

УДК 532.591

ГИДРОУПРУГОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПЛАВАЮЩЕЙ ПЛАСТИНЫ НА ВОЛНАХ

Л. А. Ткачева

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Изучается поведение плавающей полубесконечной пластины под действием поверхностных волн, набегающих нормально к краю. Использовано аналитическое решение этой задачи, полученное ранее методом Винера — Хопфа. Исследуется распределение по пластине смещений, деформаций и давления в зависимости от безразмерных параметров задачи: приведенных жесткости и глубины, а также их асимптотическое распределение для случаев больших и малых длин волн.

Модель плавающей упругой пластины применялась ранее при изучении поведения ледяного покрова [1, 2]. В настоящее время эта задача исследуется в связи с проектированием искусственных островов и плавающих платформ различного назначения. Существующие численные методы позволяют получить достоверные результаты только в области больших и умеренных длин волн и становятся некорректными при малых длинах набегающих волн. Имеется ряд аналитических решений для полубесконечной пластины, построенных методом Винера — Хопфа [3–6]. Однако во всех указанных работах решение зависит от двух констант, для определения которых необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений. Коэффициенты системы имеют сложный вид. В [7] система решена, построено аналитическое решение методом Винера — Хопфа для нормального набега волн на пластину в жидкости конечной глубины, получены простые точные формулы для коэффициентов отражения и прохождения, а также выражение для потенциала скорости. Однако в [7] исследовано только дальнее поле. Данная работа посвящена изучению поведения пластины: распределения смещений, деформаций и давления по пластине. Аналогичные результаты для бесконечно глубокой жидкости содержатся в [8].

Постановка задачи. Рассмотрим потенциальное течение тяжелой идеальной несжимаемой жидкости глубины H . Поверхность жидкости частично закрыта тонкой упругой полубесконечной пластиной, остальная часть жидкости свободна. Плоская прогрессивная волна малой амплитуды набегаёт под прямым углом к пластине, причем длина волны значительно больше толщины пластины. Задача решается в линейной постановке. Введем декартову систему координат (x, y) с центром O в кромке пластины и осью Ox , направленной вдоль пластины перпендикулярно краю. Осадкой платформы в воду будем пренебрегать, граничные условия сносятся на невозмущенную поверхность воды. Потенциал скоростей жидкости φ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$ ($-H < y < 0$).

Введем безразмерные переменные $\varphi' = \varphi/(A\sqrt{gl})$, $x' = x/l$, $y' = y/l$, $t' = \omega t$, $p' = p/(\rho g A)$, $H' = H/l$, $l = g/\omega^2$, где A — амплитуда падающей волны; l — характерная длина; g — ускорение свободного падения; t — время; p — давление; ρ — плотность жидкости; ω — частота набегающей волны. Далее штрихи будем опускать. Зависимость всех функций от времени в безразмерных переменных определяется множителем e^{-it} . Потенциал φ представим в виде

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1, \quad \varphi_0 = e^{i\gamma x} \operatorname{ch}(\gamma(y + H)) / \operatorname{ch}(\gamma H),$$

где φ_0 — потенциал падающей волны; φ_1 — дифрагированный потенциал; γ — волновое число, удовлетворяющее дисперсионному соотношению для поверхностных волн: $\gamma \operatorname{th}(\gamma H) - 1 = 0$. Тогда получим краевую задачу для потенциала φ_1 [7]

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_1 &= 0 & (-H < y < 0, \quad -\infty < x < \infty), \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} &= 0 & (y = -H, \quad -\infty < x < \infty); \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \varphi_1 &= 0 & (y = 0, \quad x < 0); \end{aligned} \quad (1)$$

$$\left(\beta \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 1 - \delta\right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \varphi_1 = B e^{ix} \quad (y = 0, \quad x > 0); \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (x = 0, \quad y = 0).$$

Здесь $\beta = D/(\rho g l^4)$ и $\delta = \rho_0 h/(\rho l)$ — безразмерные параметры задачи; ρ_0 и h — плотность и толщина пластины соответственно; $B = \delta - \beta$. Кроме того, должны выполняться условия излучения при $|x| \rightarrow \infty$ и условия регулярности вблизи кромки пластины (локальная ограниченность энергии). Ввиду сделанных предположений параметр $\delta \ll 1$. В дальнейшем положим δ равным нулю.

Аналитическое решение задачи. Аналитическое решение задачи для потенциала φ_1 методом Винера — Хопфа получено в работе [7]. Введем дисперсионные функции $K_1(\alpha)$ для свободной поверхности воды и $K_2(\alpha)$ для жидкости под пластиной. Из граничных условий (1), (2) получаем, что на свободной поверхности воды дисперсионное соотношение имеет вид $K_1(\alpha) = \alpha \operatorname{th}(\alpha H) - 1$, а под пластиной — $K_2(\alpha) = (\beta \alpha^4 + 1)\alpha \operatorname{th}(\alpha H) - 1$. Дисперсионное соотношение для воды имеет действительные корни $\pm \gamma$ и счетное множество чисто мнимых корней $\pm \gamma_j$ ($j = 1, 2, \dots$), расположенных симметрично относительно действительной оси. Второе дисперсионное соотношение (под пластиной) имеет два действительных корня $\pm \alpha_0$, четыре комплексных корня $\pm \alpha_{-1}$, $\pm \alpha_{-2}$ и счетное множество чисто мнимых корней $\pm \alpha_j$ ($j = 1, 2, \dots$). При этом α_{-1} лежит в первом квадранте, а α_{-2} — во втором квадранте, $\alpha_{-2} = -\bar{\alpha}_{-1}$.

Рассмотрим односторонние преобразования Фурье для дифрагированного потенциала φ_1

$$\Phi_+(\alpha, y) = \int_0^{\infty} e^{i\alpha x} \varphi_1(x, y) dx, \quad \Phi_-(\alpha, y) = \int_{-\infty}^0 e^{i\alpha x} \varphi_1(x, y) dx.$$

В [7] показано, что Φ_+ и Φ_- аналитичны в областях S_+ и S_- соответственно (S_+ — полуплоскость $\operatorname{Im} \alpha > -c$ с разрезами, исключаяющими точки $-\alpha_0$ и $-\gamma$, S_- — полуплоскость $\operatorname{Im} \alpha < c$ с разрезами, исключаяющими точки α_0 и γ ; значение c соответствует наименьшей мнимой части корней γ_1, α_1 (см. рис. 3 в [7])).

Введем функцию $K(\alpha) = K_1(\alpha)/K_2(\alpha)$. Согласно методу Винера — Хопфа необходимо факторизовать функцию $K(\alpha)$, т. е. представить ее в виде $K(\alpha) = K_+(\alpha)K_-(\alpha)$ (функции $K_+(\alpha)$ и $K_-(\alpha)$ регулярны в областях S_+ и S_- соответственно). Функции $K_{\pm}(\alpha)$ определим выражениями [7]

$$K_{\pm}(\alpha) = \frac{(\alpha \pm \gamma)g_{\pm}(\alpha)}{\sqrt{\beta}(\alpha \pm \alpha_0)(\alpha \pm \alpha_1)(\alpha \pm \alpha_2)}, \quad g_{\pm}(\alpha) = \exp\left(\pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty \mp id}^{\infty \mp id} \frac{\ln g(x)}{x - \alpha} dx\right), \quad d < c,$$

$$g(x) = K(x)\beta(x^2 - \alpha_0^2)(x^2 - \alpha_{-1}^2)(x^2 - \alpha_{-2}^2)/(x^2 - \gamma^2).$$

В [7] для потенциала скоростей φ получены представления

$$\varphi(x, y) = e^{i\gamma x} \frac{\operatorname{ch}(\gamma(y+H))}{\operatorname{ch}(\gamma H)} - \frac{BK_-(-\gamma)}{2\pi i\gamma^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} \frac{\operatorname{ch}(\alpha(y+H))K_+(\alpha)\alpha^2}{\operatorname{ch}(\alpha H)(\gamma+\alpha)K_1(\alpha)} d\alpha; \quad (3)$$

$$\varphi(x, y) = e^{i\gamma x} \frac{\operatorname{ch}(\gamma(y+H))}{\operatorname{ch}(\gamma H)} - \frac{BK_-(-\gamma)}{2\pi i\gamma^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} \frac{\operatorname{ch}(\alpha(y+H))\alpha^2}{\operatorname{ch}(\alpha H)K_-(\alpha)(\gamma+\alpha)K_2(\alpha)} d\alpha. \quad (4)$$

Контур интегрирования выбирается таким образом, чтобы он полностью лежал в пересечении областей S_+ и S_- .

Прогиб пластины и возвышение свободной границы. Вертикальное смещение верхней поверхности жидкости вычисляется по формуле [7] $\eta_t = \varphi_y$. Отсюда имеем $\eta(x) = i\varphi_y(x, 0)$.

Обозначим через $\eta_+(x)$ вертикальное смещение пластины. Используя представление (4), получим

$$\eta_+(x) = ie^{i\gamma x} + \frac{\beta\gamma^2 K_-(-\gamma)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} \frac{\alpha^3 \operatorname{th}(\alpha H)}{K_-(\alpha)(\gamma+\alpha)K_2(\alpha)} d\alpha.$$

Подынтегральная функция аналитична в нижней полуплоскости с разрезом, за исключением полюсов в точках $-\gamma, -\alpha_j$ ($j = -2, -1, 0, \dots$). Вычет в точке $-\gamma$ компенсируется набегающей волной. Таким образом,

$$\eta_+(x) = -i\beta\gamma^2 K_-(-\gamma) \sum_{j=-2}^{\infty} e^{i\alpha_j x} \frac{\alpha_j^3 \operatorname{th}(\alpha_j H)}{(\gamma - \alpha_j)K_-(-\alpha_j)K_2'(-\alpha_j)}. \quad (5)$$

Из формулы (5) следует, что вертикальные перемещения пластины складываются из незатухающей волны с волновым числом α_0 и краевых эффектов, экспоненциально затухающих вдали от края. Заметим, что в бесконечно глубокой жидкости затухание краевых эффектов имеет степенной характер [8].

Длина волны в пластине λ в безразмерных переменных определяется формулой $\lambda = 2\pi/\alpha_0$. При $\beta \ll 1$ $\alpha_0 \simeq \gamma$, и длина волны в пластине такая же, как у набегающей волны. С ростом β значение α_0 уменьшается, а длина волны в пластине увеличивается. При $\beta \rightarrow \infty$ (этот случай соответствует коротким набегающим волнам) $\alpha_0 \rightarrow 0$. В размерных переменных длина волны в пластине равна $2\pi l/\alpha_0$. Введем характерную длину [9] $L = (D/(\rho g))^{1/4}$. Так как $\alpha_0 \sim (\beta H)^{-1/6}$ при $\beta \rightarrow \infty$, длина волны в пластине имеет порядок $O(l^{1/3}L^{2/3}H^{1/6})$. Таким образом, при $\beta \rightarrow \infty$ длина волны в пластине стремится к нулю.

В выражении (5) сделаем подстановку $\alpha_j^3 \operatorname{th}(\alpha_j H) = -K_1(\alpha_j)/(\beta\alpha_j^2)$ и представим полученное выражение в виде интеграла. Тогда для смещения кромки получим

$$\eta_+(0) = \frac{\beta\gamma^2 K_-(-\gamma)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_1(\alpha)}{\alpha^2 K_-(\alpha)(\gamma+\alpha)K_2(\alpha)} d\alpha = \frac{\beta\gamma^2 K_-(-\gamma)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_+(\alpha)}{\alpha^2(\gamma+\alpha)} d\alpha.$$

Контур интегрирования выбирается по действительной оси с обходом точек $\alpha_0, 0, \gamma$ снизу, а точек $-\alpha_0, -\gamma$ сверху. Последний интеграл вычисляется с помощью теории вычетов. Подынтегральная функция аналитична в верхней полуплоскости, за исключением кратного полюса в нуле. Получаем простую формулу для вертикального смещения кромки пластины

$$\eta_+(0) = i\beta\gamma K_+(\gamma)[K_+'(0) - K_+(0)/\gamma]. \quad (6)$$

Так как $K(0) = 1$ и $K_+(\alpha) = K_-(-\alpha)$, то $K_+(0) = K_-(0) = 1$. Тогда формулу (6) запишем в виде

$$\eta_+(0) = i\beta K_+(\gamma)[\gamma K_+'(0) - 1].$$

Для возвышения свободной границы $\eta_-(x)$, используя представление (3), находим

$$\eta_-(x) = ie^{i\gamma x} + \frac{\beta\gamma^2 K_-(-\gamma)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} \frac{\alpha^3 \operatorname{th}(\alpha H) K_+(\alpha)}{(\gamma + \alpha) K_1(\alpha)} d\alpha.$$

Подынтегральная функция аналитична в верхней полуплоскости, за исключением полюсов в точках γ, γ_k ($k = 1, 2, \dots$). Так как $K_-(-\alpha) = K_+(\alpha)$, имеем

$$\eta_-(x) = ie^{i\gamma x} + \frac{i\beta K_+^2(\gamma)}{2K_1'(\gamma)} e^{-i\gamma x} + i\beta\gamma^2 K_+(\gamma) \sum_{j=1}^{\infty} e^{-|\gamma_j|x} \frac{\gamma_j^2 K_+(\gamma_j)}{(\gamma + \gamma_j) K_1'(\gamma_j)}. \quad (7)$$

В (7) первый член представляет собой падающую волну, второй член — отраженную волну, а остальные — краевые эффекты (моды, экспоненциально затухающие вдали от кромки).

Проведено численное исследование распределения смещений пластины и возвышения свободной границы в зависимости от параметра β . При всех значениях β максимальные смещения пластины наблюдаются вблизи кромки. Расчеты показали, что при всех значениях β краевые эффекты затухают достаточно быстро, на расстоянии 1,5 длины проходящей волны поправка за счет краевых эффектов не превышает 0,1 %. На рис. 1 представлено распределение смещений пластины по x при различных значениях β и H . При $\beta = 10^{-4}$ кривые, соответствующие $H = 1$ и $H = 100$, совпадают. На рис. 1 видно, что влияние глубины жидкости на смещения пластины несущественно.

Вертикальные смещения верхней границы имеют разрыв в кромке. Это означает, что вертикальное смещение края пластины и возвышение свободной границы в кромке различны. На рис. 2 приведена зависимость амплитуд смещений края пластины $|\eta_+|$ и возвышения свободной границы в кромке $|\eta_-|$ от β . При малых значениях β (что соответствует малой жесткости пластины или длинным набегающим волнам) пластина ведет себя как тонкая пленка и практически не препятствует распространению волны, амплитуды колебаний пластины близки к единице. С увеличением β амплитуда колебаний кромки пластины растет и достигает максимума, затем монотонно убывает и стремится к нулю при $\beta \rightarrow \infty$ (случай больших β соответствует большой жесткости или коротким набегающим волнам).

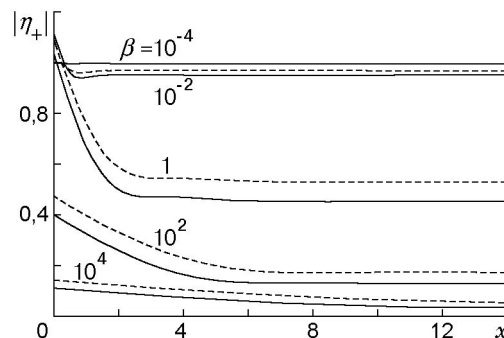


Рис. 1. Распределение амплитуд смещений пластины $|\eta_+|$ по x при различных значениях β :

сплошные кривые — $H = 1$, штриховые — $H = 100$

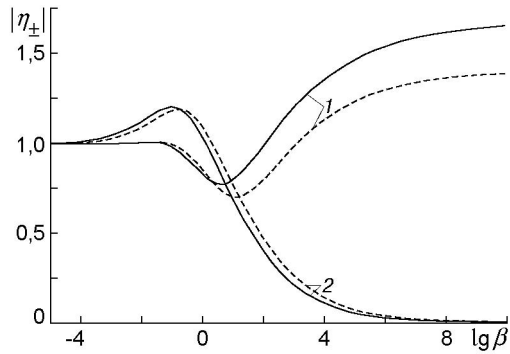


Рис. 2

Рис. 2. Зависимость амплитуд возвышения свободной границы в кромке $|\eta_{\pm}|$ (кривые 1) и амплитуд смещений края пластины $|\eta_{+}|$ (кривые 2) от β : сплошные кривые — $H = 1$, штриховые — $H = 100$

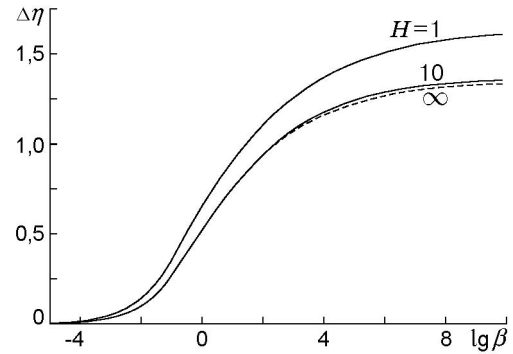


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость амплитуд разности уровней $\Delta\eta$ от β : сплошные кривые — $H = 1; 10$, штриховая — $H = \infty$

Амплитуда колебаний жидкости в кромке практически равна единице при $\beta < 0,1$. С ростом β она начинает уменьшаться и достигает минимума, затем монотонно увеличивается и достигает асимптотического значения, которое соответствует абсолютно жесткой пластине. Из сравнения графиков следует, что глубина жидкости оказывает большее влияние на амплитуду колебаний жидкости, чем на амплитуду колебаний пластины. При малых значениях β амплитуда колебаний края пластины больше, чем амплитуда колебаний жидкости в кромке. При больших значениях β пластина почти не колеблется, а амплитуда колебаний жидкости максимальна.

На рис. 3 представлена зависимость амплитуды разности уровней пластины и жидкости в кромке от β при $H = 1; 10; \infty$ [8]. При малой глубине жидкости амплитуды плесканий жидкости увеличиваются. С ростом β амплитуда разности уровней монотонно увеличивается. Если толщина пластины меньше амплитуды разности уровней, то край пластины будет периодически выходить из воды и хлопать по ней. В этом случае следует учитывать эффект удара и для описания явления применять другую модель.

Деформации пластины. Деформации пластины вычисляются по формуле $e_{xx} = -h\eta''(x)/2$. Амплитуда деформаций пластины в размерных переменных имеет вид [7]

$$e_{xx} = Ahe(x)/(2l^2), \quad e(x) = \eta''(x).$$

Распределение амплитуд безразмерных деформаций $e(x)$ по пластине при различных значениях β приведено на рис. 4. В силу краевого условия деформации в кромке равны нулю, на некотором расстоянии от кромки амплитуда деформаций достигает максимума и затем уменьшается до соответствующего значения в проходящей волне. Амплитуды деформаций сильно зависят от глубины жидкости только для малых значений параметров β и H . Это связано с тем, что волновое число α_0 сильно зависит от глубины при малых β и H , причем $\alpha_0 \rightarrow \infty$ при $H \rightarrow 0$.

В таблице представлены безразмерные координаты точек максимальных деформаций на пластине (отнесенные к длине проходящей волны $\lambda = 2\pi l/\alpha_0$) для различных значений параметра β при $H = 1$ и $H = \infty$ [8]. Это точки максимальных напряжений (в них наиболее вероятны поломки и трещины), расположенные достаточно близко к краю пластины. Имеются диапазоны значений β , где положение этих точек резко меняется: $-1,5 < \lg \beta < -1$

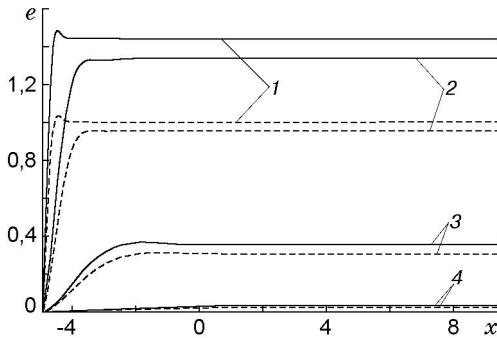


Рис. 4. Распределение амплитуд безразмерных деформаций $e(x)$: сплошные кривые — $H = 1$, штриховые — $H = 100$; 1 — $\beta = 10^{-4}$, 2 — $\beta = 10^{-2}$, 3 — $\beta = 1$, 4 — $\beta = 10^2$

Безразмерные координаты точек максимальных деформаций на пластине

H	$\lg \beta$												
	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
1	0,04	0,09	0,16	0,60	∞	0,45	0,46	0,47	0,47	0,47	0,47	0,48	0,48
∞	0,05	0,08	0,13	0,51	1,9	0,45	0,45	0,45	0,45	0,44	0,44	0,44	0,43

при $H = 1$ и $-1 \leq \lg \beta < -0,75$ при $H = \infty$. В указанных диапазонах отношение максимальной амплитуды деформаций к амплитуде деформаций в проходящей волне становится очень незначительным, и знание точного положения этих точек уже несущественно, амплитуда максимальных деформаций практически совпадает с амплитудой деформаций в проходящей волне.

Давление на пластине. Безразмерное гидродинамическое давление на пластине определяется из соотношения $p = -\rho(\varphi_t + g\eta_+)$ или $p = i(\varphi - \varphi_y)$. Подставляя в последнюю формулу представление (4) для потенциала, найдем выражение для давления на пластине

$$p(x, 0) = -i\beta\gamma^2 K_-(-\gamma) \sum_{j=-2}^{\infty} e^{i\alpha_j x} \frac{\alpha_j^2 K_1(-\alpha_j)}{K_-(-\alpha_j) K_2'(\alpha_j)(\gamma - \alpha_j)}. \tag{8}$$

Здесь, как и ранее, основной вклад дает незатухающая волна с волновым числом α_0 , а остальные члены представляют собой краевые эффекты, экспоненциально затухающие вдали от кромки.

Амплитуда давления в проходящей волне p_∞ связана с соответствующей амплитудой потенциала $|T|$ соотношением $p_\infty = |K_1(\alpha_0)||T|$ и вычисляется по формуле

$$p_\infty = \frac{2|K_1(\alpha_0)|}{\gamma + \alpha_0} \sqrt{\frac{\gamma|K_1'(\gamma)|}{\text{th}(\alpha_0 H)|K_2'(\alpha_0)|}}.$$

Зависимость амплитуд давления p_∞ от β для различных значений H приведена на рис. 5. Влияние глубины жидкости здесь существенно. В бесконечно глубокой жидкости амплитуда давления на бесконечности p_∞ при $\beta \rightarrow \infty$ стремится к нулю (давлению на бесконечности для абсолютно жесткой пластины). В жидкости конечной глубины давление на бесконечности стремится к константе, так как при этом давление на бесконечности конечно для жесткой пластины. При $H \rightarrow \infty$ эта константа стремится к нулю.

Амплитуда давления на кромке p_0 определяется формулой $p_0 = \Delta\eta$ (см. рис. 3). Влияние глубины жидкости оказывается существенным при больших значениях β . На рис. 6 представлено распределение амплитуды давления по пластине при $H = 1$ и различных значениях β . Из рис. 6 следует, что амплитуда давления немонотонна по x , максимум достигается на кромке, а при $x \rightarrow \infty$ она стремится к конечному значению, соответствующему амплитуде давления в проходящей волне. При $\beta \rightarrow 0$ давление стремится к нулю.

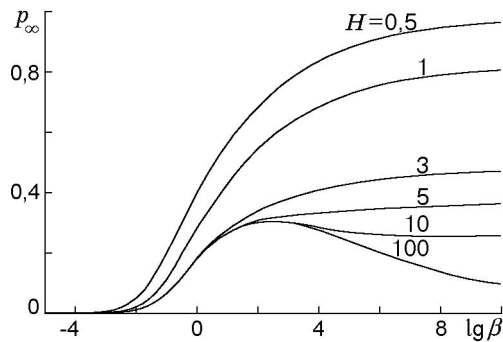


Рис. 5

Рис. 5. Зависимость амплитуд давления в проходящей волне p_∞ от β при различных значениях H

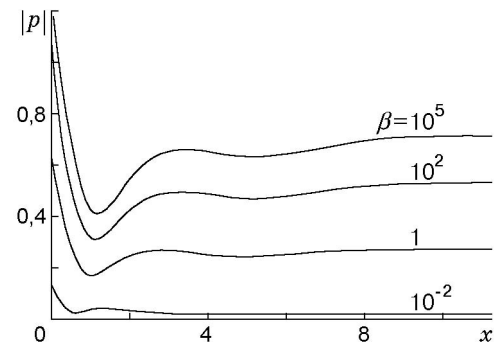


Рис. 6

Рис. 6. Распределение амплитуд давления $|p|$ по пластине при $H = 1$ и различных значениях β

Хотя все члены формулы (8) с ростом x монотонно затухают по абсолютной величине, несовпадение фаз приводит к немонотонности амплитуды давления по x . Соответствующее распределение давления по пластине для бесконечно глубокой жидкости содержится в [8]. Из сравнения графиков следует, что распределение амплитуды давления по пластине существенно зависит от глубины жидкости: с уменьшением H амплитуда давления растет.

ЛИТЕРАТУРА

1. Squire V. A., Dugan J. P., Wadhams P., et al. Of ocean waves and sea ice // Annu. Rev. Fluid Mech. 1995. V. 27. P. 115–168.
2. Марченко А. В. Изгибно-гравитационные волны // Тр. Ин-та общ. физики РАН. 1999. Т. 56: Динамика волн на поверхности жидкости. С. 65–111.
3. Evans D. V., Davies T. V. Wave-ice interaction: Report / Davidson lab.; Stevens Inst. of Technol. N 1313. New Jersey, 1968.
4. Варламов В. В. О рассеянии внутренних волн краем упругой пластины // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1985. Т. 25, № 3. С. 413–421.
5. Гольдштейн Р. В., Марченко А. В. Дифракция плоских гравитационных волн на кромке ледяного покрова // Прикл. математика и механика. 1989. Т. 53, № 6. С. 924–930.
6. Balmforth N. J., Craster R. V. Ocean waves and ice sheets // J. Fluid Mech. 1999. V. 395. P. 89–124.
7. Ткачева Л. А. Рассеяние поверхностных волн краем плавающей упругой пластины // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 4. С. 88–97.
8. Ткачева Л. А. Дифракция поверхностных волн на плавающей упругой пластине // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2001. № 5. С. 128–141.
9. Suzuki H., Yoshida K. Design flow and strategy for safety of very large floating structure // Proc. of the Intern. workshop on very large floating structures, Hayama, Japan, Nov. 25–28, 1996. S.l., 1996. P. 21–27.