ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

С. И. Анисимов, Т. Л. Перельман (Минск)

В теории теплового взрыва и в ряде вопросов теории теплопроводности [1,2] встречается нелинейное уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T + q \exp\left(-\frac{E}{T}\right) \tag{1}$$

Источник в правой части (1) приближенно описывает тепловые деления при химической реакции, а постоянная E означает энергию активации реакции.

Рассмотрим простейшую одномерную краевую задачу для уравнения (1)

$$T(\pm l, t) = T_c, \qquad T(x, 0) = T_0 \qquad (-l \leqslant x \leqslant l) \tag{2}$$

или, что то же самое,

$$T(l, t) = T_c, \qquad \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0, \qquad T(x, 0) = T_0 \tag{3}$$

Введем безразмерные переменные

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \tau = \frac{at}{l^2}, \quad \theta(\xi,\tau) = \frac{T(x, t)}{E}, \quad \theta_0 = \frac{T_0}{E}, \quad \theta_c = \frac{T_c}{E}, \quad \varepsilon = \frac{ql^2}{aE} \tag{4}$$

Пусть, далее, $G(\xi, \xi'; \tau - \tau')$ — функция Грина уравнения теплопроводности для единичного отрезка. Задача (1) — (3) сведется к интегральному уравнению

$$\theta(\xi, \tau) = \psi(\xi, \tau) + \varepsilon \int_0^\tau \int_0^1 G(\xi, \xi'; \tau - \tau') \exp \frac{-1}{\theta(\xi', \tau')} d\xi' d\tau' \tag{5}$$

$$\psi(\xi, \tau) = \theta_c - \frac{2}{\pi}(\theta_c - \theta_0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + 1/2} \exp\left[-\pi^2 \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \tau\right] \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\xi \tag{6}$$

Функция Грина имеет вид

$$G(\xi, \xi'; \tau - \tau') = 1/2\,[\vartheta_2(1/2(\xi + \xi'); i\pi(\tau - \tau')) + \vartheta_2(1/2(\xi - \xi'); i\pi(\tau - \tau'))] \tag{7}$$

Тэта-функции в правой части (7) определяются равенством [3]

$$\vartheta_2(u, iv) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 v\right] \cos(2n + 1)u$$

Заметим, что функция Грина (7) симметрична относительно аргументов ξ и ξ' и в рассматриваемой области нигде не отрицательна.

Уравнение (5) можно решить последовательными приближениями вида (8)

$$\theta^{(0)}(\xi, \tau) = \psi(\xi, \tau), \qquad \theta^{(n+1)}(\xi, \tau) = \psi(\xi, \tau) + \varepsilon \int_0^\tau \int_0^1 G(\xi, \xi'; \tau - \tau') \exp \frac{1}{\theta^{(n)}(\xi', \tau')} d\xi' d\tau'$$

При решении краевых задач, аналогичных (1) — (3), обычно представляют интерес условия существования такого распределения температуры, которое при $\tau \to \infty$ переходило бы в стационарное. Нетрудно показать, что такое распределение существует, если параметр ε достаточно мал. При этом последовательность функций $\theta^{(n)}(\xi, \tau)$ равномерно сходится к решению интегрального уравнения (4). Чтобы показать это, составим следующее выражение

$$\theta^{(n+1)} - \theta^{(n)} = \int_0^\tau \int_0^1 G(\xi, \xi'; \tau - \tau') \left(\exp \frac{-1}{\theta^{(n)}(\xi', \tau')} - \exp \frac{-1}{\theta^{(n+1)}(\xi', \tau')}\right) \times$$

$$\times \frac{\theta^{(n)}(\xi', \tau') - \theta^{(n-1)}(\xi', \tau')}{\theta^{(n)}(\xi', \tau') - \theta^{(n-1)}(\xi', \tau')} d\xi' d\tau' \tag{9}$$

Заметим, что $\theta^{(n)} - \theta^{(n-1)} \geqslant 0$, так как $\psi(\xi,\tau) \geqslant 0$, $G(\xi, \xi'; \tau - \tau') \geqslant 0$. Введем обозначение

$$\max(\theta^{(n)} - \theta^{(n-1)}) = M_n \geqslant 0$$

Из (9) следует, что

$$M_{n+1} \leqslant AM_n, \quad A = \max\left\{\varepsilon \int_0^1 \int_0^\tau \frac{G(\xi, \xi'; \tau - \tau')}{\theta^{(n)} - \theta^{(n-1)}} \left[\exp\frac{1}{\theta^{(n)}} - \exp\frac{-1}{\theta^{(n-1)}}\right] \times d\xi' d\tau'\right\}$$

Легко убедиться, что $A < 1$, если $\varepsilon < {}^1/_2 e^2$. В этом случае существует предельная функция последовательности (8), которая и будет решением уравнения (5).

Для химической кинетики представляет интерес случай, когда $\theta \ll 1$. Легко показать, что в этом случае неравенство для ε имеет вид

$$\varepsilon < \frac{1}{\theta_m^2} \exp\frac{-1}{\theta_m}$$

где θ_m — наибольшее в рассматриваемой области значение $\theta(\xi, \tau)$.

Отметим, что описанный метод последовательных приближений дает достаточное условие существования решения. Применяя известные теоремы теории интегральных уравнений (см., например, [4]), нетрудно показать, что уравнение (5) имеет по крайней мере одно решение при любых значениях параметра ε. Смысл полученного результата состоит в том, что в некотором интервале значений решение будет не единственным. Мы возвратимся к этому вопросу ниже, при рассмотрении стационарной задачи.

Построенный метод последовательных приближений позволяет получить приближенные решения в некоторых простых предельных случаях. Рассмотрим сначала решение при достаточно больших временах.

1. Будем считать, что параметр ε достаточно мал, так что существует единственное во всех временах решение уравнения (5), которое можно получить итерациями (8). Вычислим $\theta^{(1)}(\xi, \tau)$, принимая за нулевое приближение стационарное распределение температуры, $\theta(\xi, \infty) \equiv \theta(\xi)$, удовлетворяющее соотношениям

$$\frac{d^2\theta(\xi)}{d\xi^2} + \varepsilon \exp\left(-\frac{1}{\theta(\xi)}\right) = 0, \qquad \theta(1) = \theta_c, \qquad \frac{d\theta(0)}{d\xi} = 0 \tag{10}$$

Решение задачи (10) имеет вид

$$(1 - \xi)\sqrt{2\varepsilon} = \int_{\theta_c}^{\theta} \left[\int_z^{\theta_m} \exp\frac{-1}{u}\, du\right]^{-1/2} dz \tag{11}$$

где θ_m — наибольшее значение функции $\theta(\xi)$ на отрезке $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, которое в силу симметрии достигается при $\xi = 0$.

Стационарное решение $\theta(\xi)$ существует и единственно, если уравнением (11) при $\xi = 0$ определяется единственное для каждого ε значение постоянной θ_m; при этом интегралы, входящие в (11), не выражаются в элементарных функциях. Однако общий характер зависимости $\theta_m(\varepsilon)$ можно исследовать, не прибегая к численному интегрированию. Легко видеть, прежде всего, что уравнение (11) при $\xi = 0$ имеет, по крайней мере, одно решение для θ_m при любых значениях ε; действительно, имеет место оценка

$$\sqrt{2\varepsilon} \geqslant \int_{\theta_c}^{\theta_m} \left[\int_{\theta_c}^{\theta_m} \exp\frac{-1}{u}\, du\right]^{-1/2} dz \geqslant \int_{\theta_c}^{\theta_m} \frac{\exp(1/2\theta_m)\, dz}{\sqrt{\theta_m - \theta_c}} - \sqrt{\theta_m - \theta_c}\, \exp\frac{1}{2\theta_m} \tag{12}$$

Следовательно, значения ε могут быть сколь угодно велики. Заметим, что после выполненной в работе [2] замены

$$\exp\frac{-1}{\theta} \exp\frac{-1}{\theta_c} \exp\frac{\Delta\theta}{\theta_c^{\,2}} \tag{13}$$

решение при достаточно больших ε не существует. Это понятно, потому что в результате замены (13) в уравнении (10) вместо ограниченной функции $\exp(-1/\theta)$ появляется неограниченно возрастающая функция $\exp(\alpha\theta)$, и известные условия существования решения (см., например, [5]) оказываются невыполненными.

Разложение (13) справедливо при выполнении двух условий: $\theta_c \ll 1$ и $\theta_m - \theta_c \ll \theta_c$. Сохраняя первое из них и сопоставляя результат, полученный в [2], с оценкой (12), нетрудно заключить, что при фиксированном θ_c функция $\varepsilon(\theta_m)$ имеет, по крайней мере, два экстремума, между которыми заключена область неоднозначности решений, где каждому значению ε соответствует больше одного (в действительности три) значения θ_m. Более подробное рассмотрение показывает, что минимум функции

$\varepsilon(\theta_m)$ лежит в области значений $\theta_m \sim 1$, а также, что существует такое критическое значение θ_c^*, что при $\theta_c > \theta_c^*$ решение стационарной задачи существует и единственно при всех ε. Эти замечания, возможно, представляют интерес в случае реакций с малой энергией активации.

Принимая решение (11) за нулевое приближение, получим значение функции $\theta(\xi, \tau)$ вблизи стационарного состояния. Результат имеет вид

$$\theta(\xi, \tau) = \theta(\xi) + \frac{4}{\pi} \exp\left(-\frac{\pi^2\tau}{4}\right) \cos\frac{\pi\xi}{2} \left[\theta_0 - \frac{\pi}{2} \int_0^1 \theta(\xi') \cos\pi\frac{\xi'}{2}\, d\xi'\right] \qquad (15)$$

Если во всей области $\theta(\xi) \ll 1$, то можно, используя метод перевала, упростить исходное интегральное уравнение. Опуская вычисления, приведем результат

$$\theta(\xi, \tau) = \theta(\xi) - \frac{4}{\pi} \exp\left(-\frac{\pi^2\tau}{2}\right) \cos\frac{\pi\xi}{2} \left[\theta_c - \theta_0 + 2\sqrt{\frac{2\xi}{\pi}}\, \theta_m \exp\left(-\frac{1}{2\theta_m}\right)\right] \qquad (16)$$

Формулы (15) и (16) верны при условии $\tau > 4/\pi^2$.

2. Рассмотрим решение при малых временах. В этом случае за нулевое приближение естественно принять начальную температуру θ_0. Ядро интегрального уравнения (5) упростим, воспользовавшись известным соотношением для тэта-функций

$$\vartheta_2(u, iv) = v^{-1/2} \exp\left(-\frac{\pi u^2}{v}\right) \vartheta_0\left(\frac{u}{iv}, \frac{i}{v}\right) \qquad (17)$$

Оставляя при $\tau \to 0$ лишь главные члены функции Грина и выполняя интегрирование, получаем в результате

$$\theta(\xi, \tau) = \theta_c + \varepsilon \exp\frac{-1}{\theta_0}\left\{1 - \xi^2 + \sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\left[(1-\xi)\exp\left(-\frac{(1-\xi)^2}{4\tau}\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + (1+\xi)\exp\left(-\frac{(1+\xi)^2}{4\tau}\right) - 2\exp\frac{-1}{\tau}\right]\right\} + \left\{\theta_0 - \theta_c + \varepsilon\left[\frac{(1-\xi)^2}{2} + \tau\right] \times\right.$$
$$\left.\times \exp\frac{-1}{\theta_0} \operatorname{erf}\left(\frac{1-\xi}{2\sqrt{\tau}}\right)\right\} + \left\{\theta_0 - \theta_c + \varepsilon\left[\frac{(1+\xi)^2}{2} + \tau\right]\exp\frac{-1}{\theta_0}\operatorname{erf}\left(\frac{1+\xi}{2\sqrt{\tau}}\right)\right\} -$$
$$-\left\{\theta_0 - \theta_c + \varepsilon\exp\frac{-1}{\theta_0}[2+\tau]\operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right)\right\} \qquad \left(\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt\right) \qquad (18)$$

3. Рассмотрим, наконец, случай, когда параметр ε мал. Решение в этом случае можно получить в виде ряда по степеням ε, принимая за нулевое приближение $\psi(\xi, \tau)$ (см. (5)). Заметим, что при $\varepsilon \to 0$ разность $\theta_m - \theta_c \to 0$. Это позволяет при достаточно больших временах пренебречь в (6) вторым членом по сравнению с первым. Это же можно сделать при всех временах, если $|\theta_c - \theta_0| \ll \theta_c$.

В первом приближении по ε результат имеет вид

$$\theta(\xi, \tau) = \psi(\xi, \tau) + \varepsilon \exp\frac{-1}{\theta_c}\left[\frac{1-\xi^2}{2} - \frac{2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1/2)^3} \times\right.$$
$$\left.\times \exp\left[-\pi^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\tau\right]\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\xi\right] \qquad (19)$$

При получении высших приближений в соответствующих расчетах удобно использовать метод перевала, примененный выше к вычислению выражения (16).

4. Покажем в заключение, что в процессе установления стационарного распределения температуры ($\varepsilon < \varepsilon_*$) температура в любой точке монотонно стремится при $\tau \to \infty$ к соответствующей стационарной температуре. Интуитивно этот результат достаточно очевиден. Для доказательства составим разность $\Delta(\xi, \tau) = \theta(\xi, \tau) - \theta(\xi)$. Последняя удовлетворяет интегральному уравнению

$$\Delta(\xi, \tau) = \Phi(\xi, \tau) + \varepsilon\int_0^\tau\int_0^1 G(\xi, \xi'; \tau - \tau')\left[\exp\frac{1}{\theta(\xi') + \Delta(\xi', \tau')} - \exp\frac{1}{\theta(\xi')}\right]d\xi'\,d\tau' \quad (20)$$

$$\Phi = 2\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\int_0^1 [\theta_0 - \theta(\xi')]\cos\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi'\,d\xi'\right\}\exp\left[\pi^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\tau\right]\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\xi$$

К уравнению (20) применим метод последовательных приближений, полагая

$$\Delta^{(0)}(\xi, \tau) = \Phi(\xi, \tau)$$

Учитывая, что $\Phi(\xi, \tau) \leqslant 0$ (в физически интересном случае $\theta_c > \theta_0$, когда среда разогревается с течением времени), и повторяя рассуждения, проводившиеся при доказательстве существования и единственности решения краевой задачи (1) — (2), найдем, что $\Delta^{(n)} < 0$ при всех τ и разность $\Delta^{(n)} - \Delta^{(n-1)} \to 0$ при $\tau \to \infty$.

Поступила 1 VI 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Кондратьев В. Н. Кинетика химических газовых реакций. Изд. АН СССР, 1958.
2. Франк-Каменецкий Л. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. Изд. АН СССР, 1947.
3. Морс Ф. и Фешбах Г. Методы теоретической физики, ИЛ, т. 1, 1958.
4. Смирнов Н. С. Введение в теорию нелинейных интегральных уравнений. М.— Л., 1936.
5. Сансоне Д. Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. 2, М., 1953.

О ТЕПЛООБМЕНЕ В КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКЕ ТУПОГО ТЕЛА ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

И. Н. Мурзинов (Москва)

На основании анализа обтекания сфер гиперзвуковым потоком выявлен параметр, определяющий теплообмен в критической точке при малых числах Рейнольдса. Приведены некоторые результаты расчетов, которые аппроксимированы аналитическим выражением в зависимости от этого параметра. Полученная зависимость сравнивается с экспериментальными данными.

Используя основные предположения работы [1], уравнения количества движения и энергии в окрестности критической точки сферы запишем в виде

$$(\rho\mu f'')' + 2ff'' - f'^2 + \frac{2b}{\rho} = 0, \qquad \left(\frac{\rho\mu}{\sigma} i'\right)' + 2fi' = 0 \tag{1}$$

$$\left(u = xf'(\eta), \quad v = -\frac{2f(\eta)}{\rho\sqrt{R_\infty}}, \quad \eta = \sqrt{R_\infty}\int_0^y \rho dy, \quad R_\infty = \frac{\rho_\infty V_\infty r_0}{\mu_\infty}\right)$$

Здесь xr_0, yr_0 — расстояния вдоль образующей и по нормали к телу, r_0 — радиус сферы, uV_∞, $v V_\infty$, $\rho\rho_\infty$, $\mu\mu_\infty$, iV_∞^2, $p\rho_\infty V_\infty^2$ — соответственно составляющие скорости по осям x и y, плотность, вязкость, энтальпия и давление газа, ρ_∞, μ_∞, V_∞ — плотность, вязкость и скорость набегающего потока, σ — число Прандтля, штрих означает дифференцирование по переменной η. Величина b определяет градиент давления в критической точке тела, так что

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -2bx$$

Граничными условиями являются условия на теле и на скачке уплотнения:

$$i = i_w, \qquad f = f' = 0 \quad \text{при } \eta = 0$$

$$i \approx 0{,}5, \qquad f = \frac{\sqrt{R_\infty}}{2}, \qquad f' = \frac{1}{r_1} \quad \text{при } \eta = \eta_1 \tag{2}$$

где $r_0 r_1$ — радиус кривизны скачка уплотнения, η_1 — неизвестная величина, характеризующая положение скачка уплотнения.

При заданных b и r_1 шести условий (2) достаточно для решения системы (1) и определения η_1.

Полагая распределение давления по сфере ньютонианским, можно получить $b \approx (1 - {}^1/_2 k)$, где k — отношение плотностей на прямом скачке уплотнения. Для сферического притупления при низкой температуре стенки толщина вытеснения пограничного слоя мала. Поэтому будем считать, что величина r_1 останется такой же, как и при обтекании сферы невязким газом. В расчетах использовались значения r_1, определяемые по данным работ [2, 3] в зависимости от k.