ром. Соответствие между значением плотности, давления и номером кривых приводится в таблице.

Значения давления, плотности и скорости газа за падающей ударной волной при $M = 6{,}3$ и $\gamma = 1{,}67$ равны в безразмерных единицах соответственно 29,5; 3,7 и 3,6. В верхней части фиг. 4 отложен масштаб величины скорости (3,6). Векторы скорости, основания которых помечены ромбиком, нанесены не в масштабе, а только показывают направление течения, величина их лежит в пределах от 0,3 до 0,5.

Поступила 30 XII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. **Русанов В. В.** Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями.— ЖВММФ, 1961, т. 1, № 2.
2. **Рудакова Г. М., Шашкин А. П.** К расчету некоторых плоских нестационарных течений газа.— «Изв. СО АН СССР», 1975, вып. 1.
3. **Тарнавский Г. А., Хоничев В. И., Яковлев В. И.** Дифракция ударной волны на прямом угле и на выходе из плоского канала.— «Изв. СО АН СССР», 1974, № 8, вып. 2.
4. **Skews B. W.** The shape of diffraction shock wave.— «J. Fluid Mech.», 1967, vol. 29, N 2.
5. **Баженова Т. В., Гвоздева Л. Г., Комаров В. С., Сухов Б. Г.** Исследование дифракции сильных ударных волн на выпуклых углах.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1973, № 4.
6. **Ивандаев А. И.** Об одном способе введения «псевдовязкости» и его применение к уточнению разностных решений уравнений гидродинамики.— ЖВММФ, 1975, т. 15, № 2.
7. **Русанов В. В.** Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного счета разрывных решений.— «Докл. АН СССР», 1968, т. 180, № 6.
8. **Гриднев Н. П., Яковлев В. И.** Использование разностных схем повышенного порядка точности для расчета отраженных ударных волн.— В кн.: Вопросы газодинамики. Новосибирск, изд. ИТПМ СО АН СССР, 1975.
9. **Еремин В. В., Липницкий Ю. М.** О построении многомерных разностных схем третьего порядка точности.— ЖВММФ, 1974, т. 14, № 2.
10. **Дубовик А. С.** Фотографическая регистрация быстро протекающих процессов. М., «Наука», 1975.

УДК 533.6.011

ОБ ЭНТРОПИЙНОМ СЛОЕ В ДВУМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЯХ

Н. Е. Ермолин

(Новосибирск)

Рассмотрим плоские и осесимметричные гиперзвуковые течения совершенного газа за скачком уплотнения, удовлетворяющим условию $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{i}) \leqslant \tau$, $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{j}) \sim 1$ всюду, за исключением малой окрестности вершины. Здесь малый параметр $\tau \ll 1$; $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности фронта; $\mathbf{i}$ — орт оси x_1; $\mathbf{j}$ — орт оси x_2; Lx_i $(i = 1, 2)$ — прямоугольная декартова система координат; L — характерная длина. Набегающий поток предполагаем однородным. Считая выполненным условие $K = M_\infty \tau \geqslant 1$ для формы скачка в вершине, близкой к степенной, рассмотрим на основе метода сращиваемых асимптотических разложений поведение решения вне окрестности вершины при $\tau \to 0$. При этом в качестве внешнего разложения в области, примыкающей к фронту, возьмем разложение гиперзвуковой теории малых возмущений [1], описывающее в нулевом приближении нестационарные одномерные течения.

Большое число результатов в теории обтекания тонких тел гиперзвуковым потоком базируется на аналогии с нестационарными течениями в пространстве с меньшим на единицу числом измерений. Однако справедливость такой аналогии в случае, когда в потоке возникает энтропийный слой, еще не доказана полностью [2]. Подробный анализ известных результатов по данному вопросу проведен в [3, 4]. В данной работе устанавливается явная связь рассматриваемой двумерной задачи с нестационарной одномерной. Проводится сравнение частных случаев полученных результатов с известными.

Система уравнений газовой динамики в переменных «давление — две функции тока» [5] имеет вид в двумерном случае

$$\frac{\partial u_i}{\partial p} = (-1)^i x_2^{\nu} \frac{\partial x_{i+1}}{\partial \psi}; \quad \frac{\partial x_1}{\partial p} u_2 = \frac{\partial x_2}{\partial p} u_1; \tag{1}$$

$$\frac{u_1^2 + u_2^2}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\varkappa - 1} M_\infty^{-2}; \quad \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{p}{\rho^\varkappa}\right) = 0.$$

Здесь и ниже индекс $i > 2$ читается как $i - 2$; $\nu = 0; 1$ для плоского и осесимметричного случаев; $\rho_\infty u_\infty^2 p$ — давление; $\rho_\infty \rho$ — плотность; $u_\infty u_i$ — составляющие вектора скорости вдоль осей x_i соответственно; $\rho_\infty u_\infty L^{1+\nu}\psi$ — функция тока; ось x_1 направлена вдоль вектора скорости $\mathbf{u}_\infty$ невозмущенного потока; $\varkappa$ — отношение удельных теплоемкостей газа. В дальнейшем будем считать выполненным условие $1 < \varkappa < 2$. Индекс ∞ относится к условиям в невозмущенном потоке.

Граничные условия на ударной волне имеют вид

$$p = \frac{2}{\varkappa + 1}(\mathbf{i} \cdot \mathbf{n})^2 + \frac{1 - \varkappa}{\varkappa(\varkappa + 1)} M_\infty^{-2}; \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} + \frac{2}{\varkappa + 1} M_\infty^{-2} (\mathbf{i} \cdot \mathbf{n})^{-2};$$

$$(\mathbf{i} - \mathbf{v})(\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}) = \left(p - \frac{1}{\varkappa} M_\infty^{-2}\right)\mathbf{n},$$

где $\mathbf{v}$ — вектор скорости возмущенного движения на скачке. Ограничиваясь для простоты поверхностью фронта, симметричной относительно оси x_1, зададим аналитическое выражение формы фронта в виде

$$x_2 = \tau 2^{\nu/2} \zeta^{1/(1+\nu)}, \quad x_1 = g(\zeta) \text{ для } x_2 \geqslant 0,$$

где функция $g(\zeta)$ обеспечивает гладкое решение в возмущенной области и обладает следующими свойствами: 1) $\lim g(\zeta)/\zeta^\alpha = \mathrm{const}$ при $\zeta \to 0$; $1/(1+\nu) < \alpha \leqslant (3+\nu)/2(1+\nu)$; 2) $dx_2/dx_1 \leqslant 0(\tau)$ всюду, за исключением малой окрестности вершины. Здесь ограничение $\alpha > 1/(1+\nu)$ обеспечивает возникновение энтропийного слоя, а $\alpha \leqslant (3+\nu)/2(1+\nu)$ — ограничение, вытекающее из способа построения решения вне энтропийного слоя. Первое свойство обеспечивает близость формы фронта к степенной в вершине. Вне окрестности вершины в области, где $p \leqslant 0(\tau^2)$, решение строится методом сращиваемых асимптотических разложений [6].

Во внутренней области, примыкающей к линии тока $\zeta = 0$, внутреннее разложение строится следующим образом. Рассмотрим энтропийный слой, т. е. слой газа, прошедшего через участок ударной волны с наклоном $1 > \beta \geqslant 0$, $\tau^\beta \leqslant \cos(\mathbf{n}, \mathbf{i}) \leqslant 1$. Учитывая закон сохранения энтропии в частице, а также порядок давления, получим в энтропийном слое

$0(\tau^{2/\varkappa}) \leqslant \rho \leqslant 0(\tau^{(2-2\beta)/\varkappa})$. В дальнейшем положим в энтропийном слое $\rho \sim 0(\tau^{\gamma})$, где $2/\varkappa \geqslant \gamma \geqslant (2-2\beta)/\varkappa$. На границе рассматриваемой области $u_2 \leqslant 0(\tau)$. Предполагая поперек рассматриваемой области выполненным условие $u_2 \leqslant 0(\tau)$, получим из интеграла Бернулли

$$u_1 \sim 1 + 0(\tau^{2-\gamma}). \tag{2}$$

Таким образом,

$$u_1 = f(1 + 0(\tau^2)),\ f = \{1 - [2\varkappa/(\varkappa-1)]p/\rho\}^{1/2}. \tag{3}$$

А для производной из интеграла Бернулли с учетом (2) следует

$$\partial u_1/\partial p = -(1/\rho f)(1 + 0(\tau^{\gamma})). \tag{4}$$

Поперек возмущенной области γ меняется от $2/\varkappa$ в окрестности поверхности тела до 0 в окрестности поверхности фронта. Представление об области применимости (4) можно получить, рассматривая изобары $p = \mathrm{const}$. Например, всюду в рассматриваемой области, где $|\partial p/\partial x_1/\partial p/\partial x_2| \geqslant 0(1)$, параметр $\gamma \geqslant 1$.

Выполнение в энтропийном слое равенства (4) позволяет существенно упростить систему (1). Подставляя (3), (4) в (1), получим

$$\left(\frac{x_2}{\tau}\right)^{1+\nu} = 2^{\nu}\int\limits_0^{\zeta}\frac{1}{\rho f}\,d\zeta\,(1 + 0(\tau^{\nu})) + x_{20}^{1+\nu}(\xi, \tau); \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{x_2}{\tau}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi}\right)^{-1} f\right](1 + 0(\tau^{\nu})) = \left(\frac{x_2}{\tau}\right)^{\nu}\frac{\partial x_1}{\partial \zeta};$$

$$\frac{u_2}{\tau}\frac{\partial x_1}{\partial \xi} = f\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{x_2}{\tau}\right)(1 + 0(\tau^2)),\quad \xi/\rho^{\varkappa} = F(\tau, \zeta),$$

где $p = \tau^2\xi$; $\psi = \tau^{1+\nu}\zeta$; x_{20}, F — произвольные функции. Давление в используемой системе координат входит в подынтегральное выражение как параметр. Поэтому интегрирование системы (1), если известно распределение энтропии по линиям тока, сводится в энтропийном слое к интегрированию в системе (5) одного квазилинейного параболического уравнения относительно x_1.

Представляя x_1 для малых ζ в виде асимптотических разложений по ζ, получим из второго уравнения системы (5)

$$x_1 = x_{10}(\xi, \tau) + x_{11}(\xi, \tau)\,\zeta + \varphi(\xi, \tau, \zeta), \tag{6}$$

где функция x_{10} произвольная;

$$x_{11} = \begin{cases} x_{20}^{-\nu}\dfrac{d}{d\xi}\left[\dfrac{d}{d\xi}(x_{20})\dfrac{dx_{10}^{-1}}{d\xi}\right], & \text{если } x_{20} \neq 0,\\[2ex] \nu\xi^{\frac{1}{2\varkappa}}\dfrac{d}{d\xi}\left[\dfrac{d}{d\xi}\left(\xi^{-\frac{1}{2\varkappa}}\right)\dfrac{dx_{10}^{-1}}{d\xi}\right], & \text{если } x_{20} = 0;\end{cases}$$

Функция φ не превышает по порядку величины

$$\varphi = \begin{cases} 0\left(\tau^{2-\frac{2}{\varkappa}}\zeta + \tau^{\gamma}\zeta + \displaystyle\int\limits_0^{\zeta}\!\!\int\frac{1}{\rho}\,d\zeta d\zeta\right), & \text{если } x_{20} \neq 0,\\[2ex] 0\left(\displaystyle\int\limits_0^{\zeta}\!\!\int\frac{1}{\rho}\,d\zeta d\zeta\right) \text{ при } \nu = 0;\quad 0\left(\tau^{2-\frac{2}{\varkappa}}\zeta + \tau^{\gamma}\zeta\right) & \\ \text{при } \nu = 1, \text{ если } x_{20} = 0. & \end{cases}$$

Построенное приближенное решение (3)—(6) зависит от трех произвольных функций $x_{20}(\xi, \tau)$, $x_{10}(\xi, \tau)$, $F(\tau, \zeta)$, описывающих соответственно поверхность тела, распределение давления по телу, распределение энтропии по линиям тока. В области, примыкающей к фронту, решение представим в виде

(7) $$x_i = \tau^{i-1}(y_i + \tau^2 z_i + \ldots \quad u_1 = 1 + \tau^2 v_1 + \tau^4 w_1 + \ldots$$
$$\rho = \rho_0 + \tau^2\rho_1 + \ldots \quad u_2 = \tau(v_2 + \tau^2 w_2 + \ldots$$
$$p = \tau^2(\xi + \tau^2 p_1 + \ldots \quad \psi = \tau^{1+\nu}\zeta.$$

Разложения (7) получены, согласно порядкам искомых величин на фронте. Функции p_i заданы лишь своими значениями на фронте, для удовлетворения которых достаточно считать $p_i = p_i(\xi)$. Переходя к новым независимым переменным ξ, ζ, получим после подстановки (7) в (1)

(8) $$\frac{\partial v_i}{\partial \xi} = (-1)^i y_2^\nu \frac{\partial y_{i+1}}{\partial \zeta}; \quad \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\xi}{\rho_0^\varkappa}\right] = 0;$$
$$\frac{\partial w_i}{\partial \xi} - \frac{\partial p_1}{\partial \xi}\frac{\partial v_i}{\partial \xi} = (-1)^i\left[y_2^\nu \frac{\partial z_{i+1}}{\partial \zeta} + \nu \frac{\partial y_{i+1}}{\partial \zeta} z_2\right]; \quad \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{p_1}{\xi} - \varkappa \frac{\rho_1}{\rho_0}\right] = 0;$$

. . . .

$$v_1 + \frac{1}{2} v_2^2 + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{\xi}{\rho_0} = \frac{1}{\varkappa - 1} K^{-2};$$
$$w_1 + \frac{1}{2} v_1^2 + v_2 w_2 + \frac{1}{2} w_2^2 + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\left(\frac{p_1}{\rho_0} - \frac{\xi\rho_1}{\rho_0^2}\right) = 0;$$

. . . .

$$\frac{\partial y_1}{\partial \xi} v_2 = \frac{\partial y_2}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial z_1}{\partial \xi} v_2 + \frac{\partial y_1}{\partial \xi} w_2 = \frac{\partial z_2}{\partial \xi} + v_1 \frac{\partial y_2}{\partial \xi}.$$

. . . .

Выражение для нормали к фронту имеет вид

$$n_1 = -\tau A(1 + \tau^2 A^2)^{-1/2}; \quad n_2 = (1 + \tau^2 A^2)^{-1/2};$$
$$A = 2^{-\nu/2}\zeta^{-\nu/(1+\nu)} dg^{-1}/d\zeta,$$

разлагая которое в сходящиеся для $\tau^2 A^2 < 1$ ряды и подставляя разложения в граничные условия на фронте, получим

(9) $$\xi = [2/(\varkappa + 1)]A^2 + [(1 - \varkappa)/\varkappa(\varkappa + 1)]K^{-2};$$
$$v_1 = -[2/(\varkappa + 1)]A^2 + [2/(\varkappa + 1)]K^{-2};$$
$$p_1 = -[2/(\varkappa + 1)]A^4; \quad w_1 = [2/(\varkappa + 1)]A^4;$$

. . . .

$$1/\rho_0 = (\varkappa - 1)/(\varkappa + 1) + [2/(\varkappa + 1)]K^{-2}A^{-2};$$
$$v_2 = \{[2/(\varkappa + 1)]A^2 - [2/(\varkappa + 1)]K^{-2}\}A^{-1};$$
$$\frac{\rho_1}{\rho_0^2} = -\frac{2}{\varkappa + 1}K^{-2}; \quad w_2 = -\frac{2}{\varkappa + 1}A^3.$$

Учитывая условие $\tau \to 0$, будем считать граничные условия (9) выполненными для $\zeta \geqslant 0$. Таким образом, задача для каждого приближения внешнего разложения (7) становится замкнутой. Решение нулевого приближения описывает плоские и осесимметричные одномерные нестационарные течения газа за фронтом вида $t = g(\zeta)$, $r = 2^{\nu/2}\zeta^{1/(1+\nu)}$, где t — время; r — пространственная координата. В работе [7] показано, что для существования решения нестационарной задачи необходимо $\alpha \leqslant (3 + \nu)/2(1 + \nu)$. Отсюда следует ограничение, наложенное выше на α.

Ниже производится сращивание (3)—(6) лишь с нулевым приближением разложения (7). Так как нулевое приближение само является асимптотическим представлением точного решения вне внутренней области, то удерживаемые при сращивании члены нулевого приближения должны быть малыми более низкого порядка, чем главные члены высших приближений. Неочевидным без анализа поведения высших приближений является и выбор области сращивания. Поэтому проведение краткого исследования о поведении высших приближений представляется целесообразным.

Если в области R, примыкающей к фронту, за исключением некоторой окрестности линий $\zeta = 0$, граничные условия обеспечивают достаточно гладкое решение нулевого приближения, то в ней определено вплоть до некоторого номера j непрерывное решение высших приближений. Для выяснения характера поведения последних в окрестности линии $\zeta = 0$ представим решение k-го приближения в виде асимптотических разложений

$$F_k = F_{k0}(\xi)g_{k0}(\zeta) + F_{k1}(\xi)g_{k1}(\zeta) + \ldots, \quad g_{k,\,j+1}/g_{k,\,j} \to 0 \text{ при } \zeta \to 0.$$

Подставляя последние в (8) и учитывая условия (9), получим

$$\rho \sim \Delta^{-2}\Phi;\ u_1 \sim 1 + \tau^2\Delta^2\Phi;\ x_1 \sim 0(1) + \tau^2\Delta^2\zeta\Phi;$$

$$x_2 \sim \tau(0(1) + \tau^2\zeta\Delta^{2+2\varkappa}\Phi);\ u_2 \sim \tau(0(1) + \tau^2\Delta^2\Phi),$$

если $y_{20} \neq 0$. В случае $y_{20} = 0$ отличие будет лишь при $\nu = 1$ для компонент

$$x_1 \sim 0(1) + \tau^2 0\left(\Delta\zeta^{1/2},\ \int\limits_0^\zeta \Delta^{2\varkappa}d\zeta\right)\Phi;\quad x_2 \sim \tau\Delta\zeta^{1/2}\Phi;$$

$$u_2 \sim \tau\Delta\zeta^{1/2}(0(1) + \tau^2\Delta^{2\varkappa}\Phi);\ \Phi = 0(1) + \tau^2 0(\Delta^{2\varkappa}) + \tau^4 0(\Delta^{4\varkappa}) + \ldots$$

Слагаемое $\tau^{2j}0(\Delta^{2\varkappa j})$, где $\Delta = \zeta^{1/\varkappa[1/(1+\nu)-\alpha]}$, в выражении для функции Φ описывает характер поведения j-го приближения в окрестности линии $\zeta = 0$ относительно нулевого. Таким образом, скорость убывания асимптотических разложений по τ характеризуется выражением $\tau^2 0(\Delta^{2\varkappa}) = \tau^2 0(\zeta^{2[1/(1+\nu)-\alpha]})$. Поэтому поправки к нулевому приближению в общем случае немалы в области значений $\tau^2 0(\Delta^{2\varkappa}) \sim 1$, для которых значения энтропии в нулевом приближении близки к значениям энтропии за прямым скачком уплотнения в стационарном потоке. Факт необходимости поправки к нулевому приближению для указанных значений ζ получен из других соображений в работе [3].

Ограничиваясь лишь нулевым приближением внешнего разложения, определим произвольные функции x_{20}, x_{10} из (5), (6) из условия сращивания в области $\tau^2 0(\Delta^{2\varkappa}) \sim \tau^{\beta_0}$, где как нулевое приближение, так и (5) имеют одинаковую точность. Используя граничные условия на фронте, можно показать, что в этом случае $\beta_0 = 2/(\varkappa + 1)$ и в (5), (6) следует положить $\gamma = \beta_0$, а область сращивания определяется значениями

$\zeta \sim 0(\tau^{\varkappa(1+\nu)/(\varkappa+1)(\alpha(1+\nu)-1)})$. Решение нулевого приближения для ζ из указанной области имеет вид

$$y_2^{1+\nu} = y_{20}^{1+\nu}(\xi) + 2^\nu \int_0^\zeta \frac{1}{\rho_0} d\zeta (1 + 0(\tau^{\beta_0}));$$

$$v_2 = \frac{dy_{10}^{-1}}{d\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[y_{20}^{1+\nu}(\xi) + 2^\nu \int_0^\zeta \frac{1}{\rho_0} d\zeta (1 + 0(\tau^{\beta_0})) \right]^{\frac{1}{1+\nu}} (1 + 0(\tau^{\beta_0}));$$

$$y_1 = \begin{cases} y_{10}(\xi) + y_{20}^{-\nu} \dfrac{d}{d\xi}\left[\dfrac{dy_{10}^{-1}}{d\xi}\dfrac{dy_{20}}{d\xi}\right]\zeta(1+0(\tau^{\beta_0})) + 0\left(\displaystyle\int_0^\zeta\int \frac{1}{\rho_0} d\zeta d\zeta\right), & y_{20} \neq 0, \\ y_{10}(\xi) + \nu \xi^{\frac{1}{2\varkappa}} \dfrac{d}{d\xi}\left[\dfrac{dy_{10}^{-1}}{d\xi}\dfrac{d}{d\xi}\xi^{-\frac{1}{2\varkappa}}\right]\zeta(1+0(\tau^{\beta_0})) + (1-\nu) \times \\ \times 0\left(\displaystyle\int_0^\zeta\int \frac{1}{\rho_0} d\zeta d\zeta\right), & y_{20} = 0; \end{cases}$$

$$v_1 = -\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{\xi}{\rho_0} + 0(1), \quad \frac{1}{\rho_0} = c_0 \xi^{-\frac{1}{\varkappa}} A^{\frac{2}{\varkappa}}, \quad c_0 = \left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} \left(\frac{\varkappa - 1}{\varkappa+1}\right).$$

Здесь удержаны лишь члены, являющиеся малыми более низкого порядка, чем главные члены высших приближений. Функция $t = y_{10}(\xi)$ описывает распределение давления, а $r = y_{20}(\xi)$ — траекторию частицы, прошедшей через фронт в начальный момент движения. Способы определения последних хорошо разработаны [1, 8], поэтому в дальнейшем функции y_{10}, y_{20} считаем известными. Для детального анализа течения необходим конкретный вид функции $g(\zeta)$ в малой окрестности вершины фронта. Проведем его для функций $g(\zeta)$, удовлетворяющих для $\zeta \leqslant 0(\tau^{\varkappa(1+\nu)/(\varkappa+1)\times(\alpha(1+\nu)-1)})$ условию

$$(10) \qquad A = A_0(1 + 0(\tau^{\beta_0})), \quad A_0 = 2^{-\nu/2}(c\alpha)^{-1}\zeta^{1/(1+\nu)-\alpha},$$

уточняющему степень близости функции $g(\zeta)$ к степенной. Здесь $c > 0$ — произвольная постоянная. Учитывая, что $K \gg 1$, из граничных условий на фронте для указанных значений ζ имеем

$$\frac{1}{\rho} = c_0 \xi^{-\frac{1}{\varkappa}} \tau^{-\frac{2}{\varkappa}} X(1 + 0(\tau^{\beta_0})), \quad X = \left(\frac{\tau^2 A_0^2}{1 + \tau^2 A_0^2}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}.$$

Используя (10), можно получить

$$(11) \qquad \int_0^\zeta \frac{1}{\rho f} d\zeta = c_0 \xi^{-\frac{1}{\varkappa}} \tau^{-\frac{2}{\varkappa}} \int_0^\zeta X \left(1 + \sum_{j=1}^{l} \frac{\eta(\eta-1)\ldots(\eta-j+1)}{j!} \times \right.$$
$$\left. \times \left(B\tau^{2-\frac{2}{\varkappa}} X\right)^j d\zeta (1 + 0(\tau^{\beta_0})\right),$$

где $B = -[2\varkappa/(\varkappa - 1)]c_0\xi^{1-1/\varkappa}$; $\eta = -1/2$; целое l определено ниже В случае $\alpha = (3 + \nu)/2(1 + \nu)$ (сильный взрыв в соответствующей нестационарной задаче с последующим расширением поршня) имеем

$$(12)\quad \int\limits_0^{\zeta} X^n d\zeta = \frac{\varkappa}{\varkappa - n}\mu\left(X^{n-\varkappa} - 1\right),\ \mu = c^{-2}\left(\frac{4}{9}\right)^{1-\nu} 2^{-\nu}\tau^2,\quad n = 1, 2, \ldots$$

В общем случае для ζ из области сращивания имеет место

$$(13)\qquad \int\limits_0^{\zeta} X^n d\zeta = \frac{1+\nu}{2(\alpha(1+\nu)-1)}(\tau F_0)^{\frac{1+\nu}{\alpha(1+\nu)-1}}(\Phi_1(b) - \Phi_0(\zeta)).$$

Здесь и ниже $F_0 = 2^{-\nu/2}(c\alpha)^{-1}$, $b = -n/\varkappa$, $a = -b - h - 2$, $h = (1 + \nu)/2(\alpha(1 + \nu) - 1) - 1$; функция Φ_0 имеет вид

$$\begin{cases} O\left(\tau^2 A_0^2\right), & a + 1 \neq 0, \\ O\ln\left(\tau^2 A_0^2\right), & a + 1 = 0, \end{cases} \quad \text{если } 1/\varkappa < -b,$$

$$\text{и } (a+1)^{-1}\left(\tau^2 A_0^2\right)^{a+1} + O\left((a+2)^{-1}\left(\tau^2 A_0^2\right)^{a+2}\right) \text{ при } b = -1/\varkappa.$$

Заметим, что при $b = -1/\varkappa$ для рассматриваемых интервалов изменения α и $\varkappa$ число $a + 1 \neq 0$, а остаточный член должен быть заменен на $O\ln\left(\tau^2 A_0^2\right)$ при $\alpha = 1/(1 + \nu) + \varkappa/2(\varkappa + 1)$. Постоянная Φ_1 не зависит от τ и имеет вид 1) $-b < 2$

$$\Phi_1 = [1/(h+1)]F(-b, h+1, h+2, -1) + [1/(a+1)]F(-b, a+1, a+2, -1);$$

2) $2 \leqslant -b < 3$

$$\Phi_1 = -2^{b+2}(b+1)^{-1} + (h+1)^{-1}(b+1)^{-1}(b+h+2)F(-b-1, h+1, h+2, -1) + (a+1)^{-1}(b+1)^{-1}(b+a+2)F(-b-1, a+1, a+2, -1);$$

3) $-b \geqslant 3$; $m = [-b] - 1$ ([ ] — целая часть величины)

$$\Phi_1 = -\frac{2^{b+2}}{b+1} - \sum_{k=2}^{m}\frac{(b+h+2)\ldots(b+h+k) + (b+a+2)\ldots(b+a+k)}{(b+1)\ldots(b+k)} \times$$
$$\times 2^{b+k} + \frac{(b+h+2)\ldots(b+h+m+1)}{(b+1)\ldots(b+m)}\frac{1}{h+1}F(-b-m, h+1, h+2, -1) +$$
$$+ \frac{(b+a+2)\ldots(b+a+m+1)}{(b+1)\ldots(b+m)}\frac{1}{a+1}F(-b-m, a+1, a+2, -1),$$

где $F(\alpha, \beta, \gamma, -1)$ — сходящиеся гипергеометрические ряды [9]. Возможные особые случаи включены в 1)—3) следующим соглашением: если $a + j + 1 = 0$; $j = 0, 1, \ldots$, то j-й член в соответствующем ряду заменяется нулем.

Учитывая (11), (13), для ζ из области сращивания имеем

$$(14)\qquad \left(\frac{x_2}{\tau}\right)^{1+\nu} - y_2^{1+\nu} = x_{20}^{1+\nu}(\xi, \tau) - y_{20}^{1+\nu}(\xi) + \Phi_2 + O(\varepsilon),$$

$$\Phi_2 = 2^{\nu-1}c_0\xi^{-\frac{1}{\varkappa}}\frac{1+\nu}{\alpha(1+\nu)-1}(F_0\tau)^{\frac{1+\nu}{\alpha(1+\nu)-1}}\tau^{-\frac{2}{\varkappa}}\left[\Phi_1\left(-\frac{1}{\varkappa}\right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{l}\frac{\eta(\eta-1)\ldots(\eta-j+1)}{j!}\left(B\tau^{2-\frac{2}{\varkappa}}\right)^j \Phi_1\left(-\frac{j+1}{\varkappa}\right)\right].$$

Встречающиеся здесь выражения $[\alpha - 1/(1+\nu)]^{-k}\tau^{(1+\nu)/[\alpha(1+\nu)-1]}$, где целое $k < l$, ведут себя при $\alpha \to 1/(1+\nu)$ неособым образом как функции $k!\ (\ln\tau)^{-k}\tau^{(1+\nu)/[\alpha(1+\nu)-1]}$. Остаточный член в (14) имеет порядок $0(\tau^2\ln\tau)$ при $\alpha = 1/(1+\nu) + \varkappa/2(\varkappa+1)$ и $0\left(\int\limits_0^{\zeta}\frac{1}{\rho_0}d\zeta\tau^{\beta_0}\right) \sim$ $\sim \tau^{\frac{\varkappa(1+\nu)}{(\varkappa+1)(\alpha(1+\nu)-1)}}$ в сращиваемой области в остальных случаях.

Из сравнения порядков функции Φ_2 и остаточного члена следует, что для $1/(1+\nu) < \alpha \leqslant 1/(1+\nu) + \varkappa/2(\varkappa+1)$ при определении функции x_{20} функция Φ_2 должна быть включена в остаточный член. Как можно показать, для $1/(1+\nu) + \varkappa/2(\varkappa+1) < \alpha \leqslant (3+\nu)/2(1+\nu)$ главный член ε_0 функции $\tau^2 z_2$ первого приближения в сращиваемой области такой же по порядку величины, как и остаточный член в (14), а для $1/(1+\nu) \leqslant \alpha < 1/(1+\nu) + \varkappa/2(\varkappa+1)$ не превышает $0(\tau^2)$. Таким образом, конкретизация остаточного члена в (14) без учета решения первого приближения разложения (7) неправомерна. Поэтому, положив в случае $1/(1+\nu) \leqslant \alpha \leqslant 1/(1+\nu) + \varkappa/2(\varkappa+1)$ $x_{20}(\xi,\tau) = y_{20}(\xi)$ и в случае $1/(1+\nu) + \varkappa/2(\varkappa+1) < \alpha \leqslant (3+\nu)/2(1+\nu)$ $x_{20}^{1+\nu}(\xi,\tau) = y_{20}^{1+\nu}(\xi) - \Phi_2$; $l = \left[\left(2-\frac{2}{\varkappa}\right)^{-1}\left(\frac{2}{\varkappa} - \frac{1+\nu}{(\varkappa+1)(\alpha(1+\nu)-1)}\right)\right]$ (при этом для $l=0$ в функции Φ_2 следует оставить лишь первое слагаемое), получим в сращиваемой области $\left(\frac{x_2}{\tau}\right)^{1+\nu} = y_2^{1+\nu} + 0(\varepsilon, \varepsilon_0)$. В случае $\alpha = (3+\nu)/2(1+\nu)$ выражение для Φ_2 упрощается в соответствии с (12) и имеет вид

$$\Phi_2 = -2^{\nu}c_0\xi^{-\frac{1}{\varkappa}}\tau^{-\frac{2}{\varkappa}}\mu\left(\frac{\varkappa}{\varkappa-1} + \sum_{j=1}^{l}\frac{\eta(\eta-1)\ldots(\eta-j+1)}{j!}\times\right.$$
$$\left.\times\left(B\tau^{2-\frac{2}{\varkappa}}\right)^j\frac{\varkappa}{\varkappa-j-1}\right). \tag{15}$$

Сращивание функций x_1 и y_1 произведем в соответствии с поведением функции y_{20}. Полагая в (6) $x_{10} = y_{10}(\xi)$, получим следующее:

А. $y_{20} \neq 0$.

В сращиваемой области

$$x_1 = y_{10}(\xi) + y_{20}^{-\nu}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{d}{d\xi}(y_{20})\frac{dy_{10}^{-1}}{d\xi}\right)\zeta + 0(\varepsilon_1)\zeta, \qquad x_1 - y_1 = 0(\varepsilon_1)\zeta.$$

Величина $0(\varepsilon_1)$ не превышает по порядку максимальную из величин τ^{β_0}, $\tau^{2-2/\varkappa}$, $\tau^{\frac{\varkappa(1+\nu)}{(\varkappa+1)(\alpha(1+\nu)-1)} - \frac{2}{\varkappa+1}}$. Таким образом с точностью $0(\varepsilon_1)\tau^{\frac{\varkappa(1+\nu)}{(\varkappa+1)(\alpha(1+\nu)-1)}}$ по сравнению с единицей в сращиваемой области $x_1 = y_1$.

В. $y_{20} = 0$:

1) $\nu = 0$.

В сращиваемой области

$$x_1 = y_{10}(\xi) + 0\left(\tau^{\frac{1+\nu}{\alpha(1+\nu)-1} - \frac{2}{\varkappa}}\right)\zeta + 0\left(\int\int\limits_0^{\zeta}\frac{1}{\rho}d\zeta d\zeta\right),$$

и, как можно показать,

$$x_1 - y_1 = 0\left(\tau^{\frac{2\varkappa(1+\nu)}{(\varkappa+1)(\alpha(1+\nu)-1)} - \frac{2}{\varkappa+1}}, \quad \tau^{\frac{\varkappa(1+\nu)}{(\varkappa+1)(\alpha(1+\nu)-1)} + \frac{2}{\varkappa+1}}\right).$$

2) $\nu = 1$.

В сращиваемой области

$$x_1 = y_{10}(\xi) + \xi^{\frac{1}{2\varkappa}} \frac{d}{d\xi}\left[\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{-\frac{1}{2\varkappa}}\right)\frac{dy_{10}^{-1}}{d\xi}\right]\zeta + 0\left(\tau^{2-\frac{2}{\varkappa}}, \quad \tau^{\beta_0}\right)\zeta,$$

$$x_1 - y_1 = 0(\varepsilon_1)\tau^{\varkappa(1+\nu)/(\varkappa+1)(\alpha(1+\nu)-1)}.$$

После того как произвольные функции x_{20} и x_{10} определены, можно проверить, что сращивание оставшихся функций производится с точностью $0(\tau^{2/(\varkappa+1)})$ по сравнению с единицей, а равномерно пригодное в рассматриваемой области решение строится следующим образом. Во внешней области решение описывается нулевым приближением разложения (7), во внутренней — функциями

$$\left(\frac{x_2}{\tau}\right)^{1+\nu} = x_{20}^{1+\nu}(\xi, \tau) + 2^{\nu}\int_0^{\zeta}\frac{1}{\rho f}d\zeta, \quad u_1 = f,$$

$$x_1 = y_{10}(\xi) + x_{11}\zeta, \quad \frac{x_2}{\tau}\frac{\partial x_1}{\partial \zeta} = f\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{x_2}{\tau}\right), \quad 1/\rho = c_0\xi^{-1/\varkappa}\tau^{-2/\varkappa}X$$

(функции x_{20}, x_{11} определены выше).

Вычисление интеграла упрощено тем, что давление входит в подынтегральное выражение как параметр, и фактически проведено при определении произвольной функции x_{20}. При этом внешняя и внутренняя области, как показано выше, имеют общую часть, где пригодны оба разложения. Форма поверхности тела $\zeta = 0$ имеет вид

$$\left(\frac{x_2}{\tau}\right)^{1+\nu} = y_{20}^{1+\nu}(\xi) + \begin{cases} 0\left(\tau^{\frac{\varkappa(1+\nu)}{(\varkappa+1)(\alpha(1+\nu)-1)}}, \ \varepsilon_0\right), & \frac{1}{1+\nu} < \alpha < \frac{1}{1+\nu} + \frac{\varkappa}{2(\varkappa+1)}, \\ -\Phi_2, & \frac{1}{1+\nu} + \frac{\varkappa}{2(\varkappa+1)} < \alpha \leqslant \frac{3+\nu}{2(1+\nu)}, \end{cases}$$

$$x_1 = y_{10}(\xi).$$

Таким образом, если учитывать лишь нулевое приближение разложения (7), то при $\alpha \to 1/(1+\nu)$ поправка к контуру тела, полученному из решения соответствующей нестационарной задачи, становится сколь угодно малой в рассматриваемой области. Поперечный размер области непригодности нулевого приближения разложения (7), определенной выше значениями $\zeta \leqslant 0(\tau^{\varkappa(1+\nu)/(\varkappa+1)(\alpha(1+\nu)-1)})$, также становится сколь угодно малым, что отражает факт непрерывной зависимости решения от граничных условий, так как при $\alpha = 1/(1+\nu)$ все поле течения описывается нулевым приближением [1]. Однако для всех $1/(1+\nu) < \alpha \leqslant (3+\nu)/2(1+\nu)$ поправка к нулевому приближению разложения (7) во внутренней области немала.

Сравнивая частные случаи полученного решения с известными, заметим, что если форма фронта в окрестности вершины имеет вид $\frac{x_2}{\tau} = \varkappa_1 x_1^{2/(3+\nu)}$, то для определения формы поверхности тела применимы результаты работы [10]. И, как это следует из [10], уравнение поверхности тела имеет вид

$$\left(\frac{x_2}{\tau}\right)^{1+\nu} = Y_{b0}^{1+\nu}(x_1) + p_{00}^{-\frac{1}{\varkappa}}(x_1)\,\frac{\varkappa}{\varkappa+1}\left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}\left(\frac{2}{3+\nu}\right)^2 \varkappa_1^{3+\nu}\tau^{2\left(\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\right)},$$

где Y_{b0} — форма тела, p_{00} — распределение давления по телу, следующие из решения соответствующей нестационарной задачи. При этом в [10] члены порядка $0(\tau^{4[(\varkappa-1)/\varkappa]})$ при вычислении отброшены. Можно проверить, что этот случай соответствует значению параметров, используемых выше $\varkappa_1 = 2^{\nu/2} c^{-1/\alpha(1+\nu)}$, $\alpha = (3+\nu)/2(1+\nu)$. Удерживая в (15) лишь слагаемое порядка $0(\tau^{2(\varkappa-1)/\varkappa})$ и используя выражение, полученное выше для формы тела, получим

$$\left(\frac{x_2}{\tau}\right)^{1+\nu} = y_{20}^{1+\nu}(\xi) + \frac{\varkappa}{\varkappa+1}\left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}\left(\frac{4}{9}\right)^{1-\nu} c^{-2}\xi^{-\frac{1}{\varkappa}}\tau^{2-\frac{2}{\varkappa}}, \quad x_1 = y_{10}(\xi).$$

Учитывая смысл функций y_{20}, y_{10} и связь $c = c(\varkappa_1)$, видим, что оба выражения полностью совпадают. При этом члены более высокого порядка малости, чем первый в (15), обусловлены учетом отклонения функции f от единицы. Как следует из (15), учет последних имеет смысл при значениях $\varkappa$, близких к единице.

В случае, когда форма фронта всюду имеет вид $x_2 = c_1 x_1^n$ и $K = \infty$ (автомодельный случай в соответствующей нестационарной задаче), в [3] построено решение при $x_1 \to \infty$. Проведем сравнение, считая $c_1 = 2^{\nu/2} c^{-n}\tau$, $n = 1/\alpha(1+\nu)$ и ограничиваясь для простоты значениями $1/(1+\nu) + \varkappa/2(\varkappa+1) < \alpha < (3+\nu)/2(1+\nu)$ и областью $\zeta \leqslant (\tau F_0)^{(1+\nu)/[\alpha(1+\nu)-1]}$ (для ζ из указанной области проекция вектора единичной нормали к фронту на ось x_1 по порядку эквивалентна единице). При определении координаты x_2 в [3] пренебрегли отклонением u_1 — продольной составляющей скорости возмущенного потока от единицы. В данной работе отклонение учтено функцией f и вошло в функцию Φ_2 в виде дополнительных слагаемых к первому. Поэтому целесообразно провести сравнение, полагая $f = 1$ и оставляя в выражении Φ_2 лишь первое слагаемое.

Из результатов, изложенных выше, следует вид для функции x_2 в указанной области

$$\frac{x_2}{\tau} = y_т(x_1) - \xi_т^{-\frac{1}{\varkappa}} y_т^{-\nu} c_0 \tau^{-\frac{2}{\varkappa}}\left(A_1 - \zeta F\left(\frac{1}{\varkappa}, \frac{k}{2}, \frac{k}{2}+1, -\tau^{-2}F_0^{-2}\zeta^{\frac{2}{k}}\right)\right),$$

$$A_1 = (F_0\tau)^k (F(1/\varkappa,\ k/2,\ k/2+1, -1) + [\varkappa k/(2-\varkappa k)]\,F(1/\varkappa, 1/\varkappa - k/2, 1/\varkappa - k/2 + 1,\ -1)).$$

где $k = [\alpha - 1/(1+\nu)]^{-1}$; $y_т = 2^{\nu/2} c^{-1/\alpha(1+\nu)} \lambda_0 x_1^{1/\alpha(1+\nu)}$ — поверхность тела, $\xi_т = \dfrac{2^{1-\nu}}{\varkappa+1}\alpha^{-2} c^{-\frac{2}{\alpha(1+\nu)}} h_0 x_1^{-2\left(1-\frac{1}{\alpha(1+\nu)}\right)}$ — распределение давления по телу, следующие из решения нестационарной задачи; λ_0, h_0 — постоянные. Соответствующее выражение из [3], переписанное в обозначениях данной работы, имеет вид

$$\frac{x_2}{\tau} = y_т(x_1) - \xi_т^{-\frac{1}{\varkappa}} y_т^{-\nu} c_0 \tau^{-\frac{2}{\varkappa}}\left((F_0\tau)^k N - \zeta F\left(\frac{1}{\varkappa}, \frac{k}{2}, \frac{k}{2} + 1, -\tau^{-2}F_0^{-2}\zeta^{\frac{2}{k}}\right)\right).$$

Здесь N — произведение гамма-функций

$$N = \Gamma(k/2 + 1)\Gamma(1/\varkappa - k/2)\Gamma^{-1}(1/\varkappa).$$

Используя известные свойства гипергеометрических рядов, можно показать, что $A_1 = (F_0\tau^{\,k}N$. Поэтому выражения для x_2 полностью совпадают.

Распределение давления, следующее из обращения функции $x_1 = x_1(\xi, \zeta)$, имеет вид

$$p = \tau^2 \frac{2^{1-\nu}}{\varkappa+1} \alpha^{-2} c^{-\frac{2}{\alpha(1+\nu)}} x_1^{-\frac{2}{k\alpha}} \left(h_0 + \frac{\varkappa+1}{2k} \lambda_0^{2-\nu} c^{\frac{1}{\alpha}} x_1^{-\frac{1}{\alpha}} \zeta\right).$$

Последнее совпадает с соответствующим выражением [3] с точностью до членов, содержащих функции P_2 и P_4 (обозначения [3]). Функция $P_2 \sim 0(\tau^2)$ определяется, как это следует из [3], решением первого приближения разложения (7). А учет члена P_4 дает вклад в распределение давления, не больший, чем $0(\tau^{4-2/\varkappa}\zeta)$. В данной работе при выводе выражения для x_1 обе эти добавки не учтены. Вид остальных газодинамических величин u_1, u_2 полностью определяется распределением функций x_2, p, ρ, поэтому для них сравнение не проводится.

В общем случае установленное выше соответствие позволяет эффективно построить решение в обратной стационарной задаче всякий раз, как только построено решение в соответствующей нестационарной одномерной задаче.

Поступила 15 X 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. **Черный Г. Г.** Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.
2. **Современные** проблемы газовой динамики. М., «Мир», 1971.
3. **Рыжов О. С., Терентьев Е. Д.** Об энтропийном слое в гиперзвуковых течениях со скачками уплотнения, форма которых задается степенной функцией.— ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
4. **Рыжов О. С., Терентьев Е. Д.** К теории высокоэнтропийного слоя в гиперзвуковых течениях.— ЖВММФ, 1971, т. 11, № 2.
5. **Дулов В. Г.** Об уравнениях пространственных стационарных течений газа в специальных динамических переменных.— В кн.: Труды II Междунар. коллоквиума по газодинамике взрыва и реагирующих систем. Новосибирск, 1969. Секция численных методов в газовой динамике. М., Изд. ВЦ АН СССР, 1969.
6. **Коул Дж.** Методы возмущений в прикладной математике. М., «Мир», 1972.
7. **Григорян С. С.** Задача Коши и задача о поршне для одномерных неустановившихся движений газа (автомодельные движения).— ПММ, 1958, т. 22, вып. 2.
8. **Коробейников В. П.** Задачи теории точечного взрыва в газах.— «Труды Моск. матем. ин-та им. В. А. Стеклова», 1973.
9. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II. М., «Наука», 1969.
10. **Сычев В. В.** О методе малых возмущений в задачах обтекания тонких затупленных тел гиперзвуковым потоком газа.— ПМТФ, 1962, № 6.