УДК 533.6+517.95

АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ЗАДАЧ КОШИ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ

А. Л. Казаков, А. А. Лемперт

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 664033 Иркутск
E-mails: kazakov@icc.ru, lempert@icc.ru

Для двух обобщенных задач Коши с условиями на двух поверхностях доказаны теоремы существования и единственности решений в классе аналитических функций. С использованием доказанных теорем для численного решения задач строятся неявные разностные схемы. Создана программа, выполнены соответствующие численные расчеты.

Ключевые слова: газовая динамика, ударная волна, краевая задача, теорема существования, разностная схема.

Введение. Математическое описание течений идеального газа с ударными волнами [1] сводится к постановке начально-краевой задачи специального вида для системы квазилинейных уравнений с частными производными, которая называется обобщенной задачей Коши (ОЗК). Отличие ОЗК от задачи Коши в традиционной постановке состоит в том, что начально-краевые условия задаются не на одной, а на двух или более поверхностях. От смешанной задачи ОЗК отличает то, что в ней число начально-краевых условий равно числу искомых функций. Впервые такая задача рассмотрена в работе [2] при исследовании совместности систем дифференциальных уравнений с частными производными. Общая теорема существования и единственности решения ОЗК доказана в [3]. Подробный обзор работ, посвященных исследованию ОЗК, приведен в [4].

В работах [5–7] рассмотрен ряд задач газовой динамики, которые в рамках теории дифференциальных уравнений с частными производными являются ОЗК с начально-краевыми условиями на двух поверхностях. Для всех рассмотренных в [5–7] задач доказаны теоремы существования и единственности кусочно-аналитических решений. Кроме того, в работе [8] при рассмотрении газодинамической задачи о распространении ударной волны от оси или центра симметрии доказана теорема существования и единственности решения ОЗК с особенностью.

В настоящей работе для двух ОЗК с начально-краевыми условиями на двух поверхностях доказаны теоремы существования и единственности решений в классе аналитических функций. С использованием доказанных теорем для численного решения задач строятся неявные разностные схемы. Системы разностных уравнений сводятся к системам линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с трехдиагональными матрицами. Создана программа, которая протестирована на модельных примерах, проведены соответствующие численные расчеты.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-07-00245).

1. Постановка задачи. Рассматривается система уравнений газовой динамики для идеального политропного газа с уравнением состояния

$$p = A^2(S)\rho^\gamma/\gamma,$$

где p — давление; S — энтропия; ρ — плотность; $\gamma = \mathrm{const} > 1$ — показатель политропы газа. Ниже исследуются плоскосимметричные ($\nu = 0$), цилиндрически-симметричные ($\nu = 1$) или сферически-симметричные ($\nu = 2$) течения, зависящие от времени t и расстояния от начала координат, оси или центра симметрии r. В качестве искомых функций $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}(t,r)$ принимаются функции $\boldsymbol{U} = (\sigma, u, s)$, где $\sigma = \rho^{(\gamma-1)/2}$; u — скорость газа; s — функция $A(S)$. Скорость звука задается соотношением $c = \sigma s$, а система уравнений газовой динамики имеет вид

$$\begin{gathered}
\sigma_t + u\sigma_r + \frac{\gamma-1}{2}\,\sigma\Big(u_r + \nu\frac{u}{r}\Big) = 0,\\
u_t + \frac{2}{\gamma-1}\,\sigma s^2\sigma_r + uu_r + \frac{2}{\gamma}\,\sigma^2 s s_r = 0,\\
s_t + us_r = 0.
\end{gathered} \tag{1}$$

Пусть известно аналитическое по переменным t, r решение системы (1) в некоторой окрестности точки с координатами $t = 0$, $r = 0$. (Это решение будем называть фоновым течением.) Кроме того, предполагается, что $u\big|_{t=0,r=0} < 0$, $\sigma\big|_{t=0,r=0} > 0$, $s\big|_{t=0,r=0} > 0$. Считается, что при $r = 0$ скорость газа $u = 0$, вследствие чего возникает сильный разрыв решения — ударная волна (УВ), фронт которой неизвестен и определяется при решении задачи. Строится решение системы (1) за фронтом УВ. При $\nu = 0$ поставленная задача описывает отражение УВ от жесткой стенки, при $\nu = 1, 2$ — распространение УВ от оси или центра симметрии.

Данная газодинамическая задача сводится к ОЗК. Для этого в системе (1) выполняется замена независимых и зависимых переменных. Сначала независимые переменные r, t заменяются на x, y: $r = \varphi(x)$, $t = y + x$. Якобиан преобразования равен $J = \varphi'(x)$. Функция $r = \varphi(t)$, задающая траекторию движения УВ, неизвестна, однако известно, что $\varphi(0) = 0$. Главная цель замены — перевести ось $r = 0$ в ось $x = 0$, фронт УВ — в ось $y = 0$.

Прежде чем ввести новые неизвестные функции, введем следующие обозначения: $\boldsymbol{U}$ — искомое решение в области между фронтом УВ и осью (центром) симметрии; $\boldsymbol{U}^1$ — фоновое течение — и запишем условия Гюгонио на УВ (т. е. на оси $y = 0$) в эквивалентном виде (что возможно в силу теоремы определенности [1]):

$$D\big|_{y=0} = D^*(\boldsymbol{U}^1, u)\big|_{y=0}, \qquad \sigma\big|_{y=0} = \sigma^*(\boldsymbol{U}^1, u)\big|_{y=0}, \qquad s\big|_{y=0} = s^*(\boldsymbol{U}^1, u)\big|_{y=0}. \tag{2}$$

Выражения для D^*, σ^*, s^* вследствие громоздкости в данной работе не приводятся.

Как отмечено выше, $u\big|_{x=0} = 0$, поэтому величины $D_0 = D\big|_{x=y=0}$, $\sigma_{00} = \sigma\big|_{x=y=0}$, $s_{00} = s\big|_{x=y=0}$ однозначно определяются из (2). При этом $c_{00} = s_{00}\sigma_{00} > 0$, $D_0 > 0$. Следовательно, замена в точке с координатами $t = 0$, $r = 0$ является невырожденной, а в случае аналитичности функции $\varphi(x)$ она будет невырожденной и в некоторой окрестности начала координат. Введем новые неизвестные функции u', v, z, w:

$$u' = u, \qquad v = \sigma - \sigma^*, \qquad w = \varphi, \qquad z = s - s^*.$$

После проведения ряда преобразований (достаточно громоздких) система (1) в новых переменных принимает вид

$$u_x = \frac{1 - M_0^2}{1 + \theta M_0}\,u_y + \frac{M_0(1+\theta)}{1+\theta M_0}\,v_x - \frac{\nu}{1+\theta M_0}\,\frac{u}{x} + Y_1,$$

$$v_y = \frac{M_0(\theta-1)}{1+\theta M_0}\,u_y + \frac{1}{1+\theta M_0}\,v_x + \frac{\nu\theta}{(1+\theta M_0)(1+\theta)}\,\frac{u}{x} + Y_2, \tag{3}$$

$$w_x = D^*\big|_{y=0}, \qquad z_y = Y_3.$$

Здесь штрих перед искомой функцией u опущен для упрощения обозначений; $M_0 = D_0/(\sigma_{00}s_{00})$ (согласно теореме Цемплена $0 < M_0 < 1$); константа θ появляется при дифференцировании по u условий Гюгонио в виде (2) (можно показать, что $\theta > 0$); Y_1, Y_2, Y_3 — функции, зависящие от независимых переменных, искомых функций и их первых производных, причем зависимость от производных является линейной, и коэффициенты перед ними обращаются в нуль в точке с координатами $x = 0$, $y = 0$. Иными словами, система (1) является квазилинейной, причем в коэффициентах перед производными выделены главные части. Вид функций Y_1, Y_2, Y_3 не приводится вследствие громоздкости выражений для них.

Условия для скорости газа $u = 0$ при $r = 0$ и условия Гюгонио на УВ в новых переменных записываются в виде

$$w(0) = 0, \qquad u(0,y) = 0, \qquad v(x,0) = 0, \qquad z(x,0) = 0. \tag{4}$$

Таким образом, исходная газодинамическая задача сведена к ОЗК.

Нетрудно заметить, что в задаче (3), (4) "главными" являются первые два уравнения системы и искомые функции u, v. Основные трудности, возникающие как при аналитическом, так и при численном решении задачи (3), (4), сохраняются и при решении ОЗК для u, v. Далее рассматриваются такие задачи без особенности ($\nu = 0$) и с особенностью ($\nu > 0$).

2. Задача без особенности. Рассматривается простейшая ОЗК для системы квазилинейных уравнений с частными производными в случае

$$\begin{gathered} u_x = a(x,y,u,v)u_y + b(x,y,u,v)v_x + f(x,y,u,v), \\ v_y = c(x,y,u,v)u_y + d(x,y,u,v)v_x + g(x,y,u,v), \\ u(0,y) = 0, \qquad v(x,0) = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Наряду с задачей о регулярном отражении УВ от жесткой стенки к обобщению задачи (5) сводится также задача о резком вдвигании в газ непроницаемого поршня. В этом случае в точке O с координатами $x = 0$, $y = 0$, $u = 0$, $v = 0$ можно положить $A = a(O)$, $B = B(O)$, $C = c(O)$, $D = d(O)$, $\alpha = AD$, $\beta = BC$, $\gamma = 1 + \alpha - \beta$, $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 1$, $\mu_{n+1} = \gamma\mu_n - \alpha\mu_{n-1}$, $\xi_0 = 1$, $\xi_1 = \gamma$, $\xi_{n+1} = \gamma\xi_n - \alpha\xi_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Лемма 1. *Пусть $\mu_n \ne 0$, $\gamma \ne 0$, $\gamma^2 > 4\alpha$. Тогда найдутся константы $M > 0$, $0 < q < 1$, такие что при всех $i, j, k \in \mathbb{N}_0$ выполняются неравенства $|A^k\xi_i\mu_j|/|\mu_{i+j+k+1}| < Mq^k$, $|D^k\xi_i\mu_j|/|\mu_{i+j+k+1}| < Mq^k$.*

Доказательство леммы не приводится, подобная лемма доказана в [4].

Теорема 1. *Пусть в задаче* (5) *функции являются аналитическими и выполнены условия леммы* 1. *Тогда в окрестности точки с координатами $x = 0$, $y = 0$ задача* (5) *имеет аналитическое решение.*

Доказательство. Решение задачи (5) строится в виде рядов (z обозначает u, v)

$$z(x,y) = \sum_{k,l\in\mathbb{N}_0} z_{k,l}\,\frac{x^k y^l}{k!\,l!}, \qquad z_{k,l} = \frac{\partial^{k+l} z}{\partial x^k\,\partial y^l}\Big|_{x=y=0},$$

коэффициенты которых определяются индукцией по $n = k + l$. Пусть все функции $\boldsymbol{z}_0, \boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_n$, $n \geqslant 1$ найдены. Чтобы найти $\boldsymbol{z}_{n+1}$, уравнения дифференцируются k раз по x и $n-k$ раз по y, при этом полагается $x=y=u=v=0$ и учитываются краевые условия. В результате получаем соотношения

$$u_{0,n+1}=0,$$
$$v_{0,n+1}=Cu_{0,n+1}+Dv_{1,n}+q_{0,n},\qquad u_{1,n}=Au_{0,n+1}+Bv_{1,n}+p_{0,n},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$v_{k,n+1-k}=Cu_{k,n-k+1}+Dv_{k+1,n-k}+q_{k,n-k},\qquad u_{k+1,n-k}=Au_{k,n-k+1}+Bv_{k+1,n-k}+p_{k,n-k},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$v_{n,1}=Cu_{n,1}+Dv_{n+1,0}+q_{n,0},\qquad u_{n+1,0}=Au_{n,1}+Bv_{n+1,0}+p_{n,0},$$
$$v_{n+1,0}=0,$$

представляющие собой СЛАУ, в которой неизвестными являются коэффициенты рядов. Система может быть разделена на две системы с трехдиагональными матрицами:

$$\begin{gathered}
\gamma u_{1,n}-Au_{2,n-1}=p^*_{0,n},\\
-Au_{1,n}+\gamma u_{2,n-1}-Du_{3,n-2}=p^*_{1,n-1},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
-Au_{m,n+1-m}+\gamma u_{m+1,n-m}-Du_{m+2,n-1-m}=p^*_{m,n-m},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
-Au_{n-1,2}+\gamma u_{n,1}-Du_{n+1,0}=p^*_{n-1,1},\\
-Au_{n,1}+u_{n+1,0}=p^*_{n,0},\\
\\
\gamma v_{n,1}-Av_{n-1,2}=q^*_{n,0},\\
-Dv_{n,1}+\gamma v_{n-1,2}-Av_{n-2,3}=q^*_{n-1,1},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
-Dv_{m+1,n-m}+\gamma v_{m,n+1-m}-Av_{m-1,n+2-m}=q^*_{m,n-m},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
-Dv_{2,n-1}+\gamma v_{1,n}-Av_{0,n+1}=q^*_{1,n-1},\\
-Dv_{1,n}+v_{n+1,0}=q^*_{0,n},
\end{gathered}\tag{6}$$

где

$$u_{0,n+1}=v_{n+1,0}=0,$$
$$p^*_{n,0}=p_{n,0},\qquad p^*_{m,n-m}=p_{m,n-m}+Bq_{0,m+1,n-1-m}-Dp_{m+1,n-1-m},\quad m=0,\ldots,n-1,$$
$$q^*_{0,n}=q_{0,n},\qquad q^*_{m,n-m}=q_{m,n-m}+Cp_{0,m-1,n+1-m}-Aq_{m-1,n+1-m},\quad m=n,\ldots,1.$$

Матрицы системы (6) являются трехдиагональными с определителями, равными μ_{n+1}. Для решения этих систем используется метод прогонки. Лемма позволяет оценить решение с помощью геометрической прогрессии со знаменателем $0<q<1$ и доказать сходимость рядов.

Замечание 1. Если коэффициенты A, B, C, D равны соответствующим коэффициентам системы (3), то условия теоремы 1 выполняются.

Замечание 2. Теоремы существования и единственности решения задачи (5) в классе аналитических функций были доказаны в работах [4, 7], однако в отличие от [7] в условии теоремы 1 отсутствует обязательное требование гиперболичности системы. От результатов работы [4] теорема 1 отличается тем, что при построении коэффициентов рядов удается перейти к СЛАУ с трехдиагональными матрицами, что позволяет создать эффективную численную методику.

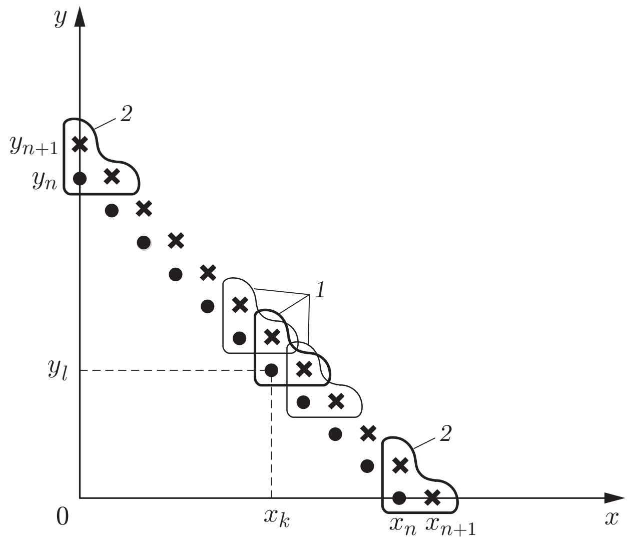

Рис. 1. Шаблон разностной схемы во внутренних узлах (*1*) и на границах (*2*) расчетной области

2.1. *Численный метод. Разностная схема.* Производные функций u, v представим в виде разностей (см. [9. С. 19]). Тогда система (5) принимает следующий вид (рис. 1):

$$\frac{u^h_{k+1,l} - u^h_{k,l}}{h} = a_{k,l}\,\frac{u^h_{k,l+1} - u^h_{k,l}}{h} + b_{k,l}\,\frac{v^h_{k+1,l} - v^h_{k,l}}{h} + f_{k,l},$$

$$\frac{v^h_{k,l+1} - v^h_{k,l}}{h} = c_{k,l}\,\frac{u^h_{k,l+1} - u^h_{k,l}}{h} + d_{k,l}\,\frac{v^h_{k+1,l} - v^h_{k,l}}{h} + g_{k,l}.$$

Здесь $e_{k,l} = e(kh, lh, u^h_{k,l}, v^h_{k,l})$; $e = (a, b, c, d, f, g)$.

Из начальных условий задачи следует $u^h_{0,l} = v^h_{k,0} = 0$. Разностная схема является неявной. Проводя вычисления по слоям $n = k + l$, на каждом слое получаем следующую СЛАУ:

$$v^h_{n+1,0} = 0,$$

$$u^h_{n+1,0} = a_{n,0}u^h_{n,1} + b_{n,0}v^h_{n+1,0} + p^h_{n,0}, \qquad v^h_{n,1} = c_{n,0}u^h_{n,1} + d_{n,0}v^h_{n+1,0} + q^h_{n,0},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$u^h_{n-m+1,m} = a_{n-m,m}u^h_{n-m,m+1} + b_{n-m,m}v^h_{n-m+1,m} + p^h_{n-m,m},$$

$$v^h_{n-m,m+1} = c_{n-m,m}u^h_{n-m,m+1} + d_{n-m,m}v^h_{n-m+1,m} + q^h_{n-m,m},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$u^h_{1,n} = a_{0,n}u^h_{0,n+1} + b_{0,n}v^h_{1,n} + p^h_{0,n}, \qquad v^h_{0,n+1} = c_{0,n}u^h_{0,n+1} + d_{0,n}v^h_{1,n} + q^h_{0,n},$$

$$u^h_{0,n+1} = 0.$$

Здесь

$$p^h_{n-m,m} = (1 - a^h_{n-m,m})u^h_{n-m,m} - b_{n-m,m}v^h_{n-m,m} + hf_{n-m,m},$$

$$q^h_{n-m,m} = -c_{n-m,m}u^h_{n-m,m} + (1 - d^h_{n-m,m})v^h_{n-m,m} + hg_{n-m,m}.$$

Матрицы этой системы являются трехдиагональными, и, следовательно, система решается методом прогонки.

Таблица 1

Относительная погрешность решения задачи без особенности при различных шагах интегрирования

h	$\|u^h - u_e\|/\|u_e\|$	$\|v^h - v_e\|/\|v_e\|$
0,100	0,911	0,812
0,050	0,049	0,225
0,020	0,013	0,057
0,010	0,011	0,049
0,005	0,005	0,025

Замечание 3. Пусть a, b, c, d — константы и $f(x, y)$, $g(x, y)$ — непрерывные функции переменных x, y. Тогда из условий леммы 1 следует, что предложенная схема устойчива (см. [9. С. 92]). При этом условия $\mu_n \neq 0$ ($n \in \mathbb{N}$) являются условиями, при которых возможна прогонка, и не являются условиями диагонального преобладания.

2.2. *Вычислительный эксперимент.* В ходе вычислительного эксперимента решено значительное число задач и проведено сравнение результатов расчетов с аналитическими решениями. Ниже приводится одна из таких задач:

$$u_x = 2u_y + v_x + y^3 - 6xy^2 + 2xy + 2x, \qquad u(0, y) = 0,$$
$$v_y = 0{,}5u_y + 2v_x - 1{,}5xy^2 - x^2 + 4xy + 3y^2, \qquad v(x, 0) = 0.$$

Аналитическим решением данной задачи являются функции $u = xy^3 + x^2$ и $v = y^3 - x^2y$. Численное решение проводилось с использованием изложенного выше метода. В табл. 1 приведены значения относительной погрешности при различных шагах h (норма вычисляется в пространстве непрерывных функций). Из табл. 1 следует, что метод решения сходится со скоростью h.

3. Задача с особенностью. Рассматривается ОЗК с особенностью вида u/x:

$$\begin{gathered}
u_x = a(x, y, u, v)u_y + b(x, y, u, v)v_x + \frac{u}{x}\, f(x, y, u, v) + F(x, y, u, v), \\
v_y = c(x, y, u, v)u_y + d(x, y, u, v)v_x + \frac{u}{x}\, g(x, y, u, v) + G(x, y, u, v), \\
u(0, y) = 0, \qquad v(x, 0) = 0.
\end{gathered} \tag{7}$$

К задаче (7) сводится задача о распространении с конечной скоростью УВ от оси или центра симметрии [4].

Пусть функции A, B, C, D, α, β, γ имеют тот же смысл, что и выше, при этом $f_0 = f(O)$, $g_0 = g(O)$. Также выполняются следующие соотношения:

$$D_n = D - \frac{f_0 D}{n} + \frac{B g_0}{n}, \qquad \gamma_n = \gamma - \frac{f_0}{n}, \qquad \gamma_n^* = 1 - \frac{f_0}{n}, \qquad \alpha_n = AD_n,$$
$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_1 = \gamma_1, \quad \lambda_{n+1} = \gamma_{n+1}\lambda_n - \alpha_{n+1}\lambda_{n-1},$$
$$\mu_0 = 1, \quad \mu_1 = \gamma_1^*, \quad \mu_{n+1} = \gamma_{n+1}^*\lambda_n - \alpha_{n+1}\lambda_{n-1},$$
$$\eta_0^{(n)} = 1, \quad \eta_1^{(n)} = \gamma_n^*, \quad \eta_2^{(n)} = \gamma_{n-1}\eta_1^{(n)} - \alpha_n\eta_0^{(n)}, \quad \ldots,$$
$$\eta_{k+1}^{(n)} = \gamma_{n-k}\eta_k^{(n)} - \alpha_{n-k+1}\eta_{k-1}^{(n)}, \quad \ldots, \quad \eta_n^{(n)} = \gamma_1\eta_{n-1}^{(n)} - \alpha_2\eta_{n-2}^{(n)},$$
$$n = 1, 2, \ldots, \qquad k = 0, \ldots, n.$$

Лемма 2. *Справедливы равенства* $\mu_n = \eta_n^{(n)}$, $n = 0, 1, \ldots$.

Лемма 3. *Пусть* $\mu_n \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_{n+1}/\mu_n = \mu_\infty$, $|\alpha|/\mu_\infty^2 < 1$. *Тогда найдутся константы* $M > 0$ *и* $0 < q < 1$, *такие что при всех* $i, j, k \in \mathbb{N}_0$ *справедливы неравенства*

$$\frac{|A^k \lambda_i \eta_j^{(k+i+j+1)}|}{|\mu_{i+j+k+1}|} < Mq^k, \qquad \frac{1}{|\mu_{i+j+k+1}|} \Big| \Big(\prod_{l=m+1}^{m+k} D_l \Big) \lambda_i \eta_j^{(k+i+j+1)} \Big| < Mq^k.$$

Доказательства лемм не приводятся. Леммы 2, 3 используются при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть все функции* a, b, c, d, f, g, F, G *являются аналитическими в некоторой окрестности точки* O *с координатами* $x = 0$, $y = 0$, $u = 0$, $v = 0$ *и выполнены условия леммы* 3. *Тогда задача* (7) *имеет единственное аналитическое решение в окрестности точки с координатами* $x = 0$, $y = 0$.

Доказательство. Решение задачи (7) строится в виде степенных рядов, коэффициенты которых определяются при решении следующей СЛАУ:

$$\begin{gathered}
u_{0,n+1} = 0,\\
v_{0,n+1} = Cu_{0,n+1} + Dv_{1,n} + g_0 u_{1,n} + q_{0,n},\\
u_{1,n} = Au_{0,n+1} + Bv_{1,n} + f_0 u_{1,n} + p_{0,n},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
v_{k,n+1-k} = Cu_{k,n-k+1} + Dv_{k+1,n-k} + \frac{g_0}{k+1}\, u_{k+1,n-k} + q_{k,n-k},\\
u_{k+1,n-k} = Au_{k,n-k+1} + Bv_{k+1,n-k} + \frac{f_0}{k+1}\, u_{k+1,n-k} + p_{k,n-k},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
v_{n,1} = Cu_{n,1} + Dv_{n+1,0} + \frac{g_0}{n+1}\, u_{n+1,0} + q_{n,0},\\
u_{n+1,0} = Au_{n,1} + Bv_{n+1,0} + \frac{f_0}{n+1}\, u_{n+1,0} + p_{n,0},\\
v_{n+1,0} = 0.
\end{gathered} \tag{8}$$

Преобразовав систему (8), можно выделить замкнутую подсистему

$$\begin{gathered}
u_{0,n+1} = 0,\\
-Au_{0,n+1} + \gamma_1 u_{1,n} - D_2 u_{2,n-1} = p^*_{0,n},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
-Au_{m,n+1-m} - \gamma_{m+1} u_{m+1,n-m} - D_{m+2} u_{m+2,n-m-1} = p^*_{m,n-m},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
-Au_{n-1,2} - \gamma_n u_{n,1} - D_{n+1} u_{n+1,0} = p^*_{n-1,1},\\
-Au_{n,1} + \gamma^*_{n+1} u_{n+1,0} = p^*_{n,0}.
\end{gathered} \tag{9}$$

Здесь $p^*_{n,0} = p_{n,0}$; $p^*_{m,n-m} = p_{m,n-m} + Bq_{m+1,n-m-1} - Dp_{m+1,n-m-1}$, $m = 0, \dots, n-1$.

Решение системы (9), являющейся системой с трехдиагональными матрицами с определителем μ_{n+1}, имеет вид

$$u_{n+1,0} = \frac{\eta_0^{(n+1)}}{\mu_{n+1}} \sum_{i=0}^{n} \lambda_i A^{n-i} p^*_{i,n-i},$$

$$u_{n-k+1,k} = \frac{\eta_k^{(n+1)}}{\mu_{n+1}} \sum_{i=0}^{n-k} \lambda_i A^{n-k-i} p_{i,n-i}^* + \frac{\lambda_{n-k}}{\mu_{n+1}} \sum_{i=n-k+1}^{n} \Big[\Big(\prod_{j=n-k+1}^{n} D_{j+1}\Big)\eta_{n-i}^{(n+1)} p_{i,n-i}^*\Big],$$

$$u_{1,n} = \frac{\lambda_0}{\mu_{n+1}} \sum_{i=1}^{n} \Big(\prod_{j=2}^{i+1} D_j\Big)\eta_{n-i}^{(n+1)} p_{i,n-i}^* + \frac{\eta_n^{(n+1)}}{\mu_{n+1}}\, p_{0,n}^*.$$

Решив вспомогательную систему (9), из системы (8) находим

$$v_{n,1} = Cu_{n,1} + \frac{g_0}{n+1}\, u_{n+1,0} + q_{n,0}, \qquad v_{n-1,2} = Cu_{n-1,2} + Dv_{n,1} + \frac{g_0}{n}\, u_{n,1} + q_{n-1,1},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$v_{0,n+1} = Cu_{0,n+1} + Dv_{1,n} + g_0 u_{1,n} + q_{0,n}.$$

Сходимость рядов доказывается методом мажорант. Мажорантная задача строится следующим образом. Пусть $\tilde p = x[(a-A)u_y + (b-B)v_x + F] + u(f-f_0)$, $\tilde q = x[(c-C)u_y + (d-D)v_x + G] + u(g-g_0)$. Мажоранту для $\tilde p$ и $\tilde q$ запишем в виде

$$\tilde R = \frac{M_0}{1-(x+y+U+V)/\rho_0}\,[(x+y+U+V)(xU_y + xV_x + U) + x].$$

Полагая

$$p_{k,n-k} = \frac{1}{k+1}\,\frac{\partial^{n+1}\tilde p}{\partial x^{k+1}\,\partial y^{n-k}}, \quad q_{k,n-k} = \frac{1}{k+1}\,\frac{\partial^{n+1}\tilde q}{\partial x^{k+1}\,\partial y^{n-k}}, \quad R_{k,n-k} = \frac{1}{k+1}\,\frac{\partial^{n+1}\tilde R}{\partial x^{k+1}\,\partial y^{n-k}},$$

будем вычислять константы $U_{k,l}$, $V_{k,l}$ по формулам

$$U_{0,0} = V_{0,0} = 0, \quad U_{1,0} = V_{0,1} = R_{0,0}, \quad U_{0,1} = V_{1,0} = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$U_{0,n} = V_{n,0} = 0, \quad U_{n+1,0} = M\Big(R_{n,0} + \sum_{i=0}^{n-1} q^{n-i}(R_{i,n-i} + |B|R_{i+1,n-i-1} + |D|R_{i+1,n-i-1})\Big),$$

$$U_{k+1,n-k} = M\Big(\sum_{i=0}^{k} q^{k-i}(R_{i,n-i} + |B|R_{i+1,n-i-1} + |D|R_{i+1,n-i-1}) +$$

$$+ \sum_{i=k+1}^{n-1} q^{i-k}(R_{i,n-i} + |B|R_{i+1,n-i-1} + |D|R_{i+1,n-i-1}) + q^{n-k}R_{n,0}\Big), \quad k = 0,\dots,n-1.$$

Пусть $B \neq 0$ (случай $B = 0$ не рассматривается, так как является тривиальным). Тогда

$$Bv_{k,n-k+1} = (\beta-\alpha)u_{k,n-k+1} + \Big(1 + \frac{g_0 B - f_0 D}{k+1}\Big)u_{k+1,n-k} + Bq_{k,n-k} - Dp_{k,n-k},$$

$$V_{k,n-k+1} = \frac{|\beta|+|\alpha|}{|B|}\, U_{k,n-k+1} + \frac{1}{|B|}\Big(1 + \frac{|g_0 B| + |f_0 D|}{k+1}\Big)U_{k+1,n-k} + R_{k,n-k} + \frac{|D|}{|B|}\, R_{k,n-k}.$$

Вследствие леммы 3 справедливы неравенства $V_{k,l} \geqslant |v_{k,l}|$, $U_{k,l} \geqslant |u_{k,l}|$.

Докажем сходимость рядов $\displaystyle\sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{V_{k,l}}{k!l!}\, x^k y^l$ и $\displaystyle\sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{U_{k,l}}{k!l!}\, x^k y^l$. Для этого введем функцию

$$R^*(x+y) = \frac{M_1}{1-(t+2W)/\rho_1}\,[(t+2W)2W_t + 1],$$

так чтобы выполнялось условие $R^*(x+y) \gg \sum\limits_{k,l=0}^{\infty} \dfrac{R_{k,l}}{k!l!}\, x^k y^l$. Это возможно по построению $R_{k,l}$ в силу аналитичности всех входных данных. Будем вычислять константы W_n по формулам

$$W_0 = 0, \qquad W_1 = M_4 R_0^* > U_{1,0} = V_{0,1} > U_{0,1} = V_{1,0} = 0,$$

$$W_{n+1} = M_4 R_n^*, \qquad R_n^* = \frac{d^n R}{dt^n}\Big|_{t=0,W=0},$$

где

$$M_4 = M_2 M_3 + 1 + \frac{|D|}{|B|}, \quad M_2 = (1+|B|+|D|)\,\frac{2M}{1-q}, \quad M_3 = \frac{1}{|B|}\,(1+|\beta|+|\alpha|+|Bg_0|+|Df_0|).$$

Тогда $W_n \geqslant \max\limits_{k+l=n} \{U_{k,l}; V_{k,l}\}$, т. е. $W(x+y) \gg U, V$.

В то же время построение ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{W_n}{n!}\, t^n$ равносильно решению задачи Коши

$$W_t = \frac{M_4 M_1}{1 + (t+2W)/\rho_1}\,[(t+2W^*)2W_t^* + 1], \qquad W(0) = 0.$$

Если это дифференциальное уравнение записать в нормальном виде $W_t = H(t, W)$, то его правая часть будет аналитической функцией, мажорирующей нуль. Согласно теореме Коши такая задача Коши имеет единственное решение, задаваемое сходящимся рядом, который в свою очередь мажорирует решение исходной задачи. Теорема 2 доказана.

Замечание 4. Теорема 2 обобщает и уточняет доказанную ранее для задачи (7) теорему [4], при этом исключены требования $f_0 \neq n$ (кроме требования $f_0 \neq 1$).

3.1. *Численный метод. Разностная схема.* Как и в случае ОЗК без особенности, производные функций u, v представим в виде разностей. Тогда система (7) принимает вид

$$\boldsymbol{e}_{k,l} = \boldsymbol{e}(kh, lh, u_{k,l}^h, v_{k,l}^h), \qquad \boldsymbol{e} = (a, b, c, d, f, g, F, G),$$

$$\frac{u_{k+1,l}^h - u_{k,l}^h}{h} = a_{k,l}\,\frac{u_{k,l+1}^h - u_{k,l}^h}{h} + b_{k,l}\,\frac{v_{k+1,l}^h - v_{k,l}^h}{h} + \frac{u_{k+1,l}^h}{(k+1)h}\, f_{k,l} + F_{k,l},$$

$$\frac{v_{k,l+1}^h - v_{k,l}^h}{h} = c_{k,l}\,\frac{u_{k,l+1}^h - u_{k,l}^h}{h} + d_{k,l}\,\frac{v_{k+1,l}^h - v_{k,l}^h}{h} + \frac{u_{k+1,l}^h}{(k+1)h}\, g_{k,l} + G_{k,l}.$$

В выражении u/x значения u, x вычисляются не в точке (k,l), а в точке $(k+1,l)$, чтобы при $k=0$ избавиться от неопределенности $0/0$.

Шаблон разностной схемы аналогичен шаблону для задачи без особенности (см. рис. 1).

Из начальных условий задачи следует $u_{0,k}^h = v_{l,0}^h = 0$. Проводя вычисления по слоям $n = k + l$, на каждом слое получаем СЛАУ. Отметим, что введение в систему особенности существенно осложняет приведение получаемых систем уравнений к системам с трехдиагональными матрицами. В результате преобразований получаем

$$u_{0,n+1}^h = 0,$$

$$-a_{0,n} u_{0,n+1}^h + \gamma_{0,n} u_{1,n}^h - d_{0,n}^* u_{2,n-1}^h = R_{0,n},$$

$$-a_{1,n-1} u_{1,n}^h + \gamma_{1,n-1} u_{2,n-1}^h - d_{1,n-1}^* u_{3,n-2}^h = R_{1,n-1},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$-a_{k,l}u^h_{k,l+1}+\gamma_{k,l}u^h_{k+1,l}-d^*_{k,l}u^h_{k+2,l-1}=R_{k,l},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$-a_{n,0}u^h_{n,1}+\gamma^*_{n,0}u^h_{n+1,0}=R_{n,0}.$$

Здесь

$$\gamma_{k,l}=1-\frac{f_{k,l}}{k+1}+a_{k+1,l-1}d_{k+1,l-1}\,\frac{b_{k,l}}{b_{k+1,l-1}}-b_{k,l}c_{k+1,l-1},\qquad \gamma^*_{n,0}=1-\frac{f_{n,0}}{n+1},$$
$$d^*_{k,l}=d_{k+1,l-1}\,\frac{b_{k,l}}{b_{k+1,l-1}}-\frac{b_{k,l}}{k+2}\Big(\frac{f_{k+1,l-1}d_{k+1,l-1}}{b_{k+1,l-1}}-g_{k+1,l-1}\Big),$$
$$R_{k,l}=-\frac{d_{k+1,l-1}b_{k,l}}{b_{k+1,l-1}}\,p^*_{k+1,l-1}+b_{k,l}q^*_{k+1,l-1}+p^*_{k,l},\qquad R_{n,0}=p^*_{n,0},$$
$$p^*_{k,l}=(1-a_{k,l})u^h_{k,l}-b_{k,l}v^h_{k,l}+hF_{k,l},\qquad q^*_{k,l}=-c_{k,l}u^h_{k,l}+(1-d_{k,l})v^h_{k,l}+hG_{k,l}.$$

Определив все значения $u^h_{k+1,l}$ $(k=0,\dots,n)$, значения $v^h_{k,l}$ можно найти из системы

$$v^h_{n+1,0}=0,$$
$$v^h_{n,1}=c_{n,0}u^h_{n,1}+\frac{1}{n+1}\,G_{n,0}u^h_{n+1,0}+q^*_{n,0},$$
$$v^h_{n-1,2}=c_{n-1,1}u^h_{n-1,2}+d_{n-1,1}v^h_{n,1}+\frac{1}{k+1}\,G_{n-1,1}u^h_{n,1}+q^*_{n-1,1},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$v^h_{k,l+1}=c_{k,l}u^h_{k,l+1}+d_{k,l}v^h_{k+1,l}+\frac{1}{k+1}\,G_{k,l}u^h_{k+1,l}+q^*_{k,l},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$v^h_{0,n+1}=d_{0,n+1}v^h_{1,n}+G_{0,n}u^h_{1,n}+q^*_{0,n}.$$

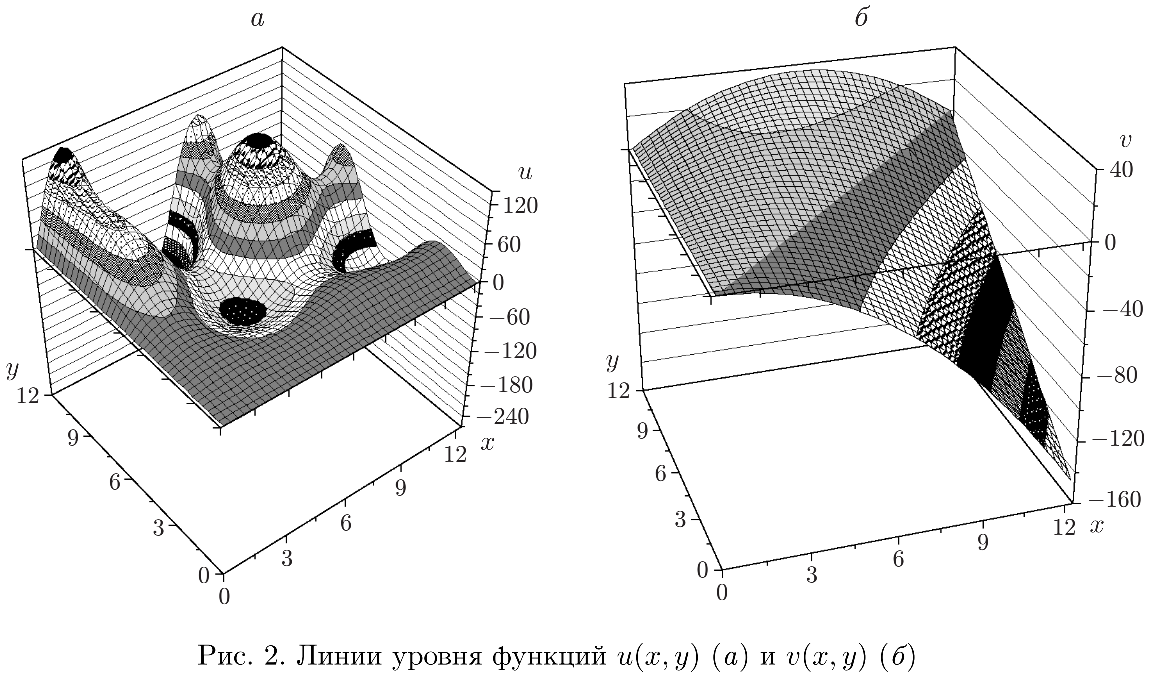

Рис. 2. Линии уровня функций $u(x,y)$ (a) и $v(x,y)$ ($б$)

Таблица 2

Относительная погрешность решения задачи с особенностью при различных шагах интегрирования

h	$\|u^h - u_e\|/\|u_e\|$	$\|v^h - v_e\|/\|v_e\|$
0,100	0,864	0,652
0,050	0,041	0,112
0,020	0,011	0,074
0,010	0,007	0,038
0,005	0,002	0,005

3.2. *Вычислительный эксперимент.* Рассматривается квазилинейная система, в правых частях уравнений которой содержатся тригонометрические функции:

$$u_x = uu_y + v_x + 0{,}5u/x + 1{,}5x\sin y + (0{,}5y - ux)\sin x + xy\cos x - ux^2\cos y - y,$$

$$v_y = u_y + uv_x + 0{,}5u/x - x^2\cos y - 0{,}5x\sin y - (x + 0{,}5y)\sin x - (u + 2)y + x,$$

$$u\Big|_{x=0} = 0, \qquad v\Big|_{y=0} = 0.$$

Аналитическим решением данной задачи являются функции $u = y^2\sin x + xy\sin y$ и $v = (x - y)y$.

Численное решение проводилось с использованием изложенного выше метода в области с размерами $x \in [0, 12]$, $y \in [0, 12]$. Результаты расчетов представлены на рис. 2. В табл. 2 приведены значения относительной погрешности при различных шагах h (норма также вычисляется в пространстве непрерывных функций). Из табл. 2 следует, что метод решения ОЗК с особенностью также сходится со скоростью h.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003.
2. **Riquier Ch.** Les systemes d'equations aux derivees partielles. P.: Gauthier-Villars, 1910.
3. **Леднев Н. А.** Новый метод решения дифференциальных уравнений с частными производными // Мат. сб. 1948. Вып. 2. С. 205–266.
4. **Баутин С. П.** Обобщенная задача Коши и ее приложения / С. П. Баутин, А. Л. Казаков. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 2006.
5. **Тешуков В. М.** Построение фронта ударной волны в пространственной задаче о поршне // Динамика сплошной среды / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1978. Вып. 33. С. 114–133.
6. **Тешуков В. М.** Распад произвольного разрыва на криволинейной поверхности // ПМТФ. 1980. № 2. С. 126–133.
7. **Тешуков В. М.** О регулярном отражении ударной волны от жесткой стенки // Прикл. математика и механика. 1982. Т. 46, № 2. С. 225–234.
8. **Казаков А. Л.** Построение кусочно-аналитических течений газа, состыкованных через ударные волны, вблизи оси или центра симметрии // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 5. С. 25–38.
9. **Самарский А. А.** Устойчивость разностных схем / А. А. Самарский, А. В. Гулин. М.: Едиториал УРСС, 2005.

Поступила в редакцию 18/V 2010 г.