

УДК 532.582

О КОЛЕБАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ НЕОДНОРОДНОГО ТВЕРДОГО ШАРА В ВИБРИРУЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ

В. Л. Сенницкий

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: igil@hydro.nsc.ru

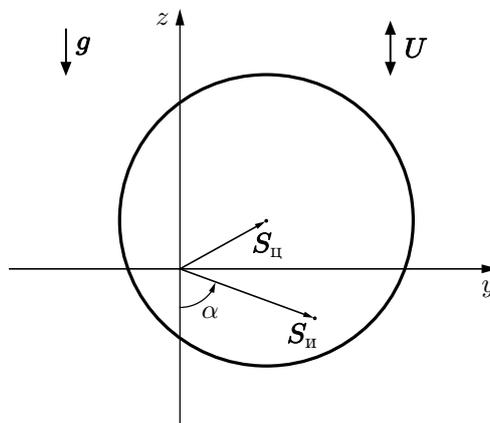
Рассмотрена задача о вращательных колебаниях неоднородного твердого тела — шара — в однородно вибрирующей идеальной жидкости в присутствии поля силы тяжести. Обнаружены новые гидромеханические эффекты.

Ключевые слова: вибрации жидкости, колебания неоднородного твердого тела.

В работах [1–9] получены решения задач о движении однородного твердого тела в однородно и неоднородно вибрирующей идеальной жидкости.

1. Данная работа посвящена изучению следующей задачи. В идеальной несжимаемой неограниченной жидкости находится неоднородное абсолютно твердое тело — шар (см. рисунок). Имеется постоянное поле силы тяжести. В начальный момент времени t , при $t = 0$, жидкость и шар покоятся относительно инерциальной прямоугольной системы координат x, y, z ; центр шара лежит в плоскости $x = 0$. В последующие моменты времени, при $t > 0$, гидромеханическая система подвергается внешним воздействиям, проявляющимся в том, что жидкость на бесконечности заданным образом, с периодом $T_{\text{ж}}$, вибрирует вдоль оси z ; тело колеблется вокруг проходящей через него оси, расположенной на оси x ; течение жидкости является потенциальным. Требуется определить положения устойчивого равновесия и движение тела.

Пусть $A > 0$, Γ и $m > 0$ — радиус, граница и масса шара соответственно; \mathbf{n} — единичная внешняя нормаль к Γ ; $\mathbf{S}_{\text{ц}} \neq 0$ — радиус-вектор центра шара; $\mathbf{S}_{\text{и}} + \mathbf{S}'_{\text{и}}$ — радиус-вектор



Гидромеханическая система (жидкость, твердое тело) и система координат в плоскости $x = 0$

центра инерции шара (вектор $\mathbf{S}_и$ отличен от нуля и лежит в плоскости $x = 0$; вектор $\mathbf{S}'_и$ равен нулю либо параллелен оси x); $\mathbf{e}_x = \{1, 0, 0\}$; $\mathbf{e}_z = \{0, 0, 1\}$; $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$ ($g > 0$) — ускорение свободного падения; α — угол между векторами \mathbf{g} и $\mathbf{S}_и$; $\alpha_н$ — значение α при $t = 0$; $\mathbf{\Omega} = (d\alpha/dt)\mathbf{e}_x$ — угловая скорость вращения шара; $0 \leq \beta \leq \pi$ — угол между векторами $\mathbf{S}_и$ и $\mathbf{S}_и$; L — момент импульса шара относительно оси x ; $M_ж$ — момент сил, действующих со стороны жидкости на шар, относительно оси x ; $M_т$ — момент сил тяжести, действующих на шар, относительно оси x ; f — функция t ; ρ и Φ — плотность и потенциал скорости жидкости соответственно; P — давление в жидкости; $\mathbf{U} = U\mathbf{e}_z = \hat{U}u\mathbf{e}_z$ — скорость жидкости на бесконечности (\hat{U} — наибольшее значение $|\mathbf{U}|$; $u = \text{Re} \sum_{k=1}^{\infty} u_k e^{2k\pi it/T_ж}$ (u_k — постоянные; $\text{Re} \sum_{k=1}^{\infty} u_k = 0$)).

Положение тела задается углом α (любые положения тела, которые характеризуются значениями α , различающимися на $2l\pi$ ($l = \pm 1, \pm 2, \dots$), являются одинаковыми).

Уравнение для момента импульса тела и моментов действующих на него сил (относительно оси x), интеграл Коши — Лагранжа, уравнение неразрывности и условия, которые должны выполняться на границе тела, на бесконечности и в начальный момент времени, имеют следующий вид:

$$\frac{dL}{dt} = M_ж + M_т; \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + \frac{P}{\rho} + gz = f; \quad (1.2)$$

$$\Delta \Phi = 0; \quad (1.3)$$

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{S}_и) \quad \text{на } \Gamma; \quad (1.4)$$

$$\nabla \Phi \rightarrow \mathbf{U} \quad \text{при } x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty; \quad (1.5)$$

$$\alpha = \alpha_н, \quad \frac{d\alpha}{dt} = 0 \quad \text{при } t = 0. \quad (1.6)$$

2. Согласно (1.3)–(1.5)

$$\Phi = U[z + B \cos(\alpha + \beta)] + \frac{A^3 \{U[z + B \cos(\alpha + \beta)] - B(d\alpha/dt)[y \cos(\alpha + \beta) + z \sin(\alpha + \beta)]\}}{2\{x^2 + [y - B \sin(\alpha + \beta)]^2 + [z + B \cos(\alpha + \beta)]^2\}^{3/2}}, \quad (2.1)$$

где $B = |\mathbf{S}_и|$.

Используя (1.1), (1.2), (2.1), найдем

$$\frac{d^2 \alpha}{d\tau^2} = -\varepsilon \lambda \left\{ \varepsilon [(\varkappa - \cos \beta) \sin \alpha - \sin \beta \cos \alpha] - \frac{3}{2} \mu \frac{du}{d\tau} \sin(\alpha + \beta) \right\}. \quad (2.2)$$

Здесь

$$\tau = \frac{t}{T_ж}, \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{g}{B}} T_ж, \quad \varkappa = \frac{mC}{(4\pi/3)A^3 B \rho}, \quad \lambda = \frac{2}{1 + I/((2\pi/3)A^3 B^2 \rho)}, \quad \mu = \frac{\hat{U}}{\sqrt{Bg}}$$

($C = |\mathbf{S}_и|$; I — момент инерции тела относительно оси x).

Задача (1.6), (2.2) может характеризоваться как основная задача о движении тела.

3. Пусть жидкость на бесконечности покоится. Тогда имеет место уравнение

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -\lambda \frac{g}{B} [(\varkappa - \cos \beta) \sin \alpha - \sin \beta \cos \alpha]. \quad (3.1)$$

Остановимся на задаче (1.6), (3.1).

При совместном выполнении соотношений $\beta = 0$, $\varkappa = 1$ тело пребывает в состоянии безразличного равновесия для любого $\alpha_{\text{н}}$. Всюду далее будем полагать, что указанные соотношения совместно не выполняются, если иное не оговорено особо.

Преобразуем (3.1) к виду

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\omega_0^2 \sin(\alpha - \chi_0). \quad (3.2)$$

Здесь

$$\omega_0 = \sqrt{\lambda \frac{g}{B} \sqrt{\varkappa^2 - 2\varkappa \cos \beta + 1}}; \quad (3.3)$$

$$\chi_0 = \arccos \frac{\varkappa - \cos \beta}{\sqrt{\varkappa^2 - 2\varkappa \cos \beta + 1}}. \quad (3.4)$$

В соответствии с (1.6), (3.2) тело может находиться в состоянии равновесия. Положения равновесия тела определяются следующими значениями $\alpha_{\text{р}}$ угла α :

$$\alpha_{\text{р}} = \chi_0; \quad (3.5)$$

$$\alpha_{\text{р}} = \chi_0 + \pi. \quad (3.6)$$

Равновесие тела в положении (3.5) является устойчивым, в положении (3.6) — неустойчивым. При $\alpha_{\text{н}} \neq \alpha_{\text{р}}$ тело совершает колебания около положения (3.5) с циклической частотой (3.3). Задача (1.6), (3.2) имеет решение

$$t = \left(N - \frac{1}{2}\right) \frac{T_0}{2} + \frac{(-1)^N}{\omega_0} F\left(\arcsin \frac{\sin((\alpha - \chi_0)/2)}{\sin((\alpha_{\text{н}} - \chi_0)/2)}, \sin \frac{\alpha_{\text{н}} - \chi_0}{2}\right) \quad (3.7)$$

$$(\chi_0 < \alpha_{\text{н}} < \chi_0 + \pi),$$

где

$$T_0 = \frac{4}{\omega_0} F\left(\frac{\pi}{2}, \sin \frac{\alpha_{\text{н}} - \chi_0}{2}\right) — \quad (3.8)$$

период колебаний тела; F — эллиптический интеграл 1-го рода; $N = 1, 2, \dots$ — номер полупериода колебаний тела, в пределах которого происходит изменение t :

$$(N - 1)T_0/2 \leq t \leq NT_0/2.$$

Из (3.7), (3.8), в частности, следует, что при малых колебаниях тела, для малых по сравнению с единицей значений $\alpha_{\text{н}} - \chi_0$ (в линейном относительно $\alpha_{\text{н}} - \chi_0$ приближении)

$$\alpha = \chi_0 + (\alpha_{\text{н}} - \chi_0) \cos(2\pi t/T_{0\text{м}}). \quad (3.9)$$

Здесь

$$T_{0\text{м}} = 2\pi/\omega_0 — \quad (3.10)$$

период малых колебаний тела.

4. Обратимся к задаче (1.6), (2.2). Будем вести рассмотрение для малых по сравнению с единицей значений ε .

4.1. Применим метод усреднения [10]. Пусть

$$s = \int_0^\tau u d\tau,$$

η — переменная (угол), удовлетворяющая соотношению

$$\alpha = \eta + (3/2)\varepsilon\lambda\mu s \sin(\eta + \beta); \quad (4.1)$$

$$\xi = \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\eta}{d\tau}. \quad (4.2)$$

Используя (4.1), (4.2), приведем (2.2) к нормальной системе уравнений. Представляя правую часть уравнения, содержащего $d\xi/d\tau$, в виде разложения по степеням ε , сохраняя только главный член разложения, перейдем от нормальной системы уравнений к системе уравнений в стандартной форме

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \varepsilon\xi, \quad (4.3)$$

$$\frac{d\xi}{d\tau} = -\varepsilon\lambda \left\{ (\varkappa - \cos\beta) \sin\eta - \sin\beta \cos\eta - \frac{9}{8} \lambda\mu^2 s \frac{du}{d\tau} \sin[2(\eta + \beta)] + 3u\xi \cos(\eta + \beta) \right\}.$$

Произведем усреднение (4.3) по явно содержащейся переменной τ . Полученную в результате этого систему уравнений приведем к уравнению

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} = -\varepsilon^2\lambda \{ (\varkappa - \cos\beta) \sin\eta - \sin\beta \cos\eta + \nu \sin[2(\eta + \beta)] \}, \quad (4.4)$$

где

$$\nu = \frac{9}{8} \lambda\mu^2 \int_{\tau}^{\tau+1} u^2 d\tau = \frac{9}{16} \lambda\mu^2 \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^2.$$

Используя (1.6), (4.1), найдем

$$\eta = \alpha_{\text{н}}, \quad \frac{d\eta}{d\tau} = 0 \quad \text{при} \quad \tau = 0. \quad (4.5)$$

4.2. Рассмотрим задачу (4.4), (4.5) для $\beta = 0, \beta = \pi$.

4.2.1. Согласно (4.4) при $\beta = 0$ имеет место уравнение

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} = -\varepsilon^2\lambda(\varkappa - 1 + 2\nu \cos\eta) \sin\eta. \quad (4.6)$$

Пусть

$$0 < \nu \leq |\varkappa - 1|/2.$$

В соответствии с (4.5), (4.6) положения равновесия тела определяются следующими значениями $\eta_{\text{р}}$ угла η :

$$\eta_{\text{р}} = 0; \quad (4.7)$$

$$\eta_{\text{р}} = \pi. \quad (4.8)$$

Если $\varkappa - 1 > 0$, то равновесие тела в положении (4.7) является устойчивым, в положении (4.8) — неустойчивым. Тело совершает колебания около положения (4.7) с циклической частотой

$$\omega = \sqrt{\lambda(\varkappa - 1 + 2\nu)} \varepsilon/T_{\text{ж}}. \quad (4.9)$$

Если $\varkappa - 1 < 0$, то равновесие шара в положении (4.8) является устойчивым, в положении (4.7) — неустойчивым. Тело совершает колебания около положения (4.8) с циклической частотой

$$\omega = \sqrt{\lambda(-\varkappa + 1 + 2\nu)} \varepsilon/T_{\text{ж}}. \quad (4.10)$$

Пусть

$$\nu > |\varkappa - 1|/2. \quad (4.11)$$

В соответствии с (4.5), (4.6) положения равновесия тела определяются значениями (4.7), (4.8) и следующими значениями η_p угла η :

$$\eta_p = \arccos \frac{-\varkappa + 1}{2\nu}, \quad \eta_p = -\arccos \frac{-\varkappa + 1}{2\nu}. \quad (4.12)$$

Равновесие тела в каждом из положений (4.7), (4.8) является устойчивым, в положениях (4.12) — неустойчивым.

4.2.2. Согласно (4.4) при $\beta = \pi$ имеет место уравнение

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} = -\varepsilon^2 \lambda(\varkappa + 1 + 2\nu \cos \eta) \sin \eta. \quad (4.13)$$

Пусть

$$0 < \nu \leq (\varkappa + 1)/2.$$

В соответствии с (4.5), (4.13) положения равновесия тела определяются значениями (4.7), (4.8) угла η . Равновесие тела в положении (4.7) является устойчивым, в положении (4.8) — неустойчивым. Тело совершает колебания около положения (4.7) с циклической частотой

$$\omega = \sqrt{\lambda(\varkappa + 1 + 2\nu)} \varepsilon / T_{ж}. \quad (4.14)$$

Пусть

$$\nu > (\varkappa + 1)/2. \quad (4.15)$$

В соответствии с (4.5), (4.13) положения равновесия тела определяются значениями (4.7), (4.8) и следующими значениями η_p угла η :

$$\eta_p = -\arccos \frac{\varkappa + 1}{2\nu} + \pi, \quad \eta_p = \arccos \frac{\varkappa + 1}{2\nu} - \pi. \quad (4.16)$$

Равновесие тела в каждом из положений (4.7), (4.8) является устойчивым, в положениях (4.16) — неустойчивым.

4.2.3. Результаты, представленные в подп. 4.2.1, 4.2.2, свидетельствуют о наличии следующего эффекта.

Вибрации жидкости на бесконечности (при выполнении (4.11) для $\beta = 0$, (4.15) для $\beta = \pi$) вызывают увеличение числа положений равновесия тела и, в частности, числа положений его устойчивого равновесия. При

$$\beta = 0, \quad -\arccos \frac{-\varkappa + 1}{2\nu} < \alpha_n < 0 \quad \text{и} \quad 0 < \alpha_n < \arccos \frac{-\varkappa + 1}{2\nu}$$

тело совершает колебания около положения (4.7) с циклической частотой (4.9). При

$$\beta = 0, \quad \arccos \frac{-\varkappa + 1}{2\nu} < \alpha_n < \pi \quad \text{и} \quad \pi < \alpha_n < -\arccos \frac{-\varkappa + 1}{2\nu} + 2\pi$$

тело совершает колебания около положения (4.8) с циклической частотой (4.10). Колебания тела около положения (4.7) (для $\beta = 0$) являются “ординарными”, если $\varkappa - 1 > 0$, и “парадоксальными”, если $\varkappa - 1 < 0$. Колебания тела около положения (4.8) (для $\beta = 0$) являются “ординарными”, если $\varkappa - 1 < 0$, и “парадоксальными”, если $\varkappa - 1 > 0$. При

$$\beta = \pi, \quad \arccos \frac{\varkappa + 1}{2\nu} - \pi < \alpha_n < 0 \quad \text{и} \quad 0 < \alpha_n < -\arccos \frac{\varkappa + 1}{2\nu} + \pi$$

тело совершает колебания около положения (4.7) с циклической частотой (4.14). При

$$\beta = \pi, \quad -\arccos \frac{\varkappa + 1}{2\nu} + \pi < \alpha_n < \pi \quad \text{и} \quad \pi < \alpha_n < \arccos \frac{\varkappa + 1}{2\nu} + \pi$$

тело совершает колебания около положения (4.8) с циклической частотой

$$\omega = \sqrt{\lambda(-\varkappa - 1 + 2\nu)} \varepsilon / T_{\text{ж}}. \quad (4.17)$$

Колебания тела около положения (4.7) (для $\beta = \pi$) являются “ординарными”. Колебания тела около положения (4.8) (для $\beta = \pi$) являются “парадоксальными”.

Отметим, что в соответствии с (4.9), (4.10), (4.14), (4.17) циклические частоты “парадоксальных” колебаний тела меньше циклических частот его “ординарных” колебаний. Более того, циклические частоты “парадоксальных” колебаний тела могут быть сколь угодно малыми.

Характерная черта “парадоксальных” колебаний тела состоит в том, что они являются “перевернутыми”, тело совершает их “в перевернутом виде”.

Существует эффект, известный как “маятник Капицы” [11], — эффект “парадоксальных”, “перевернутых” колебаний твердого тела в отсутствие жидкости (при вибрациях оси подвеса тела). Результаты изучения задачи (4.4), (4.5) для $\beta = 0$, $\beta = \pi$, включающие (4.6)–(4.10), (4.12)–(4.14), (4.16), (4.17), в частности, указывают на наличие эффекта, аналогичного “маятнику Капицы”, в гидромеханике.

4.3. Рассмотрим задачу (4.4), (4.5) для $\beta \neq 0$, $\beta \neq \pi$.

4.3.1. Определим, может ли иметь место положение тела, представляющее собой положение его устойчивого равновесия, и для $\nu = 0$, и для $\nu > 0$ (при $\beta \neq 0$, $\beta \neq \pi$).

Согласно (3.5) существование положения равновесия тела при $\nu > 0$, совпадающего с положением его устойчивого равновесия при $\nu = 0$, соответствует выполнению условия

$$\eta_p = \chi_0. \quad (4.18)$$

Используя (3.4), (4.4), (4.5), (4.18), найдем

$$\chi_0 = -\beta + \pi/2, \quad (4.19)$$

где

$$0 < \beta = \arccos(1/\varkappa) < \pi/2 \quad (\varkappa > 1) \text{ —}$$

решение уравнения

$$\varkappa \cos \beta - 1 = 0. \quad (4.20)$$

Равновесие тела в положении (4.18), (4.19) является устойчивым, если

$$0 < \nu \leq \sqrt{\varkappa^2 - 1}/2, \quad (4.21)$$

и неустойчивым, если

$$\nu > \sqrt{\varkappa^2 - 1}/2. \quad (4.22)$$

Тело может совершать колебания около положения (4.18), (4.19); период $T_{\text{м}}$ малых колебаний тела выражается формулами

$$T_{\text{м}} = \frac{2\pi T_{\text{ж}}}{\sqrt{\lambda(\sqrt{\varkappa^2 - 1} - 2\nu)} \varepsilon} \quad \text{при} \quad 0 < \nu < \frac{\sqrt{\varkappa^2 - 1}}{2}; \quad (4.23)$$

$$T_{\text{м}} = \frac{4F(\pi/2, 1/\sqrt{2}) T_{\text{ж}}}{\sqrt{\lambda\nu} (\alpha_n + \beta - \pi/2) \varepsilon} \quad \text{при} \quad \nu = \frac{\sqrt{\varkappa^2 - 1}}{2}.$$

Отметим, что из (3.3), (3.10), (4.20), (4.23) следует

$$T_M \rightarrow T_{0M} \quad \text{при} \quad \nu \rightarrow 0.$$

Результаты, полученные в данном подпункте, свидетельствуют о том, что при выполнении (4.19) в соответствии с (3.5), (4.18), (4.21), (4.22) имеет место положение тела, которое является положением его устойчивого равновесия для

$$0 \leq \nu \leq \sqrt{\varkappa^2 - 1}/2.$$

4.3.2. Пусть

$$Q = \sqrt{[\sin \beta - \nu \sin(\eta + 2\beta)]^2 + [\varkappa - \cos \beta + \nu \cos(\eta + 2\beta)]^2} > 0.$$

Преобразуем (4.4) к виду

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} = -\varepsilon^2 \lambda Q \sin(\eta - \chi), \quad (4.24)$$

где $\chi = \chi(\eta)$ — переменная (угол), удовлетворяющая соотношениям

$$\sin \chi = [\sin \beta - \nu \sin(\eta + 2\beta)]/Q; \quad (4.25)$$

$$\cos \chi = [\varkappa - \cos \beta + \nu \cos(\eta + 2\beta)]/Q \quad (4.26)$$

и условию

$$\chi = \chi_0 \quad \text{при} \quad \nu = 0. \quad (4.27)$$

В соответствии с (4.5), (4.24) положения равновесия тела определяются значениями η_p, η'_p угла η , представляющими собой решения уравнений

$$\eta_p = \chi(\eta_p); \quad (4.28)$$

$$\eta'_p = \chi(\eta'_p) + \pi. \quad (4.29)$$

Равновесие тела в каждом из положений (4.28), (4.29) может быть как устойчивым, так и неустойчивым. В частности, равновесие тела является устойчивым в положении (4.28), если

$$1 - \left. \frac{d\chi}{d\eta} \right|_{\eta=\eta_p} > 0, \quad (4.30)$$

и неустойчивым в положении (4.29), если

$$1 - \left. \frac{d\chi}{d\eta} \right|_{\eta=\eta'_p} > 0. \quad (4.31)$$

4.3.3. Рассмотрим формулы (4.25), (4.26), (4.28)–(4.31) для малых по сравнению с единицей значений ν .

Согласно (4.25)–(4.27), (4.30), (4.31) при $\nu \rightarrow 0$ равновесие тела в положении (4.28) является устойчивым, в положении (4.29) — неустойчивым.

Остановимся на вопросе о том, в какой мере различаются положения устойчивого равновесия тела при $\nu = 0$ и $\nu > 0$ (в линейном относительно ν приближении). Используя (3.4), (4.25)–(4.28), найдем

$$\Delta\chi = \eta_p - \chi_0 = 2\nu \frac{\varkappa(1 - \varkappa \cos \beta) \sin \beta}{(\varkappa^2 - 2\varkappa \cos \beta + 1)^{3/2}}. \quad (4.32)$$

Формулой (4.32) устанавливается, что возможна реализация каждого из соотношений $\Delta\chi > 0$, $\Delta\chi < 0$ либо

$$\Delta\chi = 0, \quad (4.33)$$

причем (в соответствии с подп. 4.3.1) (4.33) имеет место при выполнении (4.20).

Отметим, что из (3.4), (4.32) следует:

— если $0 < \chi_0 < \pi/2$, то $\Delta\chi > 0$, $\Delta\chi < 0$, $\Delta\chi = 0$;

— если $\pi/2 \leq \chi_0 < \pi$, то $\Delta\chi > 0$.

Результаты, полученные в данном подпункте, в частности, свидетельствуют о том, что вибрации жидкости могут вызывать сдвиг положения устойчивого равновесия тела как в направлении к его “перевернутому” положению, так и в направлении от его “перевернутого” положения.

4.4. Рассмотрим задачу (4.4), (4.5) для больших по сравнению с единицей значений ν .

4.4.1. Согласно (4.4) при $\nu \rightarrow \infty$ имеет место уравнение

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} = -\varepsilon^2 \lambda \nu \sin[2(\eta + \beta)]. \quad (4.34)$$

В соответствии с (4.5), (4.34) положения равновесия тела определяются следующими значениями η_p угла η :

$$\eta_p = -\beta; \quad (4.35)$$

$$\eta_p = -\beta + \pi/2, \quad \eta_p = -\beta - \pi/2; \quad (4.36)$$

$$\eta_p = -\beta + \pi. \quad (4.37)$$

Равновесие тела в каждом из положений (4.35), (4.37) является устойчивым, в положениях (4.36) — неустойчивым. При

$$-\beta - \pi/2 < \alpha_n < -\beta \quad \text{и} \quad -\beta < \alpha_n < -\beta + \pi/2$$

тело совершает колебания около положения (4.35). При

$$-\beta + \pi/2 < \alpha_n < -\beta + \pi \quad \text{и} \quad -\beta + \pi < \alpha_n < -\beta + 3\pi/2$$

тело совершает колебания около положения (4.37). В приближении малых колебаний тела задача (4.5), (4.34) имеет решения

$$\eta = -\beta + (\alpha_n + \beta) \cos(\omega_\infty t); \quad (4.38)$$

$$\eta = -\beta + \pi + (\alpha_n + \beta - \pi) \cos(\omega_\infty t), \quad (4.39)$$

где

$$\omega_\infty = \sqrt{2\lambda\nu} \varepsilon / T_{ж}. \quad (4.40)$$

4.4.2. Использование (3.3), (3.9) и (4.38)–(4.40) позволяет сделать вывод о том, что циклическая частота (4.40) колебаний тела около положений (4.35), (4.37) совпадает с циклической частотой (3.3) колебаний тела около положения (3.5) в “эффективном” поле силы тяжести, напряженность \mathbf{g}' которого удовлетворяет условию

$$|\mathbf{g}'| = 2\nu g / \sqrt{\varkappa^2 - 2\varkappa \cos \beta + 1};$$

направление \mathbf{g}' может быть выбрано таким, чтобы положение равновесия тела, соответствующее (3.5), совпадало с положением (4.35) или с положением (4.37).

4.5. Сопоставим задачи (4.4), (4.5) и (4.5), (4.34). Уравнение (4.4) при $\beta = 0$, $\varkappa = 1$, $\nu > 0$ принимает вид уравнения (4.34) при $\beta = 0$:

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} = -\varepsilon^2 \lambda \nu \sin 2\eta. \quad (4.41)$$

Это означает, что если $\beta = 0$, то результаты для $\nu \rightarrow \infty$, полученные в подп. 4.4.1, применимы для $\varkappa = 1$, $\nu > 0$. В частности, для любого $\nu > 0$ при совместном выполнении соотношений $\beta = 0$, $\varkappa = 1$ имеют место положения устойчивого равновесия тела

$$\eta_p = 0, \quad \eta_p = \pi,$$

около которых тело совершает колебания с циклической частотой (4.40) (что непосредственно следует также из задачи (4.5), (4.41)).

Таким образом, из-за вибраций жидкости тело может выходить из состояния безразличного равновесия, приобретать положения устойчивого равновесия, совершать колебания, период которых отличен от периода, с которым вибрирует жидкость на бесконечности.

5. Проведенное исследование привело к обнаружению новых гидромеханических эффектов, в числе которых выделяется “эффект выхода тела из состояния безразличного равновесия”. Этот эффект представляет очевидный самостоятельный интерес; вместе с тем им с исчерпывающей ясностью иллюстрируется различие между “обычным” и “необычным”, являющееся выражением изменений свойств гидромеханической системы, обусловленных влиянием на нее внешних воздействий.

Результаты данной работы могут быть использованы, в частности, для решения проблемы управления колебательными процессами в гидромеханических системах.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сенницкий В. Л.** О движении кругового цилиндра в вибрирующей жидкости // ПМТФ. 1985. № 5. С. 19–23.
2. **Сенницкий В. Л.** Движение шара в жидкости, вызываемое колебаниями другого шара // ПМТФ. 1986. № 4. С. 31–36.
3. **Луговцов Б. А., Сенницкий В. Л.** О движении тела в вибрирующей жидкости // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 2. С. 314–317.
4. **Sennitskii V. L.** On motion of inclusions in uniformly and non-uniformly vibrating liquid // Proc. of the Intern. workshop on G-jitter, Potsdam (USA), June 13–19, 1993. Potsdam: Clarkson Univ., 1993. P. 178–186.
5. **Сенницкий В. Л.** Движение шара в жидкости в присутствии стенки при колебательных воздействиях // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 4. С. 125–132.
6. **Карева И. Е., Сенницкий В. Л.** О движении кругового цилиндра в колеблющейся жидкости // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 2. С. 103–105.
7. **Пятигорская О. С., Сенницкий В. Л.** О движении твердого тела в неоднородно колеблющейся жидкости // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер. Математика, механика, информатика. 2002. Т. 2, вып. 2. С. 55–59.
8. **Пятигорская О. С., Сенницкий В. Л.** Движение шара в жидкости, вызываемое колебаниями другого шара // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 4. С. 102–105.
9. **Сенницкий В. Л.** О движении включения в однородно и неоднородно колеблющейся жидкости // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 1. С. 79–85.
10. **Боголюбов Н. Н.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. М.: Наука, 1974.
11. **Капица П. Л.** Маятник с вибрирующим подвесом // Успехи физ. наук. 1951. Т. 44, вып. 1. С. 7–20.