

размерные давления остаются ограниченными и стремятся к нулю вместе со скоростью проникания  $V$ .

Из вышеприведенных соотношений несложно получить формулу для скорости жидкости за фронтом ударной волны  $u'$  в момент  $\tau_*$ :

$$u'_* = \sqrt{2/(n+1)} c_0^{1/2} V^{1/2} (1 + O(\sqrt{M})).$$

Следовательно, даже при малых скоростях проникания  $V$  скорость  $u'_*$  может быть достаточно высокой.

Формула (3.9) показывает, что при  $\tau < \tau_*$  кинетическая энергия твердого тела частично переходит в упругую энергию сжатой жидкости и накапливается в ней. В момент  $\tau_*$  свободная поверхность жидкости деформируется, образуется встречное течение. Упругая энергия сжатой жидкости переходит в кинетическую энергию течения. Если считать функцию  $b(\tau)$  известной, то задача (3.3) эквивалентна задаче о сверхзвуковом обтекании тонкого крыла с острыми кромками [7], когда число Маха задачи равно двум. Используя метод, предложенный в [7], можно показать, что при  $\tau > \tau_*$  с увеличением  $\tau$  давление уменьшается в каждой точке пятна контакта.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Shiffman M., Spencer D. C. The force of impact on a cone striking a water surface (vertical entry).— Comm. Pure Appl. Math., 1951, vol. 379, N 4.
2. Moran J. P., Kerney K. P. On the small-perturbation theory of water-exit and entry.— In: Developments in mechanics, Vol. 2. Oxford: Pergamon Press, 1963.
3. Pukhnachov V. V., Korobkin A. A. Initial asymptotics in problem of blunt body entrance into liquid.— In: 3rd Intern. Conf. on Numerical Ship Hydrodynamics, Paris, 1981.
4. Кочин Н. Е., Кибель П. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963.
5. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
6. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972.
7. Красильщикова Е. А. Влияние вихревой пелены при установившемся движении крыла.— ДАН СССР, 1947, т. 58, № 6.
8. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1977.
9. Березин О. А., Гриб Л. А. Нерегулярное отражение плоской ударной волны в воде от свободной поверхности.— ПМТФ, 1960, № 2.

Поступила 29/IX 1983 г.

УДК 532.528 : 532.58.33

#### УНИВЕРСАЛЬНЫЕ, НЕ ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ФОРМЫ КАВИТАТОРА, СООТНОШЕНИЯ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ КАВИТАЦИИ

А. Г. НЕТРОВ, П. Б. СОТИНА

(Москва)

Рассматриваются плоская и осесимметричная задачи о кавитационном обтекании произвольного тела потоком идеальной невесомой жидкости при наличии источника на теле или в потоке. Найдены универсальные, т. е. не зависящие от формы тела, асимптотические (по числу кавитации) соотношения между силой сопротивления, длиной и шириной каверны, числом кавитации и мощностью источника.

В [1] доказано, что если из тела подавать струю жидкости против потока, то при безотрывном обтекании его возникает сила тяги, а при обтекании по схеме Кирхгофа указан случай, когда сопротивление падает в 2 раза по сравнению с сопротивлением тела без вдува, но с тем же асимптотическим поведением каверны. В [2] показано, что замена струйки источником дает хорошее приближение как для силовых характеристик, так и для определения формы свободных линий тока. Вместе с тем моделирование источником струи, вытекающей из тела, существенно упрощает исследование задачи.

В [3] на основании точного решения плоской задачи о кавитационном обтекании клина с источником проанализирован закон снижения сопротивления и получения тяги в зависимости от мощности источника и угла раствора клина.

Для осесимметричных задач единственная до настоящего времени теория, которая позволяла для малых чисел кавитации получать математически обоснованные формулы,— это асимптотическая теория тонкого тела. По этой теории в главном приближении  $|\ln \sigma| \gg 1$  задача сводится к решению обыкновенного дифференциального уравне-

ния. В следующем приближении  $\sigma \ll 1$  уравнение оказывается интегрируемым [4, 5], и решение его пока не найдено.

В [6] представлены численные решения для обтекания конусов по схеме Рябушинского. Подмечены два универсальных соотношения, не зависящие от угла конуса, связывающие силу сопротивления, число кавитации и удлинение каверны, и для них подобраны аппроксимационные формулы.

В настоящей работе сформулирован вариационный принцип для кавитационных обтеканий тел при наличии гидродинамических особенностей. При помощи этого принципа найден конкретный вид универсальных соотношений как для плоских, так и для осесимметричных течений с источником. В плоском случае доказано, что эти соотношения для произвольных тел являются асимптотически точными.

**1. Вариационный принцип.** Рассмотрим поверхность или контур  $\partial\Omega$ , обтекаемый стационарным потоком идеальной несжимаемой жидкости. Скорость и давление на бесконечности равны  $v_\infty$  и  $p_\infty$ . В потоке могут быть точечные особенности, например источники. Требуется найти общий вид функционала  $U$ , вариация которого при малом изменении границы  $\partial\Omega$  была бы связана с работой сил давления на виртуальном перемещении границы соотношением

$$(1.1) \quad \delta U = \int_{\partial\Omega} (p - p_K) \delta n dS,$$

где  $\delta n$  — перемещение варьируемой поверхности  $\partial\Omega$  по нормали, внешней к телу;  $p$  — давление жидкости на границе  $\partial\Omega$ , которое определяется из интеграла Бернулли;  $p_K$  — постоянное давление.

При отсутствии особенностей такой функционал был найден еще Рябушинским [7] и выражается через кинетическую энергию жидкости. При наличии особенностей в потоке кинетическая энергия жидкости представляется расходящимся интегралом. Поэтому необходима регуляризация, которую можно провести, следуя [8, 9]. В результате получим

$$(1.2) \quad U = \int_V (p_0 - p_K) d\tau - \int_\Omega \frac{\rho}{2} (v - v_0)^2 d\tau,$$

где  $V$  — область внутри поверхности  $\partial V = \partial\Omega$ ;  $\Omega$  — область вне  $\partial V$ ;  $v$  — скорость жидкости, обтекающей поверхность  $\partial V$  при наличии особенностей;  $v_0$  и  $p_0$  — скорость и давление потенциального потока с особенностями при отсутствии поверхности  $\partial V$ ;  $p_K$  — постоянное давление на границе каверны.

Формулы (1.1), (1.2) позволяют дать вариационную формулировку задачи обтекания кавитатора по схеме Рябушинского в потоке с произвольными особенностями.

**Т е о р е м а.** Кавитационное течение, равномерное на бесконечности, с произвольными точечными особенностями в потоке экстремизирует величину  $U$  в том смысле, что  $\delta U = 0$  при любых вариациях свободной поверхности, на которой давление жидкости  $p_K$  постоянно.

При отсутствии особенностей в потоке  $v_0 = v_\infty$ ,  $p_0 = p_\infty$  аналогичная теорема сформулирована Рябушинским [7] и является основой для доказательства теорем существования кавитационных течений как в плоском, так и в пространственном случае. Эти доказательства можно распространить и на кавитационные течения с особенностями в потоке.

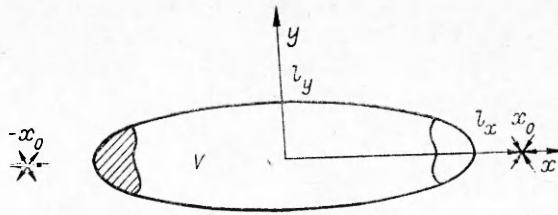
Рассмотрим симметричное относительно оси  $x$  кавитационное течение по схеме Рябушинского. В точках  $x = -x_0$  и  $x = x_0$  расположены источник и сток потенциальности  $q$  (фиг. 1). Для этого случая функционал  $U$  можно представить в следующем виде (вывод этого соотношения дается ниже):

$$(1.3) \quad U = -\frac{\rho}{2} v_\infty^2 M - 2\rho v_\infty q \Phi(x_0) - \rho q^2 \Phi_0(x_0, x_0) + (p_\infty - p_K) V,$$

$$M = \int_\Omega \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS,$$

где  $M$  — присоединенная масса тела  $V$ . Функции  $\Phi(x)$  и  $\Phi_0(x_0, x)$ , гармонические по переменным  $x$  в области  $\Omega$ , стремятся к нулю на бесконечности и на границе тела  $\partial\Omega$  удовлетворяют условиям

$$(1.4) \quad \partial\Phi/\partial n = -\partial x/\partial n, \quad \partial\Phi_0/\partial n = -\partial\varphi_0/\partial n,$$



Ф и г. 1

где  $\varphi_0$  — потенциал источника и стока, соответственно для плоской и осесимметричной задач имеющий следующий вид:

$$(1.5) \quad \varphi_0 = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_+}{r_-}, \quad \varphi_0 = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{r_-} - \frac{1}{r_+} \right),$$

$$r_+ = [(x + x_0)^2 + y^2]^{1/2}, \quad r_- = [(x - x_0)^2 + y^2]^{1/2}.$$

Из граничных условий (1.4) вытекает, что  $\Phi$  — потенциал обтекания тела  $V$ , движущегося с единичной скоростью, а  $\Phi_0$  выражается через функцию Грина.

*Вывод формулы (1.3).* Если подставить выражение для  $p_0$  из интеграла Бернулли в формулу (1.2), то получим

$$(1.6) \quad U = - \int_{\Omega} \frac{\rho}{2} (v - v_0)^2 d\tau - \int_V \frac{\rho}{2} v_0^2 d\tau - \left( p_{\infty} - p_{\infty} - \frac{\rho}{2} v_{\infty}^2 \right) V.$$

Скорости  $v$  и  $v_0$  линейно зависят от величин  $v_{\infty}$  и  $q$  и представляются в виде

$$(1.7) \quad v - v_0 = \text{grad}(v_{\infty}\Phi(x) + q\Phi_0(x_0, x)), \quad v_0 = \text{grad}(v_{\infty}x + q\Phi_0).$$

Подставляя выражения (1.7) в (1.6) и перейдя по теореме Остроградского — Гаусса к интегралам по границе тела  $\partial V$ , получим

$$(1.8) \quad U = - \frac{\rho}{2} v_{\infty}^2 M + (p_{\infty} - p_R) V - \rho v_{\infty} q I_1 - \rho q^2 I_2,$$

$$I_1 = - \frac{1}{2} \int_{\partial V} \left( \Phi \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} + \Phi_0 \frac{\partial \Phi}{\partial n} - x \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} - \Phi_0 \frac{\partial x}{\partial n} \right) dS,$$

$$I_2 = - \frac{1}{2} \int_{\partial V} \left( \Phi_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} - \Phi_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} \right) dS.$$

Из формулы Грина для гармонических функций и граничных условий (1.4) следует

$$\int_{\partial \Omega} \Phi \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} dS - \int_{\partial \Omega} \Phi_0 \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS, \quad \int_{\partial V} x \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} dS - \int_{\partial V} \Phi_0 \frac{\partial x}{\partial n} dS,$$

$$I_1 = - \int_{\partial V} \left( \Phi \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} - \Phi_0 \frac{\partial x}{\partial n} \right) dS = \int_{\partial V} \left( \Phi \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} - \Phi_0 \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) dS.$$

В области  $\Omega$  функция  $\Phi$  — гармоническая, а  $\Phi_0$  — гармоническая всюду, кроме точек  $-x_0, x_0$ . Применяя теорему Грина к области с выколотыми шарами малого радиуса  $R$  и переходя к пределу при  $R \rightarrow 0$ , получим

$$(1.9) \quad I_1 = 2\Phi(x_0).$$

Аналогично, пользуясь граничными условиями (1.4) и теоремой Грина, получим

$$(1.10) \quad I_2 = \frac{1}{2} \int_{\partial V} \left( \Phi_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} - \Phi_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} \right) dS = \Phi_0(x_0, x_0).$$

Подставляя формулы (1.9) и (1.10) в (1.8), найдем (1.3), что и требовалось доказать.

**2. Вариационный метод решения задачи об обтекании кавитатора в присутствии источника.** В [10] был предложен вариационный метод расчета кавитационных течений. Для малых чисел кавитации он позволяет получать асимптотически точные формулы как для плоских, так и для осесимметричных задач. Его можно распространить и для кавитационных течений с гидродинамическими особенностями.

Рассмотрим симметричное кавитационное течение с источником и стоком в точках  $-x_0, x_0$  (см. фиг. 1). Для этой схемы применимо вариационное уравнение (1.1), где  $U$  вычисляется по формуле (1.3). Следуя [10], введем двухпараметрическое семейство поверхностей  $\partial V$ . В качестве параметров выберем  $l_x$  и  $l_y$  (полуудлина и полуширина каверны, см. фиг. 1). Тогда  $U(l_x, l_y)$  определяется как функция двух параметров. В соответствии с вариационным уравнением (1.1) получим

$$(2.1) \quad F = \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial l_x}, \quad \frac{\partial U}{\partial l_y} = 0,$$

где  $F$  — сила, действующая на кавитатор со стороны жидкости.

На источник действует сила, равная произведению  $\rho q$  на скорость  $v'$ , обусловленную всеми причинами, кроме самого источника; поэтому

$$(2.2) \quad F_{\Pi} = - \rho q v_{\infty} \left( \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} + 1 \right) - \rho q^2 \left( \frac{\partial \Phi_0(x_0, x)}{\partial x} + v_x \right), \quad x = x_0,$$

где  $v_{\text{н}}$  — скорость от источника единичной мощности на расстоянии  $2x_0$ . В силу симметрии функции  $\Phi_0(x_0, x)$  частные производные по первому и второму аргументам в точке  $x_0$  равны.

Из формул (2.1), (2.2) получим суммарную силу, действующую на тело с источником  $X = F + F_{\text{н}}$ . В предельном случае, когда источник находится на кавитаторе  $x_0 \rightarrow l_x$ , найдем

$$(2.3) \quad X = -\frac{\rho}{4} v_{\infty}^2 \frac{\partial M}{\partial l_x} - \rho v_{\infty} q \frac{\partial \Phi}{\partial l_x} + \frac{1}{2} (p_{\infty} - p_{\text{к}}) \frac{\partial V}{\partial l_x} - \frac{\rho q^2}{2} \left( \frac{\partial \Phi_0}{\partial l_x} + \frac{\partial \Phi_0(x_0, x_0)}{\partial x_0} + v_{\text{н}} \right).$$

Вспользуемся тем, что число кавитации  $\sigma \ll 1$ , и оценим по порядку величины члены, входящие в формулу (2.3). Для оценок в плоской задаче можно выбрать семейство эллипсов, тогда

$$(2.4) \quad M = \pi l_y^2, \quad V = \pi l_x l_y, \quad \Phi(x_0) = \frac{l_y}{l_x - l_y} \left( x_0 - \sqrt{x_0^2 - l_x^2 + l_y^2} \right), \\ \Phi_0(x_0, x_0) \approx \frac{1}{2\pi} \left( \ln \frac{R}{x_0 - l_x} + \frac{3}{2} \frac{x_0 - l_x}{R} + O(x_0 - l_x)^2 \right), \quad \bar{R} = l_y^2/l_x,$$

где выражение для  $\Phi_0(x_0, x_0)$  берется из известного решения задачи об источнике вблизи круга радиуса  $R$ . Из формул (2.3), (2.4) в пределе  $x_0 \rightarrow l_x$  следует

$$(2.5) \quad c_* = \frac{X}{\frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2 \pi l_y} = \frac{1}{2} \sigma - 2Q, \quad Q = \frac{q}{\pi v_{\infty} l_y};$$

$$(2.6) \quad \sigma = 2\chi (1 + Q)^2, \quad \chi = \frac{v_{\text{к}}^2 - v_{\infty}^2}{v_{\infty}^2}, \quad \chi = \frac{l_y}{l_x}.$$

Ниже из точного решения кавитационной задачи будет получено, что величина  $Q$  ограничена сверху  $Q \leq K\sigma$ , где постоянная  $K$  зависит только от формы кавитатора (для пластинки, например, точная нижняя граница составляет  $K = 1/6$ ). Поэтому в главном приближении  $\sigma \ll 1$  будем иметь  $\sigma = 2\chi$ .

Отсюда также следует, что при вычислении суммарной силы и степени удлинения каверны по формулам (2.1)–(2.3) в функционале  $U$  не нужно учитывать квадратичное по  $q$  слагаемое:

$$(2.7) \quad U_0 = -\frac{\rho}{2} v_{\infty}^2 M + (p_{\infty} - p_{\text{к}}) V - 2\rho v_{\infty} q \Phi(x_0), \\ X = \frac{1}{2} \frac{\partial U_0}{\partial l_x}, \quad \frac{\partial U_0}{\partial l_y} = 0.$$

Ниже будет доказано, что для семейства эллипсов в плоской задаче формулы (2.7) являются асимптотически точными по малому числу кавитации и не зависят от формы кавитатора.

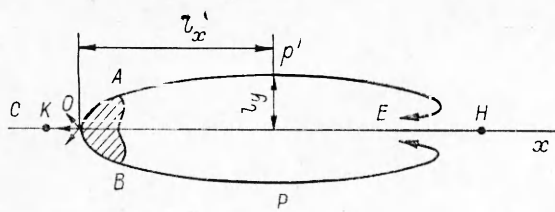
Представляется целесообразным применить формулы (2.7) для расчета осесимметричных кавитационных течений, используя семейство эллипсоидов.

Для присоединенной массы  $M$  эллипсоида и потенциала обтекания  $\Phi$  известны [11] следующие формулы:

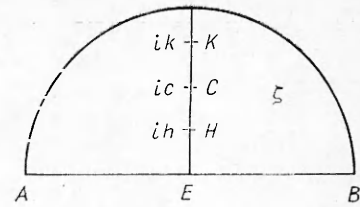
$$(2.8) \quad M = Vm(\chi), \quad \Phi = l_x f\left(\frac{x_0}{l_x}, \chi\right), \quad m = -1 + (1 - \chi^{-2})(A(\chi) - \chi^{-2})^{-1}, \\ f(\xi, \chi) = (A(\chi) - \chi^{-2})^{-1} \left( \frac{\xi}{\sqrt{2(1 - \chi^2)^{1/2}}} \ln \frac{\xi + (1 - \chi^2)^{1/2}}{\xi - (1 - \chi^2)^{1/2}} - 1 \right), \\ A(\chi) = (1 - \chi^2)^{-1/2} \ln(\chi^{-1} + \sqrt{\chi^{-2} - 1}), \quad V = \frac{4\pi}{3} l_x l_y^2, \quad \chi = l_y/l_x.$$

Когда источник находится на поверхности тела  $x_0 = l_x$ , справедливы соотношения

$$(2.9) \quad l_x \partial M / \partial l_x = V(m - \chi m'), \quad l_y \partial M / \partial l_y = V(2m + \chi m'), \\ f(1, \chi) = -m(\chi), \quad \partial \Phi / \partial l_y = -m', \quad \partial \Phi / \partial l_x = -1 - m + \chi m', \\ m' = dm/d\chi.$$



Ф и г. 2



Ф и г. 3

Подставляя формулы (2.8) в (2.7), при помощи формул (2.9) получим

$$(2.10) \quad c_* = \frac{X}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2 \pi l_y^2} = \chi m' - 2Q (1 - m + \chi m'),$$

$$\sigma = m + \frac{1}{2} \chi m' - \frac{3}{2} Q \chi m', \quad Q = \frac{q}{\pi \rho v_\infty^2 l_y^2}.$$

При  $Q = 0$  эти формулы совпадают с найденными ранее в [10], этим же методом хорошо аппроксимируют численные решения.

Асимптотический вид зависимостей (2.10) при малом числе кавитации нетрудно получить при помощи формул (2.8)

$$(2.11) \quad c_* = 2\chi^2 \left( \ln \frac{2}{\chi} - \frac{3}{2} \right) - 2Q, \quad \sigma = 2\chi^2 \left( \ln \frac{2}{\chi} - \frac{5}{4} \right).$$

При  $Q = 0$ ,  $\sigma \ll 1$  главная асимптотика этих формул согласуется с асимптотикой Гарабедяна [7].

**3. Получение асимптотических формул из точного решения.** Докажем, что формулы (2.6), полученные из вариационного принципа, являются асимптотически точными. Для этого выпишем систему уравнений (найденных известным методом [12]), дающую полное решение задачи о кавитационном обтекании произвольного симметричного контура с находящимся на нем источником по схеме Эфроса. На фиг. 2, 3 изображены плоскость течения  $z$  и вспомогательная плоскость  $\zeta$ . Производные комплексного потенциала  $W$  по переменным  $z$  и  $\zeta$  имеют вид

$$(3.1) \quad \frac{1}{v_R} \frac{dW}{dz} = \frac{(\zeta + i)(\zeta - ih)(\zeta h - i)(\zeta - ik)(\zeta k - i) e^{F(\zeta)}}{(\zeta - i)(\zeta + ih)(\zeta h + i)(\zeta + ik)(\zeta k + i)},$$

$$F(\zeta) = iA_1 \zeta - \frac{1}{3} iA_3 \zeta^3 - \dots,$$

$$\frac{dW}{d\zeta} = N v_R \frac{(\zeta^2 - 1)(\zeta^2 + h^2)(h^2 \zeta^2 + 1)(\zeta^2 + k^2)(h^2 \zeta^2 + 1)}{\zeta (\zeta^2 + c^2)^2 (c^2 \zeta^2 + 1)^2 (\zeta^2 + 1)},$$

где  $ik$  и  $ih$  — координаты образов критических точек внутри потока;  $ic$  — координата образа бесконечно удаленной точки потока на комплексной плоскости  $\zeta$  (см. фиг. 3). При  $k = 1$  формулы (3.1) совпадают с известными формулами [12] для обтекания криволинейной дуги по схеме Эфроса.

Коэффициенты  $A_n$  определяют форму контура. К уравнениям (3.1) следует добавить еще условие Вилла

$$\operatorname{Re} \left[ i \frac{d}{d\zeta} \ln \frac{dW}{v_R dz} \right] = 0, \quad \zeta = \pm 1,$$

необходимое, чтобы кривизна свободной поверхности в точках  $A$  и  $B$  была конечной, а также условие

$$(3.2) \quad \operatorname{res} \left[ \frac{dz}{d\zeta}; \zeta = ic \right] = 0,$$

означающее, что функция  $z(\zeta)$  после обхода вокруг точки  $z = ic$  возвращается к первоначальному значению.

Мощность источника  $q$  и расход в струйке  $\delta$  определяются из формул

$$(3.3) \quad q = \pi \operatorname{Re} \left( \operatorname{res} \left[ \frac{dW}{d\zeta}; \zeta = i \right] \right) = N v_R \pi \frac{(h^2 - 1)^2 (k^2 - 1)^2}{(c^2 - 1)^4},$$

$$\delta = -\pi \operatorname{res} \left[ \frac{dW}{d\zeta}; \zeta = 0 \right] = N v_R \pi \frac{h^2 k^2}{c^4}.$$

сло кавитации  $\sigma$  связано с параметрами задачи  $c, h, k, A_n$  соотношением

$$(3.4) \quad \left| \frac{dW(ic)}{v_{\infty} dz} \right| = (\sigma + 1)^{-1/2} = \left| \frac{(c+1)(c-h)(ch-1)(c-k)(ck-1)e^{-A_1 c - \frac{A_2}{3} c^3}}{(c-1)(c+h)(ch+1)(c+k)(ck+1)} \right|.$$

Предел  $\sigma \rightarrow 0$  соответствует схеме Кирхгофа, точки  $H$  и  $E$  стремятся в этом случае к бесконечно удаленной точке  $C$ . На плоскости  $\zeta$  это соответствует тому, что числа  $c$  и  $h$  стремятся к нулю. Поэтому можно полагать, что при  $\sigma \ll 1$  параметр  $c \ll 1$ . Выберем  $c$  в качестве независимого малого параметра и будем искать зависимости  $h(c), \sigma(c)$  в виде разложений по этому параметру

$$(3.5) \quad h = h_1 c + h_2 c^2 + \dots, \quad \sigma = \sigma_1 c + \sigma_2 c^2 + \dots$$

Используя формулы (3.1), получим

$$(3.6) \quad \frac{dz}{d\zeta} = \frac{N(\zeta^2 - 1)(\zeta + ih)^2(\zeta h + i)^2(\zeta + ik)^2(\zeta k + i)^2}{\zeta(\zeta + ic)^2(\zeta - ic)^2(\zeta + i)^2(c^2\zeta^2 + 1)^2 e^{F'}}.$$

В точке  $\zeta = ic$  функция  $dz/d\zeta$  имеет полюс второго порядка, и вычет в этой точке равен производной от множителя при  $(\zeta - ic)^{-2}$ . Отсюда условие (3.2) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{2\zeta}{\zeta^2 - 1} + \frac{2}{\zeta + ih} + \frac{2h}{h\zeta + i} + \frac{2}{\zeta + ik} + \frac{2k}{\zeta k + i} - F'(\zeta) - \\ - \frac{1}{\zeta} - \frac{2}{\zeta + ic} - \frac{4c^2\zeta}{c^2\zeta^2 + 1} - \frac{2}{\zeta + i} = 0, \quad \zeta = ic. \end{aligned}$$

Подставляя в это уравнение первое разложение (3.5) и приравнивая коэффициенты при степенях  $c^{-1}$  и  $c^0$ , получим

$$(3.7) \quad h_1 = 0, \quad h_2 = a = k + 1/k - 1 + A_1/2.$$

Подставляя в (3.4) найденное разложение для  $h(c)$  и учитывая члены порядка  $c$ , получим разложение  $\sigma(c)$ :

$$(3.8) \quad 1 - (1/2)\sigma + \dots = 1 + (-A_1 + 2 - 2a - 2/k + 2k)c + \dots, \quad \sigma = 8ac.$$

Представляет интерес также вычисление длины  $2l_x$  и ширины  $2l_y$  каверны. Для этого на свободной струе определим точку  $P$ , в которой скорость жидкости параллельна оси  $x$ . Расстояние от точки  $P$  до пластинки по горизонтали назовем  $l_x$ , а удаление этой точки от оси симметрии  $l_y$  (см. фиг. 2). Координаты точки  $P$  на плоскости  $\zeta$  можно определить из условия  $\text{Im} dW/dz = 0$ . На комплексной плоскости  $\zeta$  эта точка определяется действительным числом  $t$ , которое стремится к нулю при  $\sigma \rightarrow 0$ . Поэтому ищем  $t$  в виде разложения  $t = t_1 c + t_2 c^2 + \dots$

Учитывая главные члены разложения по степеням  $c$  в формуле (3.1), найдем

$$\frac{1}{v_{\infty}} \frac{dW}{dz} = 1 + \left( 2 \frac{t_1}{i} - 2 \frac{ih_2}{t_1} - 2 \frac{t_1}{ik} - 2 \frac{t_1 k}{i} + i A_1 t_1 \right) c.$$

Из условия, что мнимая часть этого выражения равна нулю, получим

$$(3.9) \quad t = c + \dots$$

Полудлину  $l_x$  и полуширину  $l_y$  каверны при малых  $\sigma$  можно определить из уравнения

$$(3.10) \quad l_x - il_y = \int_1^c \frac{dz}{dt} dt,$$

где интеграл берется по действительной оси от подынтегральной функции (3.6), которую можно представить в виде

$$(3.11) \quad \frac{dz}{dt} = \frac{N\Phi(t, c)}{t(t^2 + c^2)^2},$$

$$\Phi = \frac{(t^2 - 1)(t + ih)^2(th + i)^2(t + ik)^2(tk + i)}{(t + i)^2(t^2 c^2 + 1)^2 e^{F(t)}},$$

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 t + \Phi_2 t^2 + \Phi_3 t^3 + r(c, t)t^4,$$

$$\Phi_0 = h^2 k^2, \quad \Phi_1 = -2k^2 h i + \dots, \quad \Phi_2 = -k^2 + \dots, \quad \Phi_3 = 2ik^2 a + \dots,$$

где точками обозначены малые более высокого порядка. Коэффициент остатка  $r(c, t)$  — непрерывная в замкнутой области  $0 \leq t \leq 1, 0 \leq c \leq c_0$  функция и, следовательно, ограниченная.

Подставляя разложение (3.11) в (3.10), получим

$$(3.12) \quad l_x = N \int_1^c \frac{(k^2 k^2 - k^2 t^2)^2 dt}{t(t^2 + c^2)^2} \approx \frac{Nk^2}{4c^2},$$

$$l_y = N \int_1^c \frac{(2k^2 ht - 2k^2 at^3) dt}{t(t^2 + c^2)^2} \approx \frac{Nk^2 a}{c}, \quad \chi = \frac{l_y}{l_x} = 4ac.$$

Асимптотическую формулу для суммарной силы сопротивления можно получить из общей формулы [13], найденной из закона изменения импульса

$$(3.13) \quad \frac{X}{(1/2) \rho v_\infty^2} = \frac{2(\delta - q)}{v_\infty} + \frac{2\delta v_K}{v_\infty^2}.$$

Для расхода источника  $q$  и расхода обратной струи  $\delta$  из формул (3.3), (3.12) с точностью до главных членов имеем

$$(3.14) \quad Q = \frac{q}{\pi v_\infty l_y} = \frac{(k^2 - 1)^2 c}{k^2 a}, \quad \frac{\delta}{\pi v_\infty l_y} = ac.$$

Откуда и получим формулу для силы (2.6).

**4. Анализ асимптотических формул.** Выберем в качестве определяющих параметров скорость на бесконечности  $v_\infty$ , расход источника  $q$ , моделирующего струю, направленную вперед по потоку, число кавитации  $\sigma$ , мидель каверны  $l_y$ . По этим данным все остальные величины (сила сопротивления  $X$ , длина каверны  $l_x$ , расход обратной струи Эфроса  $\delta$ ) могут быть вычислены. Введя безразмерные величины, отнесенные к миделю:

$$(4.1) \quad c_* = \frac{X}{\frac{\pi}{2} \rho v_\infty^2 l_y}, \quad \tilde{q} = \frac{q}{\pi v_\infty l_y}, \quad \tilde{\delta} = \frac{\delta}{\pi v_\infty l_y}, \quad \chi = \frac{l_y}{l_x}$$

и выражая параметр  $c$  через  $\sigma$  по формулам (3.8), получим асимптотические формулы (3.12)–(3.14) в следующем компактном виде:

$$(4.2) \quad c_* = \frac{\sigma}{2} - 2Q, \quad \chi = \frac{\sigma}{2}, \quad \tilde{\delta} = \frac{\sigma}{8}, \quad Q = \frac{(k^2 - 1)^2 \sigma}{(8k^2 a^2)}, \quad a = k + \frac{1}{k} - 1 + \frac{A_1}{2} \neq 0.$$

Первые три выражения универсальны для кавитаторов произвольной формы (за исключением вырожденного случая  $a = 0$ ). Важным свойством каверны является то, что степень удлинения каверны  $1/\chi$  не зависит от мощности источника.

Форма кавитатора влияет лишь на изменение величины  $Q$ . Когда величина  $Q$  достигает наибольшего значения  $Q_{\max}$ , коэффициент сопротивления  $c_*$  будет наименьшим. Анализ формулы для  $Q$  (4.2) показывает, что для кавитаторов с параметром  $-2 < A_1 \leq 2$  (в том числе для пластины  $A_1 = 0$ ) наибольшее значение источника определяется выражением  $Q_{\max} = (\sigma/8)(1 - (2 - A_1)^2/16)^{-1}$ . Для кавитаторов с параметром  $A_1 > 2$  имеем  $Q_{\max} = \sigma/8$ ,  $k = 0$ . Для последнего случая  $A_1 \leq -2$  величина  $a$  обращается в нуль при некотором значении  $0 \leq k \leq 1$ , каверны сжимаются в миделе, а сила сопротивления становится тягой.

Параметр  $k$  определяет положение критической точки перед кавитатором, в которой скорость обращается в нуль. При  $k = 1$ , когда источник отсутствует, критическая точка находится на кавитаторе  $Q = 0$ ,  $c_* = \sigma/2$ . При уменьшении  $k$  критическая точка отодвигается от кавитатора и при  $k \rightarrow 0$  уходит на бесконечность. В этом предельном случае  $Q = \sigma/8$ ,  $c_* = \sigma/4$ , т. е. сопротивление падает в 2 раза. Этот пример соответствует случаю, отмеченному в [1].

Из формул (4.2) можно получить асимптотический закон расширения каверны при  $\sigma = 0$ , если записать формулу для силы сопротивления в размерном виде

$$(4.3) \quad X = \frac{\pi}{2} \rho v_\infty^2 \frac{l_y^2}{l_x} - \rho v_\infty q.$$

При  $q = 0$  получим параболический закон расширения каверны, найденный С. А. Чаплыгиным (при  $\sigma \rightarrow 0$  эллиптическая каверна переходит в параболическую с параметром параболы  $l_y^2/l_\infty$ ). Общий вид формулы (4.3) получен в [13].

Следует отметить, что закон Чаплыгина не является универсальным. Существуют кавитаторы специальной формы, для которых  $A_1 = -2$ , имеющие совершенно другое асимптотическое поведение свободных линий тока (они сближаются на бесконечности). Без источника сопротивление таких кавитаторов равно нулю, а при наличии источника на кавитатор действует сила тяги. Форму кавитаторов в вырожденном случае не-



трудно построить, исходя из точной формулы (3.6), подбирая  $A_1$  из уравнения  $a = 0$ , а остальные коэффициенты произвольно.

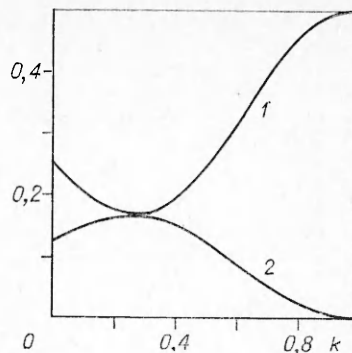
На фиг. 4 кривые 1, 2 представляют зависимости  $c_*/\sigma$ ,  $Q/\sigma$  от  $k$  для пластинки ( $A_1 = 0$ ). При  $k = 0$  мощность источника  $Q = \sigma/8$ , а коэффициент сопротивления равен  $\sigma/4$ , т. е. в 2 раза меньше, чем при  $Q = 0$ . В пределе  $\sigma \rightarrow 0$  это соответствует случаю, отмеченному в [1].

Как видно из фиг. 4, наименьшее сопротивление при фиксированном числе  $c_* = \sigma/6$  получается при  $Q = \sigma/6$ .

Интересно отметить, что при  $Q > \sigma/8$  одному и тому же значению мощности источника соответствуют два режима обтекания. Кроме того, при всех допустимых мощностях источника величина  $\chi$  с точностью до малых порядка  $\sigma$  не меняется.

При отсутствии источника из формул (4.2) получаются результаты  $A_1 \neq -2$ ,  $c_* = \sigma/2$ ,  $\chi = \sigma/2$ ,  $\delta = \sigma/8$ , относящиеся к обтеканию произвольных контуров по классической схеме Эфроса.

Доказано, что вид зависимостей (2.11) аналогичен соответствующим соотношениям в плоской задаче. В обоих случаях коэффициент сопротивления, отнесенный к миделю, убывает с увеличением  $\sigma$ , а степень удлинения каверны  $1/\chi$  не зависит от мощности источника  $q$ . Существенной особенностью осесимметричной задачи является то, что для практических расчетов вместе с асимптотически главным членом порядка  $\chi^2$  и  $\chi$  следует учитывать и член порядка  $\chi^2$  даже для очень малых чисел кавитации.



Ф и г. 4

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. П. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1973.
2. Сотина Н. Б., Фоминных В. В. О моделировании источником тонкой струйки, вытекающей из тела. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 5.
3. Сотина Н. Б., Фоминных В. В. Кавитационное обтекание клина при наличии источника на клине или в потоке. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 6.
4. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972.
5. Нестерук П. Г. О форме тонкой осесимметричной нестационарной каверны. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 4.
6. Гузевский Л. Г. Численный анализ кавитационных течений. Препринт № 40—79. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1980.
7. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. М.: Мир, 1964.
8. Воинов В. В., Воинов О. В., Петров А. Г. Гидродинамическое взаимодействие тел в идеальной несжимаемой жидкости и их движение в неоднородных потоках. — ПММ. 1973, т. 37, вып. 4.
9. Петров А. Г. Вариационный принцип Гамильтона. — ПММ, 1983, т. 47, вып. 1.
10. Петров А. Г. Прямой вариационный метод расчета плоских и осесимметричных кавитационных течений. — ДАН СССР, 1981, № 6.
11. Ламб Г. Гидродинамика. М.: ГИТТЛ, 1947.
12. Гуревич М. П. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979.
13. Сотина Н. Б. Асимптотический закон расширения струй при наличии в потоке гидродинамических особенностей. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 3.

Поступила 5/VII 1983 г.

УДК 533.7.011.72

#### НЕУСТОЙЧИВОСТЬ МГД-УДАРНОГО ФРОНТА В НЕЛИНЕЙНОМ РЕЖИМЕ

Н. Н. КОТИНА, А. А. РУМЯНЦЕВ

(Ленинград)

Рассмотрена эволюция случайных искривлений фронта МГД-ударной волны, распространяющейся в направлении убывания плотности проводящей среды. Выяснено, что магнитное поле, поперечное по отношению к этому направлению, приводит к усилению эффекта неустойчивости.

Первоначально синусоидальные искривления фронта с течением времени приобретают более сложную форму, которая соответствует синусоидальному ускоренному движению продвинутых элементов фронта, их укрупнению. Это приводит, по-видимому, к явлению опрокидывания и турбулизации фронта.

Исследование устойчивости фронта ударной волны относительно его искривления проводится уже в течение примерно двух десятилетий (см., например, [1]). Было выяснено, что фронт ударной волны в так называемом эволюционном режиме распространения в однородной среде устойчив и восстанавливает свою неискаженную случайны-