

УДК 532.59

ВЛИЯНИЕ ДИСПЕРСИИ И ТОПОГРАФИИ НА ДИНАМИКУ ТОНКОГО СЛОЯ ЖИДКОСТИ

К. Н. Гаврилова

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассматривается гиперболическая модель течения мелкой воды с учетом нелинейных и дисперсионных эффектов. Исследована структура бегущих волн над ровным дном. Проведен анализ устойчивости малых возмущений равномерного потока и развития неустойчивости нестационарного течения над наклонным дном.

Ключевые слова: уравнения мелкой воды, катящаяся волна, однородная жидкость, дисперсионная гиперболическая модель.

Введение. При определенных углах наклона равномерное течение в длинных каналах становится неустойчивым, вследствие чего развиваются волны, получившие название катящихся волн.

Математическая теория катящихся волн впервые построена Р. Дресслером [1]. Для бурных потоков, в которых сила тяжести уравнивается силой трения о дно канала, установлено, что класс бегущих волн для уравнений мелкой воды с турбулентным трением содержит периодические разрывные решения, при этом непрерывные периодические решения отсутствуют. Как показано в [2, 3], для уравнений мелкой воды с турбулентным трением (коэффициент трения постоянный) критическим является значение числа Фруда $Fr = 2$.

В работе [4] проанализирована зависимость скорости роста возмущений от длины волны. Показано, что линейные волны с максимальным инкрементом нарастания соответствуют развитой стадии экспериментально наблюдаемых катящихся волн [5].

Введение в уравнения мелкой воды диссипативных членов позволило доказать существование гладкого периодического решения [6]. В работах [7, 8] показано, что гладкие периодические решения малой амплитуды в диссипативной модели являются неустойчивыми и в ходе эволюции течения возникают катящиеся волны конечной амплитуды, по структуре близкие к построенным Р. Дресслером периодическим волнам.

В данной работе рассматривается модель, в которой учитывается влияние дисперсии на развитие волн. Модель является гиперболической и хорошо аппроксимирует второе приближение теории мелкой воды. Изучена структура бегущих волн над ровным дном. Проведено сравнение результатов расчета нестационарной задачи о генерации волн движущимся препятствием по ровному дну с результатами, полученными для модели Буссинеска [9].

В случае наклонного дна с учетом трения проведен анализ устойчивости малых возмущений равномерного течения и найдено критическое значение числа Фруда, которое определяет переход от устойчивого потока к неустойчивому. Численно исследована динамика катящихся волн в наклонном канале как нелинейная стадия развития неустойчивости равномерного течения, а также определено влияние дисперсии на структуру катящихся волн.

1. Анализ гиперболической модели. 1.1. *Постановка задачи.* Рассматривается эволюция тонкого слоя тяжелой жидкости, находящейся под покоящимся слоем более легкой, не смешивающейся с ней жидкости. Уравнения однослойной мелкой воды описывают структуру затопленного слоя в случае, когда толщина верхнего покоящегося слоя намного превышает толщину нижнего слоя более тяжелой жидкости. При этом в уравнения движения вместо ускорения свободного падения g вводится приведенное ускорение $g^* = (\rho^- - \rho^+)g/\rho^-$, где ρ^+ , ρ^- — плотности верхнего и нижнего слоев соответственно.

В гидравлике зависимость скорости от координаты y , нормальной дну, исключается осреднением, так что $u = u(t, x)$, и ускорением вдоль оси y пренебрегается. Последнее означает, что распределение давления гидростатично [2] и уравнения выводятся для толщины слоя $h(t, x)$ и средней по глубине скорости $u(t, x)$. В рамках классической теории мелкой воды невозможно описать структуру волновых фронтов. Известно, что при распространении возмущений по покоящейся жидкости за фронтом появляется цуг волн. При этом длина волн сравнима с толщиной однородного слоя, т. е. возникает волновой бор, в формировании которого большую роль играет негидростатичность распределения давления на фронте волны. Для моделирования волнового бора используются разные варианты уравнений Буссинеска и Кортевега — де Фриза [2], в которых дисперсионные эффекты описываются членами, содержащими производные более высоких порядков. Соответствующие модели не описываются системами гиперболических уравнений. В качестве примера можно привести нестационарный вариант модели Серра [10]

$$h_t + (uh)_x = 0, \quad u_t + \left(\frac{1}{2} u^2 + g^* h + \varkappa h \frac{d^2 h}{dt^2} \right)_x = 0, \quad (1)$$

где \varkappa — отношение вертикального и горизонтального масштабов. Этот параметр соответствующим растяжением переменных можно сделать равным любой константе.

Гиперболическая модель с дисперсией рассмотрена в [11]. Для того чтобы учесть негидростатичность распределения давления в слое жидкости, в осредненные уравнения вводится величина p^* — дефицит давления на дно канала:

$$h_t + (hu)_x = 0, \quad u_t + uu_x + g^* h_x + p_x^* = 0. \quad (2)$$

Наряду со средними величинами (толщиной слоя $h(t, x)$ и скоростью $u(t, x)$) в (2) используются переменные, характеризующие поток в данной точке. При равновесии средние и мгновенные величины равны. Пусть $\eta(t, x)$ — глубина, $v(t, x)$ — вертикальная скорость жидкости на поверхности. Различие между средней глубиной $h(t, x)$ и мгновенной глубиной $\eta(t, x)$ появляется, когда в окрестности точки x по жидкости распространяется волна, длина которой сравнима с продольным пространственным масштабом, используемым для получения среднего значения $h(t, x)$.

Предполагается, что различие между $h(t, x)$ и $\eta(t, x)$ мало: $|\eta/h - 1| \ll 1$. Уравнения для $\eta(t, x)$ и $v(t, x)$ имеют вид [11]

$$\eta_t + u\eta_x = v, \quad h(v_t + uv_x) = \beta p^*, \quad (3)$$

где β — отношение вертикального и горизонтального масштабов при переходе к длинноволновому приближению. Этот параметр соответствующим растяжением независимых переменных можно сделать равным единице. В (3) первое уравнение — кинематическое условие на поверхности жидкости, а второе получено интегрированием уравнения импульса для вертикальной компоненты скорости по всему слою с учетом условий непротекания на дне и в силу линейного распределения вертикальной компоненты скорости по глубине.

Для замыкания системы уравнений (2), (3) достаточно выразить p^* через искомые переменные, например через h и η : $p^* = p^*(h, \eta)$. Так как $|h - \eta| \ll h$, то с учетом условия равновесия $p^*(h, h) \equiv 0$ выражение для p^* можно выбрать в виде

$$p^* = \alpha g^*(h - \eta). \quad (4)$$

При $\alpha \rightarrow 0$ уравнения (2) не зависят от системы (3) и переходят в классические уравнения мелкой воды. При $\alpha \rightarrow \infty$ полученная система эквивалентна системе (1), так как $h \equiv \eta$. При конечных значениях параметра α система (2)–(4) является промежуточной между первым и вторым приближением мелкой воды, которое описывает дисперсионные свойства и остается гиперболическим. В [11] показано, что система (2)–(4) гиперболическая.

Система (2)–(4) может быть модифицирована для описания волн над наклонным дном. В этом случае она принимает вид

$$\begin{aligned} h_t + (hu)_x &= 0, & u_t + (u^2/2 + bh + b\alpha(h - \eta))_x &= b \operatorname{tg} \varphi - c_f u^2/h, \\ \eta_t + u\eta_x &= v, & h(v_t + uv_x) &= \beta\alpha b(h - \eta), \end{aligned} \quad (5)$$

где φ — угол наклона канала; c_f — коэффициент трения; $b = g^* \cos \varphi$.

При $c_f = 0$, $\varphi = 0$ решением системы (5) являются бегущие волны над ровным дном, а при введении во второе уравнение системы функции $z(x)$, задающей вид локального препятствия, модель применима для описания волн, генерируемых движущимся по дну препятствием [11].

Для наклонной плоскости решением системы (5) является стационарное течение ($v = 0$, $\eta = h_0$, $h = h_0$, $u = u_0$), при этом $h_0 = c_f u_0^2 / (g^* \sin \varphi)$.

В безразмерных переменных

$$\begin{aligned} \bar{h} &= h/h_0, & \bar{u} &= u/\sqrt{g^* h_0 \cos \varphi}, & \bar{\eta} &= \eta/h_0, \\ \bar{x} &= x/h_0, & \bar{t} &= t\sqrt{g^* \cos \varphi/h_0}, & \bar{v} &= v/\sqrt{g^* h_0 \cos \varphi} \end{aligned}$$

система (5) принимает вид (черта опускается)

$$\begin{aligned} h_t + (hu)_x &= 0, & u_t + (u^2/2 + h + \alpha(h - \eta))_x &= c_f(\gamma - u^2/h), \\ \eta_t + u\eta_x &= v, & h(v_t + uv_x) &= \beta\alpha(h - \eta), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\gamma = \operatorname{tg} \varphi / c_f$. Если реализуется равномерный поток с глубиной h_0 , то число Фруда такого течения определяется параметром γ : $\operatorname{Fr}^2 = u_0^2/h_0 = \gamma$.

1.2. *Анализ малых возмущений.* Линеаризация системы (6) на решении $h = 1$, $u = \sqrt{\gamma}$, $\eta = 1$, $v = 0$ приводит к уравнениям для возмущений

$$\begin{aligned} h_t + \sqrt{\gamma}h_x + u_x &= 0, & u_t + (1 + \alpha)h_x + \sqrt{\gamma}u_x - \alpha\eta_x + c_f(2\sqrt{\gamma}u - \gamma h) &= 0, \\ \eta_t + \sqrt{\gamma}\eta_x - v &= 0, & v_t + \sqrt{\gamma}v_x - \beta\alpha(h - \eta) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Подстановка решения $U = \hat{U} \exp(i(\sigma \hat{x} - \omega \hat{t}))$, где $U = (h, u/\sqrt{\gamma}, \eta, v/\sqrt{\gamma})^T$; $\hat{U} = (\hat{h}, \hat{u}, \hat{\eta}, \hat{v})^T$; $\hat{x} = c_f \gamma x$; $\hat{t} = c_f \sqrt{\gamma^3} t$, в (7) приводит к алгебраическим соотношениям

$$\begin{aligned} (\sigma - \omega)\hat{h} + \sigma\hat{u} &= 0, & ((1 + \alpha)i\sigma - 1)\hat{h} + (2 + i\gamma(\sigma - \omega))\hat{u} - i\alpha\sigma\hat{\eta} &= 0, \\ i\gamma(\sigma - \omega)\hat{\eta} - \hat{v}/c_f &= 0, & (\beta\alpha/c_f)\hat{h} - (\beta\alpha/c_f)\hat{\eta} - i\gamma^2(\sigma - \omega)\hat{v} &= 0 \end{aligned}$$

и после простых преобразований — к дисперсионному соотношению

$$i\gamma^4 q^4 + 2\gamma^3 q^3 - \left(\gamma^3 \sigma ((1 + \alpha)i\sigma - 1) + \frac{\beta\alpha i\gamma}{c_f^2} \right) q^2 - \frac{2\beta\alpha}{c_f^2} q + \frac{\beta\alpha}{c_f^2} \sigma (i\sigma - 1) = 0 \quad (8)$$

($q = \sigma - \omega$).

Решение устойчиво при $\operatorname{Im} \omega < 0$, т. е. $\operatorname{Im} q > 0$. При $\alpha = 0$ уравнение (8) дает известное условие устойчивости $\gamma < 4$ для уравнений мелкой воды с трением [4]. Численное

исследование зависимости $\omega = \omega(\sigma)$ для $c_f = 1$, $\beta = 2$ при изменении параметра α в широких пределах ($1 < \alpha < 75$) показало, что критическое значение γ_{cr} меняется несущественно (γ_{cr} лежит в ε -окрестности точки $\gamma = 4$, где $\varepsilon = 0,1$). Таким образом, изменение параметра α , отвечающего за дисперсию волн в системе, слабо влияет на границы устойчивости.

1.3. *Сравнение свойств второго приближения теории мелкой воды с гиперболической моделью.* Исследуем две системы уравнений течения жидкости над ровным дном: гиперболическую систему (5) ($\alpha < \infty$, $c_f = 0$, $\varphi = 0$)

$$\begin{aligned} h_t + (uh)_x &= 0, & u_t + (u^2/2 + g^*h + g^*\alpha(h - \eta))_x &= 0, \\ \eta_t + u\eta_x &= v, & h(v_t + uv_x) &= g^*\beta\alpha(h - \eta) \end{aligned}$$

и систему (1), являющуюся одним из вариантов уравнений Буссинеска.

Рассмотрим уравнения второго приближения мелкой воды (1). Пусть решения зависят только от переменной $\xi = x - Dt$. Бегущие волны системы (1) найдены в [10]:

$$\begin{aligned} h(u - D) &= -h_0D, \\ u^2/2 - Du + g^*h + \varkappa(D^2hh'' - 2Duhh'' + u^2hh'' - Dh u' h' + h u h' u') &= g^*h_0 \end{aligned}$$

(штрих означает дифференцирование по переменной ξ). Профиль бегущей волны выражается в квадратурах:

$$\xi = \xi_0 \pm \int_{h_0}^h \frac{Dh_0 ds}{s\sqrt{2F_\infty(s)}}, \quad (9)$$

где

$$F_\infty(h) = (-g^*(h - h_0) + (D^2/2 + g^*h_0) \ln(h/h_0) + D^2(h_0^2/h^2 - 1)/4)/\varkappa.$$

Если в качестве h_0 выбрать равновесное состояние, то из (9) следует, что необходимым условием существования решения является положительность функции $F_\infty(h)$ в окрестности точки $h = h_0$. Поскольку $F_\infty(h_0) = 0$ и $F'_\infty(h_0) = 0$, неравенство $F''_\infty(h_0) > 0$, обеспечивающее положительность функции $F_\infty(h)$ вблизи точки h_0 , выполнено тогда и только тогда, когда

$$\sqrt{g^*h_0} < D. \quad (10)$$

Профиль волны для скорости D , удовлетворяющей неравенству (10), показан штриховой линией на рис. 1.

Теперь рассмотрим гиперболическую систему. Бегущие волны описываются уравнениями

$$\begin{aligned} (h(u - D))' &= 0, & (u^2/2 - Du + (1 + \alpha)g^*h - g^*\alpha\eta)' &= 0, \\ (u - D)\eta' &= v, & h(u - D)v' &= g^*\beta\alpha(h - \eta). \end{aligned}$$

Для этой системы профиль бегущей волны выражается в квадратурах [11]:

$$\xi = \xi_0 \pm \int_{h_0}^h \frac{Dh_0 a(s) ds}{s\sqrt{2F_\alpha(s)}},$$

где $a(h) = 1 - (D^2h_0^2/(g^*h^3) - 1)/\alpha$;

$$\begin{aligned} F_\alpha(h) &= \frac{\beta}{2} \left(-2g^* \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) (h - h_0) + \frac{D^2h_0^2}{2\alpha} (\alpha - 1) \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h_0^2} \right) + \right. \\ &+ \left. \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) (D^2 + 2g^*h_0) \ln \left(\frac{h}{h_0} \right) + \frac{D^2h_0^2}{3\alpha} \left(2h_0 + \frac{D^2}{g^*} \right) \left(\frac{1}{h^3} - \frac{1}{h_0^3} \right) - \frac{D^4h_0^4}{5g^*\alpha} \left(\frac{1}{h^5} - \frac{1}{h_0^5} \right) \right). \end{aligned}$$

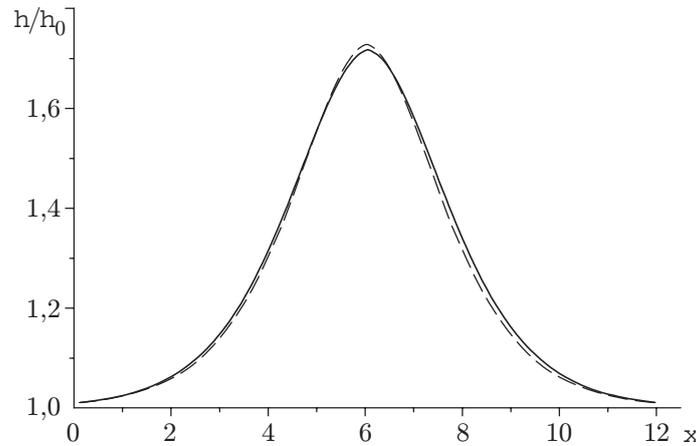


Рис. 1. Профили солитонов ($D = 1,3$):

сплошная кривая — расчет по гиперболической системе (5), штриховая — расчет по уравнениям Буссинеска (1)

Неравенство, обеспечивающее положительность функции $F_\alpha(h)$ вблизи точки h_0 , выполнено тогда и только тогда, когда

$$\sqrt{g^*h_0} < D < \sqrt{(1+\alpha)g^*h_0}. \quad (11)$$

Профиль волны для скорости D , удовлетворяющей неравенству (11), представлен сплошной линией на рис. 1. Численный расчет интегралов методом Рунге — Кутты четвертого порядка при $h_0 = 1$, $g^* = 1$, $\alpha = 8$, $\beta = 2$, $\varkappa = 1/2$, $D = 1,3$ показал эффективность аппроксимации модели второго приближения теории мелкой воды гиперболической моделью. Погрешность при использовании модели (1) вместо (5) для построения солитонов достаточно мала уже при $\alpha \approx 1$ и быстро уменьшается при $\alpha \rightarrow \infty$. Сравнение нестационарных решений при гиперболической аппроксимации второго приближения мелкой воды проведено ниже.

1.4. *Генерация нестационарных волн при обтекании локального препятствия.* Для проверки эффективности аппроксимации уравнений Буссинеска гиперболическими моделями рассматривается обобщенная модель Буссинеска. Исследованная в [9] система в принятых в данной работе обозначениях имеет вид

$$h_t + (uh)_x = 0, \quad u_t + (u^2/2 + h + z - u_{xt}/3)_x = 0, \quad (12)$$

где функция $z(x)$ задает форму локального препятствия.

Так же как для модели (5), гиперболическая аппроксимация системы (12) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} h_t + (uh)_x = 0, \quad u_t + (u^2/2 + h + z + \beta\alpha(h - \eta)/3)_x = 0, \\ \eta_t = v, \quad v_t = \beta\alpha(h - \eta). \end{aligned} \quad (13)$$

Система (13) использована для решения нестационарной задачи о генерации волн локальным препятствием. Ниже полученные результаты сравниваются с экспериментальными и расчетными результатами для модели (12), взятыми из [9].

Заметим, что уравнения (12) не допускают преобразования Галилея. Поэтому наряду с (13) в качестве гиперболической аппроксимации использована инвариантная модель (6) ($c_f = 0$, $\varphi = 0$) с функцией, задающей вид препятствия.

Для численного решения системы (13) использовался метод Годунова, основанный на задаче о распаде произвольного разрыва с учетом кратной контактной характеристики $x \equiv \text{const}$.

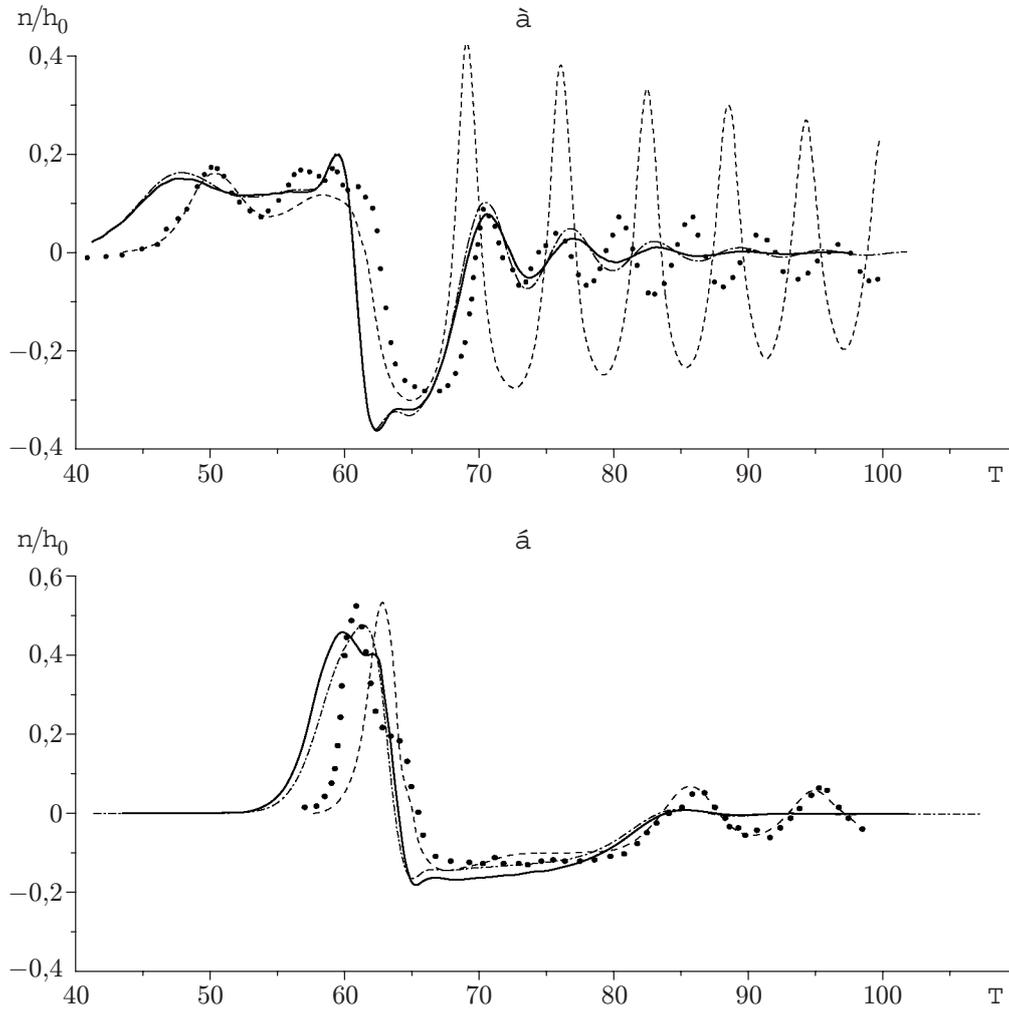


Рис. 2. Экспериментальные и расчетные зависимости глубины слоя жидкости η от времени T :
 a — $Fr = 0,82$, b — $Fr = 1,12$; точки — экспериментальные данные [9], сплошные кривые — расчет по модели (13), штрихпунктирные — расчет по модели (6), штриховые — расчет по модели (12)

Движение препятствия с постоянной скоростью D начиналось из состояния покоя ($h \equiv h_0, u = 0$). Расчет проводился для различных значений числа Фруда $Fr = D/\sqrt{bh_0} = 0,82 \div 1,12$. Препятствие представляет собой цилиндрический сегмент высотой $z_m/h_0 = 0,2$ с шириной основания $L/h_0 = 1,23$. Полученные результаты сравнивались с результатами расчета по модели (12) [9] и экспериментальными данными [9].

Основные особенности волн, отмеченные в [9], а именно генерация уединенной волны, распространяющейся вверх по потоку, удлиненная область понижения волны и хвостовой цуг волн на подветренной стороне препятствия, наблюдались в численном решении.

На рис. 2 представлены экспериментальные данные [9], а также результаты численного расчета по модели (12), по гиперболической модели (13) при $\alpha = 1, \beta = 3$ и по модели (6). Расчеты проведены для высоких докритических и низких сверхкритических скоростей. Результаты расчета по гиперболической модели для высоких докритических скоростей ($0,8 < Fr < 0,9$) хорошо согласуются с данными расчета по модели (12) и экспериментальными значениями амплитуды. Для подветренного цуга волн вычисленная

амплитуда меньше, чем экспериментальная (волны затухают). При расчете по модели (13) не возникает слабозатухающих осцилляций на подветренной стороне препятствия, появляющихся при использовании модели (12).

Для низких сверхкритических скоростей ($1,1 < Fr < 1,2$) при расчете по гиперболической модели максимальные значения амплитуды и область ее минимальных значений такие же, как и при расчете по модели из [9]. Результаты численных расчетов по гиперболическим моделям (13) и (6) согласуются с экспериментальными данными и результатами расчета по модели (12) для всех частей профиля волны, кроме подветренного цуга волн.

Проведенное сравнение показывает, что достаточно простая гиперболическая модель адекватно отражает все особенности генерации нестационарных волн. Для расчета по гиперболической модели требуется существенно меньше времени, чем при расчетах методом предиктор-корректор и с использованием обращения треугольной матрицы для негиперболических моделей [9].

2. Численный расчет нестационарных течений по наклонной плоскости. Из экспериментов и природных наблюдений известно, что в открытом канале с постоянным углом наклона равномерное течение не всегда устойчиво. В достаточно длинных каналах с углом наклона, превышающим критическое значение, равномерное течение преобразуется в волновое. На некотором расстоянии от начала канала развиваются мелкие волны. На начальном участке течения амплитуды возмущений невелики, а поверхность жидкости гладкая. Однако по мере распространения вниз по потоку волны нарастают вплоть до формирования развитых боров. На достаточном удалении от начала канала наблюдается близкое к периодическому течение, состоящее из боров и следующих за ними плавных участков. Развившиеся волны получили название катящихся волн. Аналогичное явление наблюдается в гравитационных течениях над наклонным дном [12].

В экспериментах [12] зафиксировано развитие возмущений на границе раздела двух жидкостей разной плотности при достаточно крутом наклоне дна, обеспечивающем сверхкритическое движение нижнего слоя. Волновые возмущения движутся вдоль наклонной плоскости со скоростью, немного превышающей среднюю скорость потока. Они нарастают по амплитуде и наконец обрушиваются, вовлекая окружающую жидкость в нижний слой и порождая вблизи границы раздела интенсивное вихревое движение. Развитие волнового процесса в двухслойной системе напоминает генерацию катящихся волн в сверхкритических потоках в открытых каналах, но процесс вовлечения жидкости из верхнего слоя может оказать существенное влияние на конечную стадию формирования квазипериодического течения. В данной работе этот эффект не учитывается, поэтому для моделирования двухслойных течений используются те же уравнения, что и для однослойных течений, при этом ускорение свободного падения заменяется редуцированным ускорением g^* . При анализе неустойчивости в двухслойных течениях можно применить критерий, выведенный в подп. 1.2 для гиперболической модели с дисперсией (5).

Результаты численного расчета по модели (6) при $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $Fr = 3$ (т. е. для значений числа Фруда, больших критического) приведены на рис. 3, где показано развитие возмущений в наклонном канале вплоть до формирования развитых катящихся волн. Для численного решения системы (6) использовался метод Годунова, основанный на задаче о распаде произвольного разрыва с учетом кратной контактной характеристики $dx/dt = u$.

При задании начальных периодических синусоидальных возмущений неустойчивого равномерного течения с числом Фруда $Fr = u_0/\sqrt{g^*h_0} = 3$ вида $h_0(1 + \varepsilon_n \sin(\omega x))$ ($\varepsilon_n \approx 10^{-2}$), таких что в расчетной области укладывается достаточное количество периодов (пять периодов на рис. 3), развитие волн быстро достигает нелинейной стадии. Периодическое возмущение при $t = 0$ показано на рис. 3,а. На начальной стадии развития волн амплитуды нарастают, но профили волн остаются гладкими, хотя и теряют

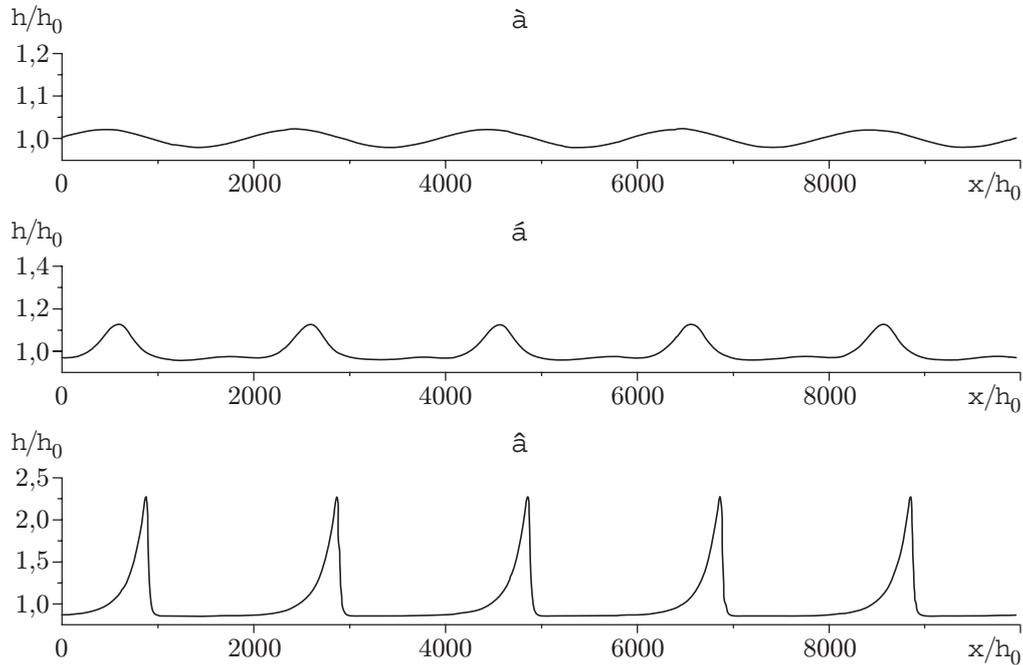


Рис. 3. Эволюция периодических волн (расчет по модели (6)):
 а — $t = 0$; б — $t = 12,72$; в — $t = 70,71$

симметричность (рис. 3,б). При дальнейшем развитии волн амплитуды продолжают увеличиваться, профили волн становятся круче и формируются участки резкого повышения уровня (боры). В классических уравнениях мелкой воды ($\alpha = 0$) бор моделируется движущимся разрывом. При больших значениях дисперсионного параметра α бор сглаживается. При достаточно больших временах рост амплитуд прекращается и устанавливается квазипериодический режим. Катящиеся волны состоят из гладких участков, разделенных борами (рис. 3,в).

На рис. 4 приведен профиль развитой волны при $Fr = 3$, $\beta = 2$ для различных значений дисперсионного параметра. В случае $\alpha = 0$ передний фронт волны представляется разрывом, ширина которого стремится к нулю при увеличении числа расчетных точек. При увеличении параметра α передний фронт волны сглаживается. Гладкий участок волны меняется незначительно в широком диапазоне параметров.

На рис. 5 представлены результаты численного расчета по модели (6) эволюции пакета катящихся волн, развившихся из малых возмущений равномерного потока на левой границе канала ($Fr = 5$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$). Развитие катящихся волн прекращается на некотором расстоянии от входного участка канала (слева), и формируется близкое к периодическому течение. Влияние дисперсионного параметра α на структуру катящихся волн проявляется в относительно узкой области (на участке резкого подъема уровня), поэтому качественно волновая картина аналогична случаю $\alpha = 0$ (ср. [11, рис. 3.4]).

Заключение. Рассмотренная модель пригодна для решения ряда задач. В случае ровного дна она подтверждает правомерность гиперболической аппроксимации при моделировании передних фронтов возмущений и содержит решение, описывающее распространение солитонов в диапазоне скоростей $\sqrt{bh_0} < D < \sqrt{(1 + \alpha)bh_0}$ по покоящейся жидкости глубины h_0 . Модель применима для описания волн, генерируемых движущимся по дну локальным препятствием. При этом получаемая фазовая картина волн (уединенная волна, распространяющаяся вверх по потоку, удлиненная область понижения волны и хвостовой

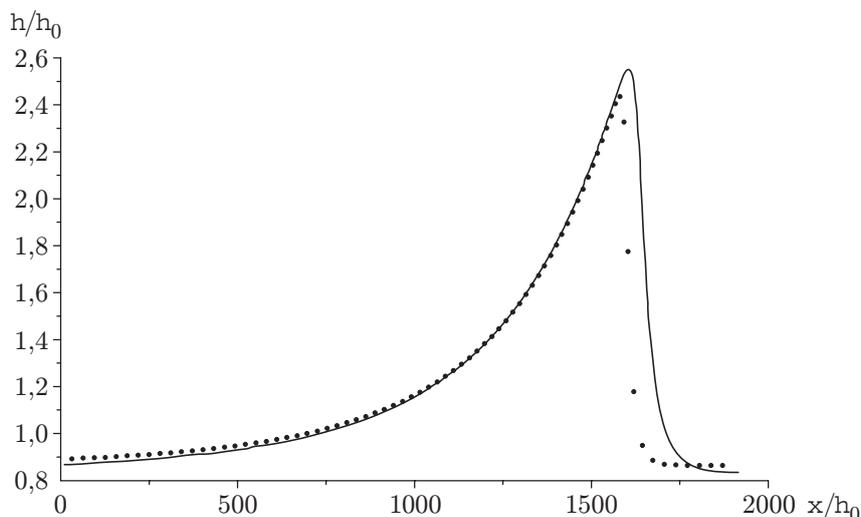


Рис. 4. Профили волн, рассчитанные по модели (6):
 точки — $\alpha = 0$; кривая — $\alpha = 35$

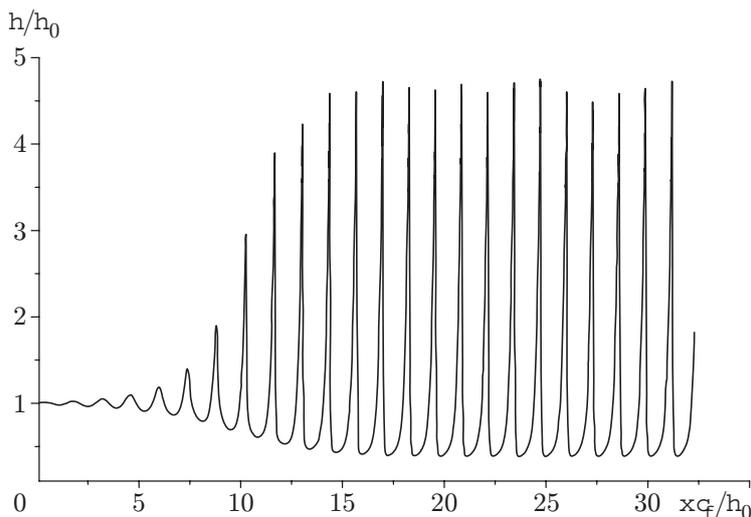


Рис. 5. Эволюция катящихся волн (расчет по модели (6))

цуг волн на подветренной стороне препятствия) согласуется с экспериментальными данными и расчетами по негиперболическим моделям [9]. При использовании гиперболической модели в результате численного анализа развития неустойчивости в нестационарном течении с наклонным дном обнаружен выход на режим, близкий к периодическому. Изучена роль дисперсионного параметра α , который обеспечивает скорость распространения возмущений, превышающую скорость волн. При достаточно больших значениях α передний фронт волны становится гладким. В предложенной модели сочетается эффективная аппроксимация с экономичностью расчета, так как используется явная схема, включающая только соседние точки.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Dressler R. F.** Mathematical solution of the problem of roll waves in inclined open channels // *Communs Pure Appl. Math.* 1949. V. 2. P. 140–194.

2. **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
3. **Jeffreys Н.** The flow of water in an inclined channel of rectangular section // Philos. Mag. Ser. 6. 1925. V. 49. P. 793–807.
4. **Ponce V. M., Simons D. B.** Shallow wave propagation in open channel flow // J. Hydraul. Division. 1977. V. 103, N 12. P. 1461–1476.
5. **Brock R. R.** Development of roll-wave trains in open channels // J. Hydraul. Division. 1969. V. 95, N HY4. P. 1401–1427.
6. **Needham D. J., Merkin J. H.** On roll waves down an open inclined channel // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1981. V. 394. P. 259–278.
7. **Kranenburg С.** On the evolution of roll waves // J. Fluid Mech. 1992. V. 245. P. 249–261.
8. **Yu J., Kevorkian J.** Nonlinear evolution of small disturbances into roll waves in an inclined open channel // J. Fluid Mech. 1992. V. 243. P. 257–295.
9. **Lee S.-J., Yates G. T., Vu T. Y.** Experiments and analyses of upstream-advancing solitary waves generated by moving disturbances // J. Fluid Mech. 1989. V. 199. P. 569–593.
10. **Serre F.** Contribution a l'etude des ecoulements permanents et variables dans les canaux // La Houille Blanche. 1953. Juin — Juill. P. 374–388.
11. **Ляпидевский В. Ю., Тешуков В. М.** Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
12. **Alavian V.** Behavior of density currents on an incline // J. Hydraul. Engng. 1986. V. 112, N 1. P. 27–42.

*Поступила в редакцию 14/III 2003 г.,
в окончательном варианте — 22/IV 2003 г.*
