_j}{\partial x_j}+k_0v_0\frac{\partial\theta_{0j}}{\partial x_j}+v_0\cos\alpha_0 n_j\frac{\partial\vartheta_0}{\partial x_j}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+(k_0\theta_{0j}-\sin\alpha_0 n_j)\frac{\partial v_0}{\partial x_j}\right]\frac{dl}{v_0\cos\alpha_0}\right\} \qquad (3.6)$$

Равенства (2.4) и (2.5) принимают вид

$$\lambda_*=\lambda\left\{1+\frac{p_0'}{\lambda_0\sqrt{\rho_{00}a_{00}}}\int\limits_{l_0}^{l}\left[\frac{m_0}{\sqrt{\rho_0a_0}}\frac{1}{L}\exp\left(-\int\limits_{l_0}^{\sigma}n_j\frac{\partial(\alpha_0+\vartheta_0)}{\partial x_j}d\sigma'\right)\right]\frac{d\sigma}{v_0\cos\alpha_0}\right\}^{1/2} \qquad (3.7)$$

$$p_*'=p_0'\frac{1}{L}\sqrt{\frac{\rho_0a_0}{\rho_{00}a_{00}}}\times$$
$$\times\left\{1+\frac{p_0'}{\lambda_0\sqrt{\rho_{00}a_{00}}}\int\limits_{l_0}^{l}\left[\frac{m_0}{\sqrt{\rho_0a_0}}\frac{1}{L}\exp\left(-\int\limits_{l_0}^{\sigma}n_j\frac{\partial(\alpha_0+\vartheta_0)}{\partial x_j}d\sigma'\right)\right]\frac{d\tau}{v_0\cos\alpha_0}\right\}^{-1/2} \qquad (3.8)$$

Здесь значения λ и L даются формулами (3.3) и (3.6). Если набегающий поток однороден, то $L=1$. Считая, что он направлен по оси x_1, получим из формул (3.7) и (3.8) асимптотические законы затухания ударных волн, установленные Л. Д. Ландау [1] и Уитэмом [10]

$$\lambda_*=\lambda_0\left[1+\frac{m_0p_0'(x_2-x_{20})}{\rho_0b_0v_0^2\sin^3\alpha_0\cos\alpha_0}\right]^{1/2}, \qquad p_*'=p_0'\left[1+\frac{m_0p_0'(x_2-x_{20})}{\rho_0b_0v_0^2\sin^3\alpha_0\cos\alpha_0}\right]^{-1/2}$$

Здесь $b_0=\lambda_0/\sin\alpha_0$ — начальное расстояние вдоль оси x_1 между скачком уплотнения и характеристикой, несущей нулевое значение избыточного давления. Если ударная волна порождается тонким профилем, который установлен под малым углом атаки в сверхзвуковом потоке, то величина b_0 равняется части хорды профиля от носика до точки, где касательная к его образующей параллельна вектору скорости набегающего потока.

Рассмотрим обтекание равномерным сверхзвуковым потоком тела вращения под нулевым углом атаки. В этом случае

$$L = \exp\left[\frac{1}{2}\int_{l_0}^{l}\frac{1}{r}\,\frac{a_0}{v_0}\,\frac{dl}{\cos\alpha_0}\right].$$

Здесь r — расстояние, отсчитываемое от оси симметрии x_1. Так как $dl = \operatorname{ctg}\alpha_0 dr$, то выражение для L приобретает вид

$$L = \sqrt{\frac{r}{r_0}}$$

Учитывая полученное равенство, из соотношений (2.4) и (2.5) можно легко вывести асимптотические законы затухания ударных волн в течениях с осевой симметрией [1,10]

$$\lambda_* = \lambda_0\left[1 + \frac{2m_0p_0'\sqrt{r_0}\,(\sqrt{r}-\sqrt{r_0})}{\rho_0b_0v_0^2\sin^3\alpha_0\cos\alpha_0}\right]^{1/2}$$

$$p_*' = p_0'\sqrt{\frac{r_0}{r}}\left[1 + \frac{2m_0p_0'\sqrt{r_0}\,(\sqrt{r}-\sqrt{r_0})}{\rho_0b_0v_0^2\sin^3\alpha_0\cos\alpha_0}\right]^{-1/2}$$

4. Покажем для плоскопараллельных течений, что изложенные результаты, базирующиеся на представлении малого элемента возмущенной области установившегося течения в качестве волны Римана, совпадают с результатами, которые можно получить обычным путем. Действительно, в рамках геометрической акустики приращение $d\lambda$ ширины зоны возмущенного движения определяется выражением

$$d\lambda = \lambda n_j\frac{\partial(\alpha_0+\vartheta_0)}{\partial x_j}\,dl \tag{4.1}$$

которое приводит к формуле (3.3)

Далее, любой небольшой элемент возмущенной области можно рассматривать как течение Прандтля — Мейера, ограниченное ударной волной. Но связь между параметрами газа в решениях Римана и Прандтля — Мейера, как заметил А. А. Никольский [13], в первом приближении одинакова, если сопоставить скорость частиц в первом решении с составляющей скорости по нормали к характеристике во втором.

Легко показать, что эта связь остается одинаковой с точностью до членов второго порядка относительно p' / p_0. Легко показать также, что в случае, когда параметры газа в течении Прандтля — Мейера меняются мало, составляющая скорости вдоль характеристики в первом приближении будет одинаковой для всего потока. Таким образом, любую небольшую область такого течения можно рассматривать как элементарную волну Римана, сносимую в поперечном направлении равномерным потоком. Остается показать, что углы наклона характеристик в течении Прандтля — Мейера и положение скачка уплотнения правильно описываются при помощи рассуждений, проводимых с точки зрения нестационарных движений.

В течении Прандтля — Мейера разность $\alpha' + \vartheta'$ между углом наклона характеристики, несущей давление p', и углом наклона характеристики с $p' = 0$ дается выражением [12]

$$\alpha' + \vartheta' = m_0\operatorname{tg}\alpha_0\frac{p'}{\rho_0a_0^2} \tag{4.2}$$

Скорость распространения фазы U в волне Римана, бегущей против потока, который имеет звуковую скорость, согласно формуле (2.1) равна

$$U = m_0\frac{p'}{\rho_0a_0}$$

Разделив это выражение на величину лучевой скорости $q_0 = a_0 / \operatorname{tg}\alpha_0$, которая совпадает со скоростью поперечного сноса волны, получим, очевидно, приращение угла наклона характеристики в течении Прандтля — Мейера. Оно совпадает с равенством (4.2).

При помощи аналогичных рассуждений можно вывести и формулу, дающую разность β' между углом наклона ударной волны и углом наклона характеристики в невозмущенном течении. Для стационарных движений газа имеем [12]

$$\beta' = \tfrac{1}{2} m_0 \operatorname{tg} \alpha_0 \frac{p'}{\rho_0 a_0^2} \tag{4.3}$$

Скорость распространения ударной волны N против имеющего звуковую скорость потока определяется равенством

$$N = \tfrac{1}{2} m_0 \frac{p'}{\rho_0 a_0}$$

Чтобы получить отклонение угла наклона скачка уплотнения β' относительно характеристики с нулевым значением избыточного давления, необходимо, как и прежде, разделить последнее выражение на величину $q_0 = a_0 / \operatorname{tg} \alpha_0$. В результате приходим к равенству (4.3), чем заканчивается доказательство.

На примере плоскопараллельных течений видно, что оба подхода к задаче о законах развития скачков уплотнения в установившихся сверхзвуковых потоках оказываются эквивалентными и приводят к одинаковым результатам. Однако изучение общего случая пространственных движений газа оказывается значительно более простым, если его проводить с точки зрения нестационарных явлений, так как течение в волне Римана обладает только одним измерением.

Отметим в заключение, что развитая теория остается справедливой, пока выполняется неравенство

$$R, H \gg \lambda_* = \lambda \left\{1 + \frac{p_0'}{\lambda_0 \sqrt{\rho_{00} a_{00}}} \int_{t_0}^{t} \left[\frac{m_0}{\sqrt{\rho_0 a_0}} \frac{1}{L} \exp\left(\int_{t_0}^{\tau} v_{0i} n_j \frac{\partial n_i}{\partial x_j} d\tau'\right)\right] d\tau\right\}^{1/2}$$

которое может ограничивать пределы ее применимости при $l \to \infty$. В случае, когда $H \gg \lambda_*$ всюду в течении, формулы (2.4) и (2.5) имеют асимптотический характер.

Автор искренне благодарен Ю. Д. Шмыглевскому за дискуссию, значительно ускорившую завершение настоящей работы, а также А. И. Голубинскому, М. Д. Ладыженскому и О. Ю. Полянскому за обсуждение результатов.

Поступила 13 IX 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. Об ударных волнах на далеких расстояниях от места их возникновения. ПММ, 1945, т. IX, вып. 4.
2. Христианович С. А. Ударная волна на значительном расстоянии от места взрыва. ПММ, 1956, т. XX, вып. 5.
3. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. ГИТТЛ, М., 1954.
4. Whitham G. B. The propagation of spherical blast. Proc. Roy. Soc., ser. A, 1950, vol. 203, № 1075.
5. Keller J. B. Geometrical Acoustics. I. The Theory of Weak Shock Waves. J. Appl. Phys., 1954, vol. 25, № 8.
6. Губкин К. Е. Распространение разрывов в звуковых волнах. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 4.
7. Otterman J. Finite-Amplitude Propagation Effect on Shock-Wave Travel Times from Explosions at High Altitudes. J. Acoust. Soc. Amer., 1959, vol. 31, № 4.
8. Полянский О. Ю. О затухании ударных волн в движущейся среде с переменными плотностью и температурой. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 5.
9. Рыжов О. С. Затухание ударных волн в неоднородных средах. ПМТФ, 1961. № 2.
10. Whitham G. B. The Flow Pattern of a Supersonic Projectile. Comm. Pure Appl. Mathem., 1952, vol. V, № 3.
11. Friedrichs K. O. Formation and Decay of Shock Waves. Comm. Pure Appl. Mathem., 1948, vol. I, № 3.
12. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. ИЛ, М., 1950.
13. Никольский А. А. Обобщение волн Римана на случай пространства. Сб. теорет. работ по аэродинамике. Оборонгиз, М., 1957.