

УДК 681.3.08 + 519.2

ПРОГРАММНО-КОМБИНАТОРНЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ БЕЗОШИБОЧНОГО СЧИТЫВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ТОЧЕЧНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ*

А. Л. Резник, А. А. Соловьев, А. В. Торгов

*Институт автоматизации и электрометрии СО РАН,
630090, г. Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 1
E-mail: reznik@iae.nsk.su*

Предложен оригинальный подход к решению проблемных вероятностных задач, возникающих при изучении надёжности считывания случайных точечных структур. Его суть заключается в сочетании редко используемых в научной практике специализированных программно-аналитических и дискретно-комбинаторных методов исследования. Эффективность разработанного подхода продемонстрирована на примере решения конкретной проблемной задачи, относящейся к двухпороговому считыванию случайных точечных изображений.

Ключевые слова: вероятность безошибочного считывания, случайное бросание, компьютерно-аналитические выкладки, случайное разбиение интервала.

DOI: 10.15372/AUT20160203

Введение. В работах [1–3] изложены нестандартные методы решения проблемных вероятностных задач, возникающих при исследовании надёжности считывания случайных дискретных изображений, проводимого с использованием сканирующей апертуры с ограниченным числом пороговых уровней. Уникальность предложенного в них подхода заключается в том, что для нахождения заранее неизвестных аналитических зависимостей применяется редко встречающаяся в научной практике схема, когда предварительно разрабатывается математический аппарат для программно-аналитического расчёта максимально широкого набора частных решений задачи, а затем с использованием полученных результатов методами дискретно-комбинаторного анализа устанавливаются и строго доказываются общие аналитические закономерности. При практической реализации данного подхода удалось свести ряд проблемных вероятностных задач с непрерывным параметром к хотя и весьма сложным, но тем не менее поддающимся решению дискретным задачам. Далее представлен новый научный результат в виде обобщающей формулы, описывающей вероятность безошибочного считывания случайного точечного изображения, когда число пороговых уровней сканирующей апертуры равно двум.

Постановка задачи. Основная проблема, возникающая при изучении процесса многопорогового считывания случайных изображений (когда сканирующая апертура имеет k пороговых уровней), легко редуцируется к одномерной задаче, допускающей простую и ясную математическую постановку: «Требуется определить вероятность $P_{n,k}(\varepsilon)$ события, состоящего в том, что в результате случайного бросания n точек на интервал $(0, 1)$ не образуются ни одного подынтервала $\Omega_\varepsilon \subset (0, 1)$ длины ε , содержащего более k точек».

*Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00313), Президиума РАН (Программа № 5, проект № 224) и Сибирского отделения РАН (проект СО РАН — НАН Беларуси № 24/2015).

Несмотря на кажущуюся простоту задачи, её общее решение к настоящему времени известно лишь для $k = 1$ [4, 5]:

$$P_{n,1}(\varepsilon) = (1 - (n - 1)\varepsilon)^n, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1/(n - 1). \quad (1)$$

Это соотношение можно получить различными способами. Один из стандартных путей заключается в представлении вероятности $P_{n,1}(\varepsilon)$ в виде легко вычисляемого повторного интеграла [4]

$$P_{n,1}(\varepsilon) = n! \int_{(n-1)\varepsilon}^1 dx_n \left\{ \int_{(n-2)\varepsilon}^{x_n - \varepsilon} dx_{n-1} \cdots \left\{ \int_{2\varepsilon}^{x_4 - \varepsilon} dx_3 \left\{ \int_{\varepsilon}^{x_3 - \varepsilon} dx_2 \left\{ \int_0^{x_2 - \varepsilon} dx_1 \right\} \right\} \right\} \right\}.$$

К сожалению, при $k > 2$ вероятность $P_{n,k}(\varepsilon)$ не может быть представлена в таком же компактном виде, как формула (1), поскольку выражение $P_{n,k}(\varepsilon)$ перестаёт описываться единственным полиномом от ε степени n , а является набором полиномов, непрерывно состыкованных в нескольких узловых точках. В данной работе наши усилия будут целевым образом направлены на поиск решения поставленной выше редуцированной одномерной задачи для случая $k = 2$. Для этого нам удалось найти две обобщающие аналитические формулы, одна из которых описывает искомую вероятность $P_{n,2}(\varepsilon)$ на интервале $1/m < \varepsilon < 1/(m - 1)$ при чётных значениях $n = 2m$ [6]:

$$P_{2m,2}(\varepsilon) = \frac{1}{m + 1} C_{2m}^m (1 - (m - 1)\varepsilon)^{2m}, \quad (2)$$

а вторая задаёт вероятность $P_{n,2}(\varepsilon)$ на интервале $1/(m + 1) < \varepsilon < 1/m$ при нечётных значениях $n = 2m + 1$ [7]:

$$P_{2m+1,2}(\varepsilon) = C_{2m+1}^{m+1} (1 - m\varepsilon)^{m+1} (1 - (m - 1)\varepsilon)^m - 2C_{2m+1}^{m+2} (1 - m\varepsilon)^{m+2} (1 - (m - 1)\varepsilon)^{m-1} + C_{2m+1}^{m+3} (1 - m\varepsilon)^{m+3} (1 - (m - 1)\varepsilon)^{m-2}. \quad (3)$$

Заметим, что доказательство двух последних соотношений проходило в полном соответствии с вышеизложенной схемой, а именно предварительно разработанные программные системы для аналитических вычислений позволили рассчитать частные решения $P_{n,2}(\varepsilon)$ на всех интервалах изменения параметра ε при чётных ($n = 2m$) и нечётных ($n = 2m + 1$) значениях n вплоть до $n = 14$. Выполненные расчёты помогли установить и математически строго доказать обобщающие аналитические зависимости (2) и (3). При проведении доказательных выкладок важным моментом явилось прямое использование чисел Каталана, причём если при доказательстве формулы (2) нами применялась лишь классическая числовая последовательность Каталана, то для нахождения и доказательства формулы (3) возникла необходимость во введении нового понятия трёхмерных обобщённых чисел Каталана.

Цель предлагаемой работы — найти обобщающую аналитическую формулу, описывающую вероятность $P_{n,2}(\varepsilon)$ при $n = 2m$ на интервале $(1/m + 1) < \varepsilon < (1/m)$. Заметим, что трудоёмкость и сложность этой задачи, несмотря на абсолютную простоту её постановки, значительно превосходит те сложности, которые пришлось преодолевать при доказательстве внешне аналогичного соотношения (3). Так, при построении доказательства, которое в сжатой форме будет изложено далее, авторы в очередной раз столкнулись с необходимостью расширения ранее введённого понятия обобщённых чисел Каталана (на этот

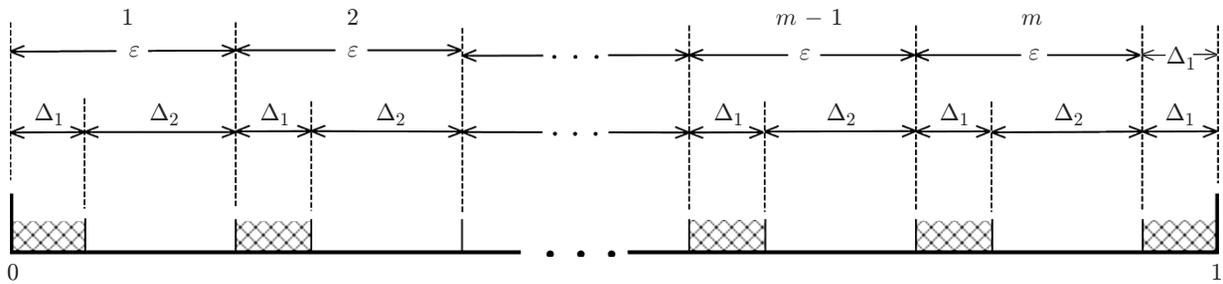


Рис. 1. Разбиение интервала $(0, 1)$ на подынтервалы Δ_1 и Δ_2

раз на четырёхмерный случай) и, естественно, с необходимостью отыскания их явного вида.

Итак, формулировка решаемой задачи следующая. Требуется доказать, что вероятность $P_{2m,2}(\varepsilon)$ события, состоящего в том, что в результате случайного бросания чётного числа $n = 2m$ точек на интервал $(0, 1)$ не образуется ни одного подынтервала $\Omega_\varepsilon \subset (0, 1)$ длины ε , содержащего более двух точек при условии $(1/m + 1) < \varepsilon < (1/m)$, описывается соотношением

$$\begin{aligned}
 P_{2m,2}(\varepsilon) = & C_{2m}^m (1 - (m-1)\varepsilon)^{2m} - C_{2m}^{m-1} (1 - (m-1)\varepsilon)^{2m} - \\
 & - C_{2m}^{m-2} (1 - m\varepsilon)^{m+2} (1 - (m-2)\varepsilon)^{m-2} + \\
 & + 2C_{2m}^{m-3} (1 - m\varepsilon)^{m+3} (1 - (m-2)\varepsilon)^{m-3} - C_{2m}^{m-4} (1 - m\varepsilon)^{m+4} (1 - (m-2)\varepsilon)^{m-4}. \quad (4)
 \end{aligned}$$

Решение задачи. Для того чтобы свести задачу с непрерывным параметром ε к дискретно-комбинаторной, будем использовать представленное на рис. 1 разбиение интервала $(0, 1)$ на строго чередующиеся между собой подынтервалы Δ_1 (на рисунке заштрихованы) длиной $(1 - m\varepsilon)$ и Δ_2 (не заштрихованы) длиной $(\varepsilon - \Delta_1) = ((m+1)\varepsilon - 1)$.

Определение. В контексте решаемой задачи будем называть успешным такое бросание $n = 2m$ точек на интервал $(0, 1)$, в результате которого не возникает ни одного подынтервала $\Omega_\varepsilon \subset (0, 1)$ длины ε , содержащего более двух точек (другими словами, если выпавшие на интервал точки пронумеровать в порядке возрастания координат, то все расстояния между ближайшими чётными точками и все расстояния между ближайшими нечётными точками должны превышать ε).

Утверждение. Успешными (в смысле сформулированного выше определения) могут быть те и только те бросания $n = 2m$ точек на интервал $(0, 1)$, которые соответствуют общей схеме, представленной на рис. 2, а, подразделяющейся, в свою очередь, на две подсхемы (рис. 2, б, в).

Комментарий к утверждению. Сначала по поводу обозначений на подсхемах б и с. Все выпавшие на интервале $(0, 1)$ точки делятся по двум признакам: чётные точки всегда чёрные, нечётные — светлые. Точки, попадающие в подынтервалы Δ_1 , имеют круглую форму, попадающие в подынтервалы Δ_2 — квадратную. В одну цепь соединяются ближайшие чётные либо ближайшие нечётные точки, между которыми должна соблюдаться ε -дистанция. В подсхеме б такими цепями являются три цепи из N_a , N_d и $(m - (N_a + N_d))$ нечётных точек, а в подсхеме с — три цепи из N_b , N_c и $(m - (N_b + N_c))$ чётных точек. Эти подсхемы отличаются между собой тем, что в подсхеме б блоки 2 и 4, объединяющие ячейки (подынтервалы) с одной выпавшей точкой, состоят из нечётного числа ячеек: [Блок 2] = $2(m - (N_b + N_c)) + 1$, [Блок 4] = $2(m - (N_a + N_d)) + 1$; в подсхеме с каждый из этих

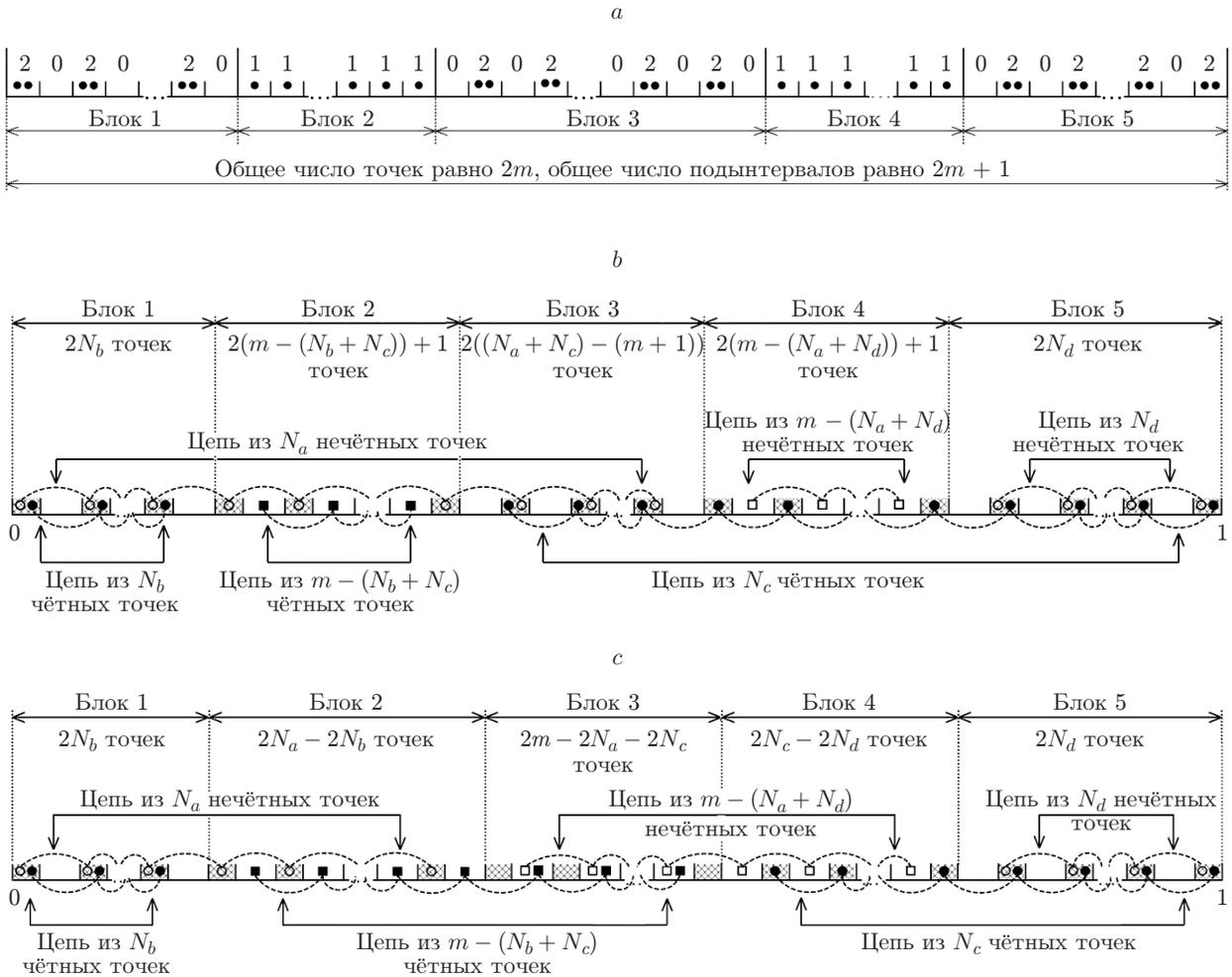


Рис. 2. Схема успешных бросаний $n = 2m$ точек на интервал $(0, 1)$: a — общая схема, объединяющая все варианты успешных бросаний; b — подсхема успешных бросаний для случая $N_a + N_c > m$; c — подсхема успешных бросаний для случая $N_a + N_c \leq m$

блоков состоит из чётного числа ячеек: [Блок 2] = $2(N_a - N_b)$, [Блок 4] = $2(N_c - N_d)$. Прямое следствие такого различия — для подсхемы b всегда выполняется условие $(N_a + N_c) > m$, а для подсхемы c — $(N_a + N_c) \leq m$. Верно и обратное: если $(N_a + N_c) > m$, то успешное бросание обязательно соответствует подсхеме b , если же $(N_a + N_c) \leq m$, то — подсхеме c .

Вообще говоря, приведённое утверждение изначально не вполне очевидно и является одним из базовых моментов при решении задачи, но когда оно сформулировано, то его доказательство не представляет серьёзной проблемы. По этой причине в данной работе опускаем доказательство утверждения, а далее будем использовать лишь важнейшие характеристики схем, приведённых на рис. 2. Отметим также, что подсхемы b и c при всей внешней схожести определяют два существенно различающихся между собой класса вероятностных событий (это, безусловно, следствие «непрекращающейся войны чётного с нечётным», реальность которой была отмечена в эпиграфе к работе [8]).

Факторизация вероятности элементарных событий. К первому классу отнесём успешные бросания, соответствующие подсхеме b ; ко второму классу — подсхеме c . Если найти суммарную вероятность prob1 всех событий первого класса и суммарную вероятность prob2 всех событий второго класса, то сумма $\text{Pr} = (\text{prob1} + \text{prob2})$ будет решением поставленной задачи (как следствие утверждения). В свою очередь, вероятность

$\text{prob1}(N_a, N_b, N_c, N_d)$ каждого элементарного события, входящего в первый класс, и вероятность $\text{prob2}(N_a, N_b, N_c, N_d)$ каждого элементарного события, входящего во второй класс, будем представлять в виде произведений $p1(N_a, N_b, N_c, N_d)q1(N_a, N_b, N_c, N_d)$ либо $p2(N_a, N_b, N_c, N_d)q2(N_a, N_b, N_c, N_d)$, где первый сомножитель ($p1$ или $p2$) задаёт вероятность того, что вся совокупность из $2m$ брошенных на интервал $(0, 1)$ точек распределилась в нужном количестве по ячейкам, предписываемым подсхемой b (если речь идёт о вероятности $p1$) либо подсхемой c (для вероятности $p2$), а второй сомножитель ($q1$ или $q2$) отвечает за выполнение всех необходимых метрических ограничений (т. е. за соблюдение ε -дистанции между всеми чётными и всеми нечётными точками). Таким образом, для решения задачи требуется найти вероятность

$$\begin{aligned} \text{Pr} = \text{prob1} + \text{prob2} = & \sum_{N_a + N_c > m} \{p1(N_a, N_b, N_c, N_d)q1(N_a, N_b, N_c, N_d)\} + \\ & + \sum_{N_a + N_c \leq m} \{p2(N_a, N_b, N_c, N_d)q2(N_a, N_b, N_c, N_d)\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Проведя необходимые вычисления, нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} p1(N_a, N_b, N_c, N_d) = & (2m)!(\Delta_1)^{N_a + N_b + N_c + N_d}(\Delta_2)^{2m - (N_a + N_b + N_c + N_d)} \times \\ & \times \frac{1}{2^{N_b + N_d + (N_a + N_c - (m + 1))}}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} p2(N_a, N_b, N_c, N_d) = & (2m)!(\Delta_1)^{N_a + N_b + N_c + N_d}(\Delta_2)^{2m - (N_a + N_b + N_c + N_d)} \times \\ & \times \frac{1}{2^{N_b + N_d + (m - (N_a + N_c))}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Явные аналитические зависимости для вероятностей $q1$ и $q2$ получить значительно сложнее. Так, для подсхемы b нужно корректно учесть связи между четырьмя взаимозависимыми монотонно возрастающими последовательностями: цепями из N_a и N_d нечётных точек, а также цепями из N_b и N_c чётных точек. Кроме того, требуется учесть наличие самостоятельных монотонно возрастающих последовательностей из $(m - (N_b + N_c))$ чётных и $(m - (N_a + N_d))$ нечётных точек. В конечном итоге нам потребовалось найти в явном виде решение следующей комбинаторно-лингвистической задачи:

«Из N_a символов « a », N_b символов « b », N_c символов « c » и N_d символов « d », удовлетворяющих условиям

$$0 \leq N_b < N_a \leq m, \quad 0 \leq N_d < N_c \leq m, \quad (N_a + N_d) \leq m, \quad (N_b + N_c) \leq m, \quad (N_a + N_c) \geq m + 1,$$

составляются различные слова длиной $(N_a + N_b + N_c + N_d)$. Нужно определить общее число слов $W_k(N_a, N_b, N_c, N_d)$, при просмотре которых слева направо одновременно выполняются три условия:

- 1) количество встреченных символов « b » никогда не превышает количества встреченных символов « a »;
- 2) количество встреченных символов « d » никогда не превышает количества встреченных символов « c »;
- 3) количество встреченных символов « a » никогда не превышает количества встреченных символов « c » более чем на $k = (m + 1) - N_c$.

С использованием подхода, изложенного в [9], в данной работе найдено решение этой задачи применительно к нашим условиям:

$$\begin{aligned}
 W_{(m+1)-N_c}(N_a, N_b, N_c, N_d) &= (N_a + N_b + N_c + N_d)! \times \\
 &\times \left\{ \left[\frac{1}{N_a!N_b!N_c!N_d!} - \frac{1}{N_a!N_b!(N_c+1)!(N_d-1)!} \right] + \right. \\
 &+ \left[\frac{1}{(N_a+1)!(N_b-1)!(N_c+1)!(N_d-1)!} - \frac{1}{(N_a+1)!(N_b-1)!N_c!N_d!} \right] + \\
 &+ \left[\frac{1}{(m+3)!N_b!(N_d-1)!(N_a+N_c-(m+2))!} - \frac{1}{(m+2)!N_b!N_d!(N_a+N_c-(m+2))!} \right] + \\
 &+ \left[\frac{1}{(m+3)!(N_b-1)!N_d!(N_a+N_c-(m+2))!} - \right. \\
 &\left. - \frac{1}{(m+4)!(N_b-1)!(N_d-1)!(N_a+N_c-(m+2))!} \right] \left. \right\}. \tag{8}
 \end{aligned}$$

Это позволило в явном виде найти вероятность $q1$:

$$\begin{aligned}
 q1(N_a, N_b, N_c, N_d) &= \left\{ \left[\frac{1}{N_a!N_b!N_c!N_d!} - \frac{1}{N_a!N_b!(N_c+1)!(N_d-1)!} + \right. \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{(N_a+1)!(N_b-1)!(N_c+1)!(N_d-1)!} - \frac{1}{(N_a+1)!(N_b-1)!N_c!N_d!} \right] + \\
 &+ \left[\frac{1}{(m+3)!N_b!(N_d-1)!(N_a+N_c-(m+2))!} - \frac{1}{(m+2)!N_b!N_d!(N_a+N_c-(m+2))!} + \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{(m+3)!(N_b-1)!N_d!(N_a+N_c-(m+2))!} - \right. \\
 &\left. - \frac{1}{(m+4)!(N_b-1)!(N_d-1)!(N_a+N_c-(m+2))!} \right] \left. \right\} \times \\
 &\times \left\{ \frac{1}{(m-(N_b+N_c))!} \right\} \left\{ \frac{1}{(m-(N_a+N_d))!} \right\} 2^{N_b+N_d+(N_a+N_c-(m+1))}. \tag{9}
 \end{aligned}$$

В соотношении (9), относящемся к элементарному событию из подсхемы b , сомножители, стоящие во второй и третьей фигурных скобках, отвечают за соблюдение ε -дистанций в независимых цепях из $(m - (N_b + N_c))$ чётных и $(m - (N_a + N_d))$ нечётных точек, а первый сомножитель — за все остальные $(N_a + N_b + N_c + N_d)$ точки. Для нахождения первого сомножителя, связывающего четыре взаимозависимые цепи (две из N_a и N_d нечётных точек

и две из N_b и N_c чётных точек), собственно говоря, и пришлось решать четырёхсимвольную комбинаторную задачу. Последний сомножитель $2^{N_b + N_d + (N_a + N_c - (m + 1))}$ отражает возможность перестановки точек внутри любой из $(N_b + N_d + ((N_a + N_c) - (m + 1)))$ парных (т. е. содержащих две точки) ячеек Δ_1 .

Найти аналитическое выражение для вероятности q_2 , соответствующей элементарному событию из подсхемы c , значительно проще, поскольку здесь, в отличие от подсхемы b , мы имеем дело тоже с тремя, но уже независимыми событиями:

$$q_2(N_a, N_b, N_c, N_d) =$$

$$= \left\{ \frac{1}{(m - (N_b + N_c))!(m - (N_a + N_d))!} - \frac{1}{(m + 1 - (N_b + N_d))!(m - 1 - (N_a + N_c))!} \right\} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{N_a!N_b!} - \frac{1}{(N_a + 1)!(N_b - 1)!} \right\} \left\{ \frac{1}{N_c!N_d!} - \frac{1}{(N_c + 1)!(N_d - 1)!} \right\} 2^{N_b + N_d + (m - (N_a + N_c))}. \quad (10)$$

Сомножитель в первых фигурных скобках связывает между собой две цепи: одну с $(m - (N_b + N_c))$ чётными и другую с $(m - (N_a + N_d))$ нечётными точками. Сомножитель во вторых фигурных скобках обеспечивает соблюдение ε -дистанций в цепях из N_a нечётных и N_b чётных точек. Сомножитель в третьих фигурных скобках обеспечивает соблюдение ε -дистанций в цепях из N_c чётных и N_d нечётных точек. Все эти вероятности легко находятся, так как расчёт каждой из них связан с решением упрощённой комбинаторной задачи: «Из N_a символов « a » и N_b символов « b » составляются различные слова длиной $(N_a + N_b)$. Требуется определить общее число слов, при просмотре которых слева направо количество встреченных символов « a » никогда не превышает количества встреченных символов « b » более чем на k ». Её решение

$$\frac{(N_a + N_b)!}{N_a!N_b!} - \frac{(N_a + N_b)!}{(N_a - k - 1)!(N_b + k + 1)!} \quad (11)$$

можно найти, воспользовавшись тем, что (11) есть частный случай (8): нужно лишь положить $N_b = N_d = 0$; $N_c = N_b$; $m = k + N_b - 1$. Однако гораздо проще решение (11) получить с помощью изящного метода зеркального отражения, предложенного более ста лет назад французским математиком Д. Андре [10]. Как и в предыдущем примере, последний сомножитель $2^{N_b + N_d + (m - (N_a + N_c))}$ в соотношении (9) отражает возможность перестановки точек внутри парных ячеек — в данном случае внутри любой из $(N_b + N_d)$ ячеек Δ_1 и внутри любой из $(m - (N_a + N_c))$ ячеек Δ_2 .

Подставляя (6), (7), (9) и (10) в (5) и осуществляя все необходимые преобразования, получим требуемое соотношение (4) для вероятности $P_{2m, 2}(\varepsilon)$, справедливое на интервале $(1/m + 1) < \varepsilon < (1/m)$. Доказательство завершено.

Заключение. За рамками данной работы осталось использование программ машинной аналитики в установлении конкретной формулы (11). С помощью этих программ первоначально был получен широкий набор частных решений задачи, в том числе методом прямого многомерного интегрирования в [11] рассчитаны формулы $P_{n, 2}(\varepsilon)$ для чётных значений $n = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14$ (что вручную сделать невозможно уже для $n = 4$, поскольку аналитические выкладки связаны со сверхбольшим объёмом циклически повторяющихся рутинных операций расстановки пределов интегрирования, проверки на совместность всех промежуточных систем линейных неравенств и непосредственного интегрирования в n -мерном пространстве). Именно наличие результатов компьютерного расчёта инициировало данное исследование, так как программно проведённые вычисления показали, что

общая аналитическая зависимость $P_{n,2}(\varepsilon)$ разбивается на три полиномиальных участка, состыкованных в двух точках излома. Полученное соотношение (4) открывает перспективу установления общей аналитической зависимости $P_{n,2}(\varepsilon)$, т. е. решения общей задачи безошибочной регистрации случайного дискретного изображения при двух пороговых уровнях считывающей апертуры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Резник А. Л., Ефимов В. М.** Компьютерная аналитика и обобщённые числа Каталана в задачах регистрации случайных дискретных объектов. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2013. 64 с.
2. **Резник А. Л., Ефимов В. М., Соловьев А. А., Торгов А. В.** О надёжности считывания случайных точечных объектов при ограниченном числе пороговых уровней сканирующей апертуры // Автометрия. 2014. **50**, № 6. С. 61–68.
3. **Reznik A. L., Efimov V. M., Solov'ev A. A., Torgov A. V.** On the reliable readout of random discrete-point structures // Patt. Recogn. and Image Analys. Advances in Mathematical Theory and Applications. 2015. **25**, N 1. P. 84–88.
4. **Parzen E.** Modern Probability Theory and Its Applications. New York — London: John Wiley and Sons, 1960. 464 p.
5. **Уилкс С.** Математическая статистика. М.: Наука, 1967. 632 с.
6. **Резник А. Л., Ефимов В. М., Соловьев А. А.** Компьютерно-аналитический расчёт вероятностных характеристик процесса считывания случайных точечных изображений // Автометрия. 2011. **47**, № 1. С. 10–16.
7. **Резник А. Л., Ефимов В. М., Соловьев А. А., Торгов А. В.** Обобщённые числа Каталана в задачах обработки случайных дискретных изображений // Автометрия. 2011. **47**, № 6. С. 11–16.
8. **Zeilberger D.** Andre's reflection proof generalized to the many-candidates ballot problem // Discrete Math. 1983. **44**, Is. 3. P. 325–326.
9. **Gessel I. M., Zeilberger D.** Random walk in a Weyl chamber // Proc. Amer. Math. Soc. 1992. **115**, N 1. P. 27–31.
10. **André D.** Solution directe du problème résolu par M. Bertrand // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. 1887. **105**. P. 436–437.
11. **Резник А. Л., Ефимов В. М., Соловьев А. А.** Оценивание надёжности считывания случайных дискретных изображений с применением средств компьютерной аналитики // Вестн. НГУ. Сер. Физика. 2010. **5**, вып. 2. С. 104–110.

Поступила в редакцию 31 августа 2015 г.