

УДК 532.526; 537.86.187

## ГЕНЕРАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН НА ВЯЗКОУПРУГОМ ПОКРЫТИИ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

В. П. Реутов, Г. В. Рыбушкина

Институт прикладной физики РАН, 603600 Нижний Новгород

Исследуется самовозбуждение периодических нелинейных волн на вязкоупругом покрытии, взаимодействующем с турбулентным пограничным слоем несжимаемого потока. Отклик течения на многоволновое возмущение поверхности покрытия определяется в приближении малых наклонов. Получена система уравнений для комплексных амплитуд кратных гармоник медленной (дивергентной) волны, возникающей в результате развития гидроупругой неустойчивости на покрытии с большими потерями. Показано, что трехволновые резонансные связи между гармониками приводят к развитию взрывной неустойчивости, которая стабилизируется благодаря деформации среднего (по периоду волны) сдвигового течения в пограничном слое. Определяются условия мягкого и жесткого возбуждения дивергентных волн. На основе проведенных расчетов объясняются качественные особенности возбуждения дивергентных волн в известных экспериментах.

**Введение.** Задача о самовозбуждении (генерации) волн на упругих покрытиях, взаимодействующих с потоками жидкости, представляет интерес в связи с поиском путей снижения гидродинамического сопротивления (см., например, [1–3]). Это явление также играет существенную роль в биомеханических течениях жидкости [4]. В рамках линейной теории обнаружено два основных типа гидроупругих (индуцированных потоком) неустойчивостей — флаттер бегущей волны и дивергенция [2]. Квазистатическая неустойчивость (дивергенция) появляется при обтекании покрытия однородным потенциальным потоком, тогда как возникновение флаттера обусловлено необратимой передачей энергии от сдвигового течения в пограничном слое к поверхности. Вязкоупругое сильнодиссипативное покрытие и идеальное (упругое) покрытие были использованы в [5, 6] для наблюдения соответственно дивергенции и флаттера в течении с турбулентным пограничным слоем (ТПС).

В работе [5] дивергенция идентифицировалась как квазистатическая неустойчивость с фазовой скоростью волн, составляющей менее 5% скорости основного потока. В этом случае при переходе скорости потока через критическое значение на поверхности сразу возникали несинусоидальные двумерные волны большой амплитуды с шиповидными подъемами поверхности. Выяснение механизма генерации таких волн является целью настоящей работы.

Численное моделирование генерации гидроупругих волн на ограниченной упругой пластине проводилось в [7], при этом использовалась модель потенциального течения без пограничного слоя. В [8] получено уравнение Ландау для монохроматических волн на упругом и вязкоупругом покрытиях, взаимодействующих с ТПС. Нелинейные процессы конкуренции “быстрых” волн, возбуждаемых при развитии неустойчивости типа флаттера, изучались в [9]. Благодаря малой фазовой скорости медленных (дивергентных) волн возникают условия для синхронизации фаз кратных гармоник, что может привести к образованию нелинейных волн. В данной работе квазилинейная теория взаимодействия ТПС

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 97-01-00183; 96-15-96593).

с волнистой поверхностью, построенная в [10], дополняется учетом резонансных взаимодействий кратных гармоник периодической дивергентной волны. Как и в [8–10], основным малым параметром является наклон поверхности. Такая слабонелинейная теория позволяет изучать генерацию гидроупругих волн только при достаточно малых надкритичностях. Однако ее построение представляется полезным для понимания роли ТПС в механизмах ограничения гидроупругой неустойчивости.

**1. Волновая дивергенция на вязкоупругом покрытии в ТПС (линейная задача).** Рассмотрим взаимодействие ТПС с волновым прогибом поверхности упругого покрытия. Внешняя область ТПС срачивается с однородным потенциальным течением без градиента давления. Однослойное покрытие из несжимаемого вязкоупругого материала с плотностью  $\rho_s$  и модулем сдвига  $G$  имеет толщину  $d$ . Скорость распространения плоских поперечных волн в этом материале  $c_t = \sqrt{G/\rho_s}$ . Период прогиба поверхности  $\lambda$  считается малым по сравнению с масштабом расширения ТПС. Как показано в [8, 9], взаимодействие такого прогиба с ТПС можно считать локальным.

Для описания периодических двумерных возмущений на поверхности покрытия воспользуемся модельным уравнением, представляющим собой модификацию уравнения Кармана теории слабого изгиба тонких пластин:

$$\hat{K}w - \left[ \frac{s}{\lambda} \int_0^\lambda (w_{x'})^2 dx' \right] w_{xx} = -p, \quad (1)$$

где  $w(x, t)$  — смещение уровня поверхности в направлении оси  $y$  в точке  $x$  в момент времени  $t$ ;  $p(x, t)$  — возмущение поверхностного давления;  $\hat{K}$  — линейный интегродифференциальный оператор;  $s = Gd/(1 - \mu)$  ( $\mu \approx 0,5$  — коэффициент Пуассона для несжимаемого вязкоупругого слоя).

Имеющиеся экспериментальные данные по возбуждению гидроупругих волн в ТПС относятся к однослойным покрытиям. В этом случае спектральное представление оператора  $\hat{K}$  (для возмущений вида  $\exp(ikx - i\omega t)$ ) можно записать следующим образом [11]:

$$\hat{K}(\Omega, \alpha) = \frac{\rho_s c_t^2}{d} [\bar{m}(\alpha^2 \bar{c}_0^2 - \Omega^2) - i\gamma_t b_0 \Omega], \quad (2)$$

где  $\alpha = kd$  — безразмерное волновое число;  $\Omega = \omega d/c_t$  — безразмерная циклическая частота;  $\gamma_t$  — безразмерный параметр потерь;  $\bar{m}$ ,  $\bar{c}_0$  и  $b_0$  зависят только от  $\alpha$ . В рассматриваемом далее случае сильнодиссипативного покрытия формула (2) получается строго (в асимптотическом смысле) через разложение по параметру  $1/(\alpha\gamma_t) \ll 1$ .

При  $\bar{m} = \text{const}$ ,  $b_0 = \text{const}$  и соответствующем определении  $\bar{c}_0$  выражение (2) описывает комплексную упругость тонкой пластины (или мембраны) с безразмерной поверхностной плотностью  $\bar{m}$  и коэффициентом потерь  $\gamma_t b_0$ . В области волновых чисел  $\alpha \geq 1$  (характерных для экспериментов [5]) изменения  $\bar{m}$  и  $b_0$  относительно невелики, а их быстрое увеличение начинается при малых  $\alpha$  (имеется сингулярный рост при  $\alpha \rightarrow 0$ ).

Таким образом, в линейной задаче при определении  $\hat{K}$  в форме (2) уравнение (1) описывает деформацию поверхности реального вязкоупругого слоя. При переходе к нелинейному уравнению (1) вязкоупругий слой рассматривается как тонкая свободная пластина толщины  $d$ , параметры которой видоизменяются в соответствии с (2).

Возмущения давления в виде бегущей синусоидальной волны, возникающие в ТПС при прогибе поверхности, в линейном приближении найдены в [11] на основе модели течения с вихревой вязкостью (см. также [8]). При этом была предложена квазипотенциальная аппроксимация для комплексной упругости потока, которая при  $\alpha > 0$  сводится

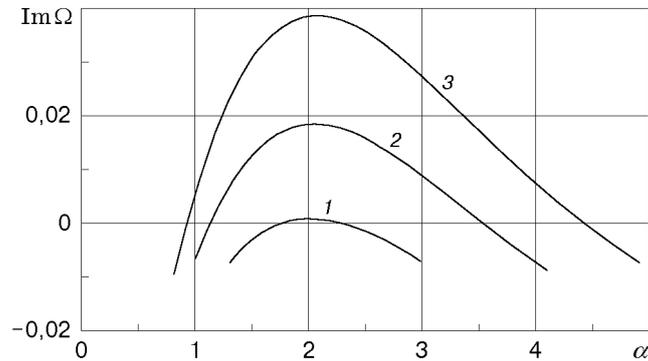


Рис. 1

к соотношению между комплексными амплитудами давления  $p_{\omega k}$  и прогиба  $w_{\omega k}$  вида

$$p_{\omega k} \simeq k\rho_0 U^2 \left[ - \left( \frac{\omega}{kU} - f \right)^2 + \delta Z^{(0)} \right] w_{\omega k}, \quad (3)$$

где  $f < 1$  — параметр редукции статической упругости потенциального потока;  $\delta Z^{(0)}$  — резистивная составляющая упругости;  $U$  — скорость однородного течения. В [11] дана аналитическая аппроксимация зависимости  $f$  от безразмерного волнового числа  $\bar{k} = k\delta_*$  и локального числа Рейнольдса  $Re = U\delta_*/\nu_0$  ( $\delta_*$  — толщина вытеснения ТПС,  $\nu_0$  — кинематическая вязкость жидкости).

Пренебрегая в (1) нелинейным членом и используя (2) и (3), получим дисперсионное соотношение для гидроупругих волн в виде [11]

$$\alpha \bar{m} (\Omega^2 - \alpha^2 \bar{c}_0^2) + q(\Omega - \alpha f V)^2 + i\gamma_t b_0 \alpha \Omega - qV^2 \alpha^2 \delta Z^{(0)} = 0, \quad (4)$$

где  $V = U/c_t$  — безразмерная скорость потока;  $q = \rho_0/\rho_s$ . Для вязкоупругого покрытия  $\gamma_t b_0 = 6 \div 600$ , что позволяет искать решение (4) в виде разложения по  $\varepsilon_\alpha = 1/(\gamma_t b_0) \ll 1$  [11]. С точностью до членов порядка  $\varepsilon_\alpha$  для частоты слабозатухающих (или слабонарастающих) волн получим выражение

$$\Omega = i\alpha \varepsilon_\alpha (qf^2 V^2 - \alpha \bar{m} \bar{c}_0^2 - qV^2 \delta Z^{(0)}), \quad (5)$$

где  $\delta Z_0^{(0)} = \delta Z^{(0)}|_{\Omega=0}$ . Заметим, что в уравнения (4) и (5) входят неявно параметры  $Re_t = c_t \delta_*/\nu_0$  и  $d/\delta_*$  [11].

На рис. 1 представлена зависимость инкремента неустойчивости  $Im \Omega$  от  $\alpha$  при различных скоростях потока (кривые 1–3 соответствуют  $V = 5,6; 6,1; 6,6$ ). Здесь и далее приводятся результаты расчетов для системы поток — покрытие с параметрами  $q = 1$ ,  $\gamma_t = 15$ ,  $Re_t = 350$ ,  $d/\delta_* = 0,78$  (см. [11]). Аналогичные результаты получены при других значениях  $\gamma_t$ ,  $Re_t$  и  $d/\delta_*$ .

Как следует из рис. 1, неустойчивость возникает после того, как скорость потока переходит через критическое значение  $V_c \simeq 5,6$ . На границе возникновения неустойчивости возбуждается волна с волновым числом  $\alpha_c \simeq 2$  (длина волны  $\lambda_c = 2\pi d/\alpha_c$ ). Фазовая скорость нарастающих волн мала по сравнению со скоростью потока, что позволяет считать данную неустойчивость волновой дивергенцией [2].

Заметим, что резистивная составляющая отклика ТПС  $\delta Z^{(0)}$  оказывает слабое влияние на поведение кривых, представленных на рис. 1, а также на величину критической скорости потока  $V_c$ . Фактически неустойчивость возникает в результате превышения статической упругости потока над статической упругостью покрытия при произвольных потерях в покрытии. Такое поведение системы поток — покрытие является следствием

преобладания вклада диссипативной составляющей (член  $i\gamma_t b_0 \Omega$  в (2)) в динамическую упругость покрытия. В этом случае влияние реактивной и резистивной составляющих упругостей потока и покрытия на распространение волн оказывается противоположным для покрытий с малыми и большими потерями. В частности, действительная часть  $\delta Z^{(0)}$ , которая при малых потерях в покрытии определяет сдвиг частоты волн, в случае сильнодиссипативного покрытия дает вклад в затухание (усиление) волн. Очевидно, что аналогичные изменения должны происходить также с нелинейными упругостями потока и покрытия.

**2. Вывод замкнутой системы уравнений для амплитуд гармоник прогиба поверхности.** Для определения нелинейного отклика ТПС на волновой прогиб поверхности в [10] использовалось квазилинейное приближение, в рамках которого основное проявление нелинейности связано с деформацией среднего (по периоду волнистости) течения в ТПС. В рамках этого приближения в [8] получено уравнение Ландау. Как отмечалось в [10], вклад в нелинейный отклик второй гармоники гидродинамических полей мал при условии, что она либо отсутствует в прогибе поверхности, либо имеет порядок  $k\tilde{a} \ll 1$  по сравнению с первой гармоникой ( $k, \tilde{a}$  — характерные значения волнового числа и амплитуды отклонения поверхности). Однако это условие может нарушаться при наличии резонанса фазовых скоростей первой и второй гармоник. В случае дивергентных волн, фазовая скорость которых мала при  $\varepsilon_\alpha \ll 1$ , условия резонанса выполняются не только для второй, но и для высших кратных гармоник. Это может приводить к генерации дивергентных волн существенно несинусоидальной формы.

При выводе уравнения для амплитуд гармоник нелинейной волны необходимо в квазилинейной модели отклика ТПС учесть резонансное взаимодействие между гармониками. Как и в [8–10], воспользуемся приближением слабой нелинейности, считая наклон поверхности малым:  $k\tilde{a} \ll 1$ . Перейдем в (1) к безразмерным времени  $t_1 = ct/d$ , координате  $x_1 = x/d$  и подъему поверхности  $\bar{w} = w/d$ . В (1) положим  $p = p_{qr} + p_{nl}$ , где  $p_{qr}$  — квазипотенциальный линейный отклик течения на волновой прогиб поверхности, определяемый в спектральном представлении формулой (3);  $p_{nl}$  — нелинейная составляющая отклика.

Для того чтобы перейти от спектральных связей (2), (3) к пространственно-временным, используем формальную замену  $\Omega \rightarrow \hat{\Omega} = i\partial/\partial t_1$ ,  $\alpha \rightarrow \hat{\alpha} = -i\partial/\partial x_1$ . Сначала получим уравнение возбуждения кратных гармоник “нелинейной силой”  $p_{nl}$ , рассматривая ее как заданную функцию  $x_1$  и  $t_1$ . Для этого прогиб поверхности представим в виде набора гармоник

$$\bar{w}(x_1, t_1) = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(\varepsilon_{\alpha} t_1) e^{i\alpha x_1}, \quad (6)$$

где  $a_{\alpha}$  — нормированная комплексная амплитуда гармоники прогиба с волновым числом  $\alpha$ . Поскольку  $\bar{w}$  — действительная величина, выполняется условие  $a_{\alpha} = a_{-\alpha}^*$  (звездочка означает комплексное сопряжение). В случае кратных гармоник  $\alpha = n\alpha_1$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots$  — номер гармоники;  $\alpha_1$  — волновое число первой гармоники (длина нелинейной волны  $\lambda = 2\pi d/\alpha_1$ ).

Подставляя (6) в (1) и сохраняя члены порядка единицы, получим следующее уравнение возбуждения гармоник с  $\alpha > 0$ :

$$\frac{da_{\alpha}}{dt_1} = \gamma_{\alpha} a_{\alpha} - \varepsilon_{\alpha} \left[ \sum_{\beta > 0} K_{\alpha\beta}^{(1)} |a_{\beta}|^2 a_{\alpha} + \frac{2}{\rho_s c_t^2} (p_{nl})_{\alpha} \right], \quad (7)$$

где

$$\gamma_{\alpha} = \alpha \varepsilon_{\alpha} (qf^2 V^2 - \alpha \bar{m} \bar{c}_0^2 - qV^2 \delta Z_0^{(0)}), \quad (p_{nl})_{\alpha} = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} p_{nl} e^{-i\alpha x_1} dx_1 \Big|_{\hat{\Omega}=0}, \quad K_{\alpha\beta}^{(1)} = \frac{\alpha^2 \beta^2}{2(1-\mu)}.$$

Отметим, что в данном приближении нелинейные силы находятся без учета производных по  $t$  в уравнениях гидродинамики (квазистационарное обтекание). При переходе к (7) условие малых наклонов поверхности не использовалось в явном виде, однако оно присутствует неявно как одно из условий применимости теории слабого изгиба тонких пластин.

Квазилинейный отклик ТПС в случае многоволнового (мультигармонического) прогиба поверхности определялся в [9] на основе обобщения моногармонической квазилинейной теории [8]. Предложенная в [9] численная схема позволяет рассчитать разложение для гармоник поверхностного давления нулевой частоты, которое имеет вид

$$p_k = \left[ Z^{(0)}(\bar{k}) + \sum_{k_0 > 0} Z^{(1)}(\bar{k}, \bar{k}_0) |k_0 \tilde{a}_{k_0}|^2 \right] \tilde{a}_k, \quad (8)$$

где  $\tilde{a}_k = a_\alpha d$  — ненормированные комплексные амплитуды гармоник прогиба;  $Z^{(0)}$  — линейная комплексная упругость потока (совпадающая с полным значением коэффициента при  $w_{\omega k}$  в правой части (3));  $Z^{(1)}(\bar{k}, \bar{k}_0)$  — коэффициенты матрицы взаимных нелинейных упругостей потока для гармоник с волновыми числами  $\bar{k}$  и  $\bar{k}_0 = k_0 \delta_*$ . Отметим, что подобное (8) соотношение можно записать также для отклика покрытия, возбуждаемого внешним полем давления, при этом вместо  $Z^{(1)}$  в него войдут величины  $K_{\alpha\beta}^{(1)}$  из (7) (см. [9]).

Трехволновые резонансные связи между гармониками прогиба определяются членами второго порядка разложения  $p_{nl}$  по малым амплитудам гармоник. Их вычисление для ТПС с вихревой вязкостью связано со значительным усложнением изложенной в [9] численной процедуры. В то же время оценки для характерных параметров ТПС и дивергентных волн показывают, что глубина проникания осциллирующего (с периодом волнистости) течения в ТПС  $k^{-1}$  существенно превышает толщину буферной области ТПС  $y_b \simeq 30\nu_0/u_*$  ( $u_*$  — динамическая скорость ТПС), а также длину затухания возмущений завихренности, которая оценивается как  $\sqrt{\nu_b/(kU_b)}$  ( $\nu_b$  и  $U_b$  — значения эффективной вязкости и скорости течения при  $y = y_b$ ). Заметим, что слои совпадения фазовых скоростей гармоник дивергентной волны со скоростью потока находятся глубоко в вязком подслое.

Учитывая указанные особенности дивергентных волн, для расчета членов второго порядка разложения  $p_{nl}$  будем использовать модель потенциального течения с уменьшенной скоростью  $U \rightarrow f_1 U$  ( $f_1 < 1$  — коэффициент редукции скорости свободного течения). Положим  $f_1 = U_b/U \simeq 0,5$ , что согласуется с величиной близкого по смыслу коэффициента  $f$  в формуле (3). Система уравнений и граничных условий для возмущений потенциала  $\varphi$  и выражение для поверхностного давления, записанные с точностью до членов второго порядка, принимают вид

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} + \varphi_{yy} &= 0 \quad (y > 0), & f_1 U w_x - \varphi_y &= -\varphi_x w_x + w \varphi_{yy} \Big|_{y=0}, \\ p/\rho_0 &= -f_1 U (\varphi_x + w \varphi_{xy}) - (1/2)(\varphi_x)^2 - (1/2)(\varphi_y)^2 \Big|_{y=0}. \end{aligned} \quad (9)$$

В (9) подставим выражение (6) для  $w$ , записанное в исходных (ненормированных) переменных. Тогда с точностью до членов первого порядка для возмущений потенциала получим выражение

$$\varphi = - \sum_k \frac{ik f_1 U}{|k|} \tilde{a}_k e^{ikx - |k|y}.$$

Производя вычисления  $p$  с точностью до членов второго порядка, находим

$$p_k = \rho_0 f_1^2 U^2 \left( -|k| \tilde{a}_k + \sum_{k_0} S_{kk_0} \tilde{a}_{k_0} \tilde{a}_{k-k_0} \right), \quad (10)$$

где  $S_{kk_0} = (1/2)[-(|k_0| + |k|)|k - k_0| - |kk_0| + k^2 + k_0^2 - kk_0]$ . Составляя  $p_{nl}$  из вторых членов в разложениях (8) и (10) и переходя к безразмерным переменным, можно привести (7) к виду

$$\frac{da_\alpha}{dt_1} = \gamma_\alpha a_\alpha + \sum_{\beta} \sigma_{\alpha\beta} a_\beta a_{\alpha-\beta} - \sum_{\beta>0} T_{\alpha\beta} |a_\beta|^2 a_\alpha, \quad (11)$$

где  $T_{\alpha\beta} = \varepsilon_\alpha (K_{\alpha\beta}^{(1)} + qV^2 \alpha \beta^2 Z_{kk_0}^{(1)})$ ;  $\sigma_{\alpha\beta} = -(1/2) \varepsilon_\alpha q f_1^2 V^2 (d^2 S_{kk_0})$ ;  $k = \alpha/d$ ;  $k_0 = \beta/d$ .

Уравнения (11) для комплексных амплитуд гармоник известны в теории нелинейных волн как уравнения резонансного и несинхронного (энергетического) взаимодействия волн (см., например, [12]). Первый член в правой части определяет инкременты и линейные сдвиги частот гармоник, второй — резонансные связи между гармониками, третий — нелинейное затухание и нелинейные сдвиги частот гармоник.

Следует отметить, что деформация среднего течения в ТПС приводит к большим значениям коэффициентов  $Z_{kk_0}^{(1)}$  в разложении (8) (подробнее см. [9, 10]). Поэтому вклады членов второго и третьего порядка в уравнении (11) могут быть сравнимы при малых наклонах поверхности, при которых применимы разложения (8) и (10). Заметим, что подобная аномалия  $Z_{kk_0}^{(1)}$  отсутствует в случае чисто потенциального обтекания поверхности (ввиду отсутствия деформации среднего течения).

**3. Взрывная неустойчивость и жесткое возбуждение нелинейных дивергентных волн.** Процедура расчета коэффициентов  $Z^{(1)}$  разложения (8) для ТПС с вихревой вязкостью разработана в [9]. Проведенные на ее основе вычисления для типичных значений  $\bar{k}$  и  $\text{Re}$  показали, что действительные части  $Z^{(1)}$  всегда положительны. Таким образом, диссипативная кубичная нелинейность в (11) играет стабилизирующую роль.

Для выяснения роли “резонансных” членов в (11) представим соответствующую им сумму в виде

$$\sum_{\beta} \sigma_{\alpha\beta} a_\beta a_{\alpha-\beta} = \sum_{0<\beta<\alpha/2} \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} a_\beta a_{\alpha-\beta} + \sum_{\beta>\alpha} \sigma_{\alpha\beta}^{(2)} a_\beta a_{\beta-\alpha}^* + \sigma_\alpha^{(3)} a_{\alpha/2}^2, \quad (12)$$

где  $\sigma_{\alpha\beta}^{(1)} = \varepsilon_\alpha q f_1^2 V^2 \beta (\alpha - \beta)$ ,  $\sigma_{\alpha\beta}^{(2)} = \varepsilon_\alpha q f_1^2 V^2 \alpha (\beta - \alpha)$ ,  $\sigma_\alpha^{(3)} = (1/8) q \alpha^2 f_1^2 V^2$ ;  $\alpha = n\alpha_1$ ,  $\beta = m\alpha_1$  ( $n, m = 1, 2, 3, \dots, N$ ). В правой части (12) суммирование производится только по положительным волновым числам, исключены члены с повторяющимися комбинациями амплитуд (последнее слагаемое появляется только при четном  $n$ ).

Из приведенных выражений для  $\sigma_{\alpha\beta}^{(1)}$ ,  $\sigma_{\alpha\beta}^{(2)}$  и  $\sigma_\alpha^{(3)}$  следует, что эти величины действительны и положительны. Предположим, что амплитуды волн достаточно малы и кубическими членами в (11) можно пренебречь. Легко видеть, что система (11) с заменой (12) описывает так называемую взрывную неустойчивость волн [12–15], что выражается в наличии асимптотических решений вида  $a_\alpha \rightarrow C_\alpha / (t_{1\infty} - t_1)$  при  $t_1 \rightarrow t_{1\infty}$  ( $t_{1\infty} \sim C_\alpha / a_\alpha(0)$  — время “взрыва”,  $C_\alpha = \text{const}$ ). Взрывная неустойчивость изучалась в теории плазменных волн (см., например, [13]), где она связывалась в основном с трехволновыми взаимодействиями в средах, близких к консервативным (взаимодействием волн с разными знаками энергии). Примером взрывной неустойчивости в диссипативной среде может служить неустойчивость волновых триплетов в пограничном слое [14]. Взрывной рост волн за счет чисто диссипативных резонансных связей между ними был обнаружен для электромагнитных волн в волноводе с нелинейным током утечки [15].

Как отмечалось выше, диссипативный характер динамического отклика покрытия приводит к тому, что реактивные нелинейности типа упругости покрытия и упругости потока (определяемые коэффициентами  $K^{(1)}$  и  $\text{Re} Z^{(1)}$  соответственно) после перехода к

уравнениям связанных волн (11) преобразуются в диссипативные нелинейности (нелинейное затухание). “Квадратичная” часть отклика потока из реактивной также преобразуется в диссипативную. В конечном счете это приводит к взрывной неустойчивости.

Характерной особенностью взрывной неустойчивости является синхронизация фаз взаимодействующих волн при  $t_1 \rightarrow t_{1\infty}$  [12, 13]. Нетрудно видеть, что в случае кратных гармоник стремятся к нулю разности фаз  $\varphi_2 - 2\varphi_1$ ,  $\varphi_3 - \varphi_2 - \varphi_1$  и т. д. ( $\varphi_n = \arg a_n$ ,  $n$  — номер гармоники). При этом без ущерба общности можно считать, что  $\varphi_n \rightarrow 0$ . Таким образом, в случае гидроупругих волн взрывная неустойчивость должна приводить к формированию нелинейных волн с шиповидными подъемами поверхности. Дивергентные волны такого вида наблюдались в экспериментах на вязкоупругом покрытии [5]. Аналогичный процесс взрывного взаимодействия гармоник с формированием нелинейных электромагнитных волн наблюдался в волноводе с нелинейным током утечки [15].

Кубическое затухание стабилизирует взрывную неустойчивость и приводит к установлению стационарного режима с конечной амплитудой [12, 15]. Стабилизирующее действие оказывают также нелинейные сдвиги частот гармоник (вклад членов порядка  $\text{Im } Z^{(1)}$ ). В средах с взрывной неустойчивостью возможно жесткое возбуждение волн и связанное с ним явление гистерезиса.

Для изучения перехода от мягкого возбуждения волн к жесткому рассмотрим предельный случай вещественных  $\gamma_\alpha$  и  $T_{\alpha\beta}$ , когда в режиме синхронизации фаз  $a_\alpha$  являются действительными величинами. Пусть волновое число первой гармоники  $\alpha_1$  равно критическому волновому числу  $\alpha_c$  (см. рис. 1), скорость потока близка к критической  $V_c$  и вторая гармоника затухает ( $\gamma_2 < 0$ ). Предполагая, что  $|a_2| \ll |a_1|$ , для действительных  $a_{1,2}$  получим систему уравнений вида

$$\frac{da_1}{dt_1} = \sigma_{12}a_1a_2 - T_{11}a_1^3 + \gamma_1a_1, \quad \frac{da_2}{dt_1} = \sigma_2a_1^2 - T_{21}a_1^2a_2 - |\gamma_2|a_2. \quad (13)$$

В стационарном состоянии ( $d/dt_1 = 0$ ) из (13) находим

$$|a_1| = \left[ \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 4\gamma_1 T_{11} T_{21}}}{2T_{11} T_{21}} \right]^{1/2}, \quad (14)$$

где  $r = \sigma_{12}\sigma_2 - |\gamma_2|T_{11}$ . Согласно (14) мягкое возбуждение возникает при  $r < 0$ . В этом случае нелинейное затухание волны  $a_1$  и линейное затухание волны  $a_2$  подавляют взрывной рост. При выполнении условия  $r > 0$  в области  $\gamma_1 < 0$  реализуется жесткое возбуждение с гистерезисом зависимости стационарной амплитуды от надкритичности  $\gamma_1$ . Следует учитывать, что для “ненулевого” состояния равновесия (13), которое появляется при  $\gamma_1 = 0$  и  $r > 0$ , допущение  $|a_2| \ll |a_1|$  оправдано только в вырожденном случае малых  $r$ . Очевидно, что в отсутствие такого вырождения уже при  $\gamma_1 \rightarrow 0$  может возникать нелинейная волна, в которой сравнимую с  $a_1$  амплитуду имеет не только вторая, но и более высокие гармоники.

Для исследования возбуждения нелинейных волн без ограничений, использованных при выводе (13), проводилось численное решение системы уравнений (11). Уравнения (11) записывались для вещественных переменных  $\text{Re}(a_\alpha)$  и  $\text{Im}(a_\alpha)$  и интегрировались методом Рунге — Кутты для конечного числа гармоник  $N$ . Проверялось влияние выбора числа гармоник  $N$  на результаты расчетов. Вычисления проводились при значениях параметров, указанных в п. 1.

На рис. 2,а показана зависимость высоты подъема поверхности в нелинейной волне  $A = w_{\max} - w_{\min}$  от скорости потока  $V$  при совпадении волнового числа ее первой гармоники с критическим значением  $\alpha_1 = \alpha_c \approx 2$  (расчет проведен с  $N = 4$ ). На рис. 2,а цифрами I–III обозначены области с качественно различным поведением решений. В данном случае реализуется мягкий режим возбуждения, аналогичный полученному выше в

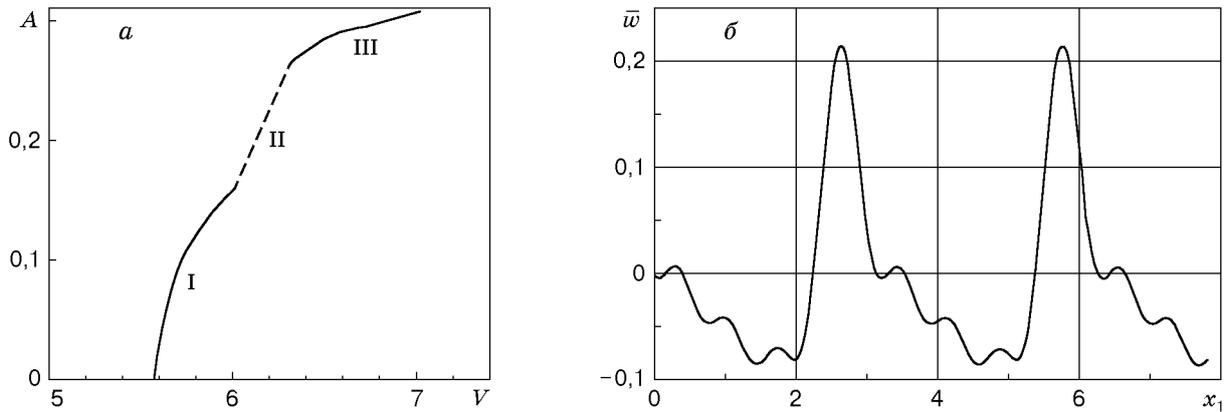


Рис. 2

рамках модели с двумя гармониками. При малых надкритичностях (область I) возбуждаемые волны близки к синусоидальным. В переходной области II наблюдается бурный рост кратных гармоник и периодические биения (стационарные волны отсутствуют). При дальнейшем росте скорости потока (в области III) формируется нелинейная волна, профиль которой приведен на рис. 2, б. Учитывая быстрый, скачкообразный рост амплитуды  $A$  (рис. 2, а), такое возбуждение нелинейных волн можно назвать псевдожестким.

В экспериментах [5] возбуждение волн происходило несколько иначе. Сразу после потери устойчивости возникали нелинейные дивергентные волны с большой высотой подъема поверхности ( $A \approx 0,45$ ). В работе [8] обращалось внимание на то, что их длина приблизительно в два раза превышала критическое значение  $\lambda_c$ , предсказываемое линейной теорией. В связи с этим с помощью системы уравнений (11) изучалось возбуждение нелинейных волн с длиной  $2\lambda_c$  ( $\alpha_1 = \alpha_c/2$ ).

На рис. 3, а показана зависимость  $A(V)$ , полученная при  $N = 8$ . При малых надкритичностях, когда амплитуда первой гармоники  $a_1$  мала по сравнению с амплитудой второй гармоники  $a_2$ , зависимость  $A(V)$  ведет себя так же, как в рассмотренном выше случае  $\alpha_1 = \alpha_c$ . Однако с ростом надкритичности при  $V \approx 6$  происходит скачок амплитуды и появляется гистерезис зависимости  $A(V)$ , что соответствует жесткому возбуждению. Нарастание во времени суммарной амплитуды  $\bar{A} = \sum_{\alpha} |a_{\alpha}|$  с обеих сторон от скачка показано на рис. 3, б (сплошная линия —  $V = 6,05$ , штриховая —  $V = 5,95$ ). На рис. 3, в приведен профиль нелинейной волны при  $V = 6,05$ . Из представленных данных следует, что мягкое возбуждение волны с длиной  $\lambda_c$  вызывает взрывной рост гармоник, в результате в потоке скачкообразно возникает нелинейная волна с длиной  $2\lambda_c$ . Заметим, что значение  $A \approx 0,45$  для этой волны согласуется с экспериментальными данными. Таким образом, основные качественные особенности возбуждения волн на вязкоупругом покрытии в ТПС являются следствием взрывного характера взаимодействия кратных гармоник нелинейной волны с периодом  $2\lambda_c$ .

Подстановка в коэффициенты уравнения (11)  $K_{\alpha\beta}^{(1)} = 0$  приводит к незначительному изменению результатов вычислений, представленных выше. Это означает, что при небольших надкритичностях основной вклад в насыщение неустойчивости дает гидродинамическая нелинейность, связанная с деформацией среднего течения в ТПС. Доминирующая роль гидродинамической нелинейности является следствием аномалии численных значений  $Z_{kk_0}^{(1)}$ .

Мягкого возбуждения волны с длиной  $\lambda_c$ , предшествующего скачкообразному возникновению нелинейной волны, в экспериментах не наблюдалось. Причиной этого могут быть

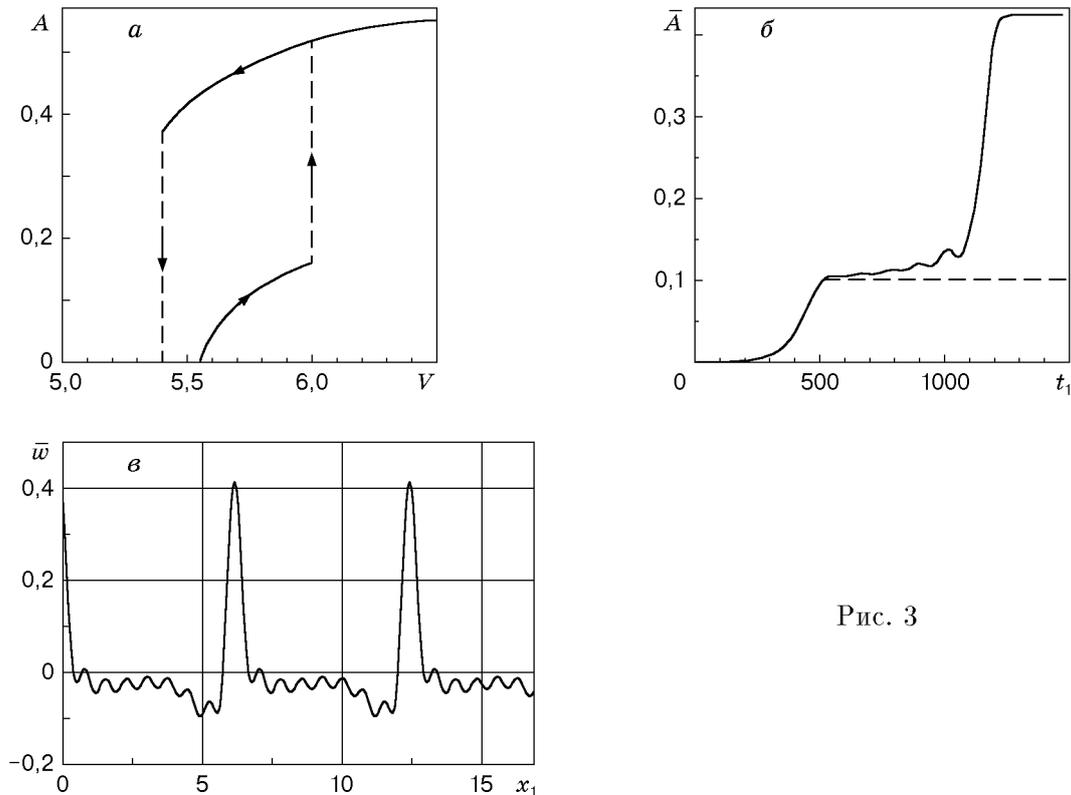


Рис. 3

крупномасштабные пульсации скорости потока в пограничном слое, которые способны вызвать сильно выраженную нестационарность волнового поля. Кроме того, как показали расчеты, интервал мягкого возбуждения на рис. 3, *a* уменьшается с увеличением параметра  $f_1$  (см. п. 2) и исчезает при  $f_1 = 0,71$ .

Теоретический профиль возбуждаемой волны (см. рис. 3, *в*) имеет более нелинейную форму (большее отношение периода волны к ширине пиков), чем в экспериментах, и в расчетах амплитуда нелинейной волны нарастает медленнее при увеличении  $V$ . Причиной расхождения теории и экспериментальных данных может быть, в частности, недостаточная точность квазипотенциального приближения, использованного при расчете коэффициентов резонансной связи между гармониками.

**Заключение.** В данной работе выяснен механизм возбуждения существенно нелинейных дивергентных волн на вязкоупругом покрытии в ТПС несжимаемого потока. В результате резонансного взаимодействия кратных гармоник, имеющих малые фазовые скорости, профиль волны становится существенно несинусоидальным уже при умеренно малых надкритичностях. При больших потерях в покрытии консервативные нелинейности типа упругости потока и покрытия в уравнениях связанных волн преобразуются в диссипативные нелинейности. Диссипативная резонансная связь между гармониками приводит к их взрывной неустойчивости. Основной причиной ограничения взрывного роста волн в данном случае является деформация профиля среднего (по периоду нелинейной волны) сдвигового течения в ТПС.

Синхронизация фаз кратных гармоник, связанная с развитием взрывной неустойчивости, определяет шиповидную форму волн смещения поверхности. С точки зрения общей теории взрывной неустойчивости следует отметить “неэволюционный” характер роста высоты волны при увеличении надкритичности, когда взрывное взаимодействие кратных гармоник приводит к жесткому возбуждению нелинейных волн либо стимулирует быстрый переход к волнам существенно несинусоидального вида (псевдожесткое возбуждение).

Ввиду принятия достаточно сильных упрощений рассмотренная задача, по существу, является модельной. Тем не менее проведенный анализ позволил объяснить основные особенности возбуждения дивергентных волн в экспериментах: скачкообразное возникновение нелинейных волн с характерной шиповидной формой смещения поверхности, а также возбуждение более длинных волн по сравнению с полученными в рамках линейной теории устойчивости.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Riley J. J., Gad-el-Hak M., Metcalfe R. W.** Compliant coatings // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1988. V. 20. P. 393–420.
2. **Carpenter P. W., Garrad A. D.** The hydrodynamic stability of flow over Kramer-type compliant surfaces. Pt 2. Flow induced surface instabilities // *J. Fluid Mech.* 1986. V. 170. P. 199–231.
3. **Semenov B. N., Semenova A. V.** Recent developments in interference analysis of compliant boundary action on near-wall turbulence // *Proc. of the Intern. symp. on sea water drag reduction.* Newport (USA), 1998. P. 189–195.
4. **Grotberg J. B.** Pulmonary flow and transport phenomena // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1994. V. 26. P. 529–571.
5. **Gad-el-Hak M., Blackwelder R. F., Riley J. J.** On the interaction of the compliant coatings with boundary layer flows // *J. Fluid Mech.* 1984. V. 140. P. 257–280.
6. **Gad-el-Hak M.** The response of elastic and visco-elastic surfaces to a turbulent boundary layer // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1986. V. 53. P. 206–212.
7. **Lucey A. D., Carpenter P. W.** A numerical simulation of the interaction of a compliant wall and inviscid flow // *J. Fluid Mech.* 1992. V. 234. P. 121–146.
8. **Реутов В. П., Рыбушкина Г. В.** О нелинейном развитии двумерной гидроупругой неустойчивости в турбулентном пограничном слое на упругом покрытии // *ПМТФ.* 2000. Т. 41, № 4. С. 69–80.
9. **Реутов В. П., Рыбушкина Г. В.** Квазилинейная теория генерации гидроупругих волн в турбулентном пограничном слое на упругом покрытии // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* В печати.
10. **Реутов В. П.** Нелинейные характеристики взаимодействия турбулентного пограничного слоя с волнистой поверхностью // *ПМТФ.* 1998. Т. 39, № 6. С. 72–84.
11. **Reutov V. P., Rybushkina G. V.** Hydroelastic instability threshold in a turbulent boundary layer over compliant coating // *Phys. Fluids.* 1998. V. 10, N 2. P. 417–425.
12. **Рабинович М. И., Трубецков Д. И.** Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
13. **Вильгельмссон Х., Вейланд Я.** Когерентное нелинейное взаимодействие волн в плазме / Пер. с англ. М.: Энергоатомиздат, 1981.
14. **Craik A. D. D.** Wave interactions and fluid flows. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985.
15. **Кияшко С. В., Рабинович М. И., Реутов В. П.** Взрывная неустойчивость и генерация солитонов в активной среде // *Журн. техн. физики.* 1972. Т. 42, № 12. С. 2458–2465.

*Поступила в редакцию 20/XII 1999 г.*