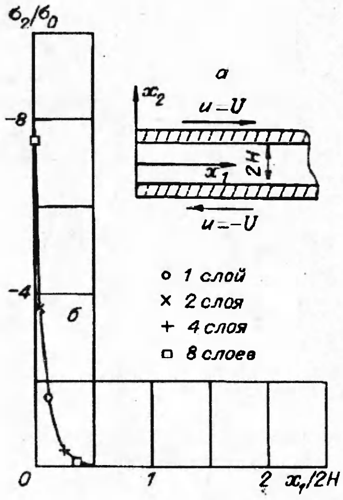
Рис. 5



Задача о сдвиге упругой прослойки. Прослойка толщины $2H$ сдвигается абсолютно жесткими плитами (рис. 5, *а*). На поверхностях прослойки задаются тангенциальные смещения $u_1 = \pm U$, нормальные смещения полагаются равными нулю. Вблизи свободной поверхности ($x_1 = 0$) возникает концентрация нормальных и касательных напряжений. На рис. 5, *б* приведено распределение нормальных напряжений по поверхности $x_2 = H$ прослойки при разбиении ее на различное число слоев (от одного до восьми). И в этой задаче для определения нормальных напряжений по поверхности прослойки достаточно представления ее в виде одного слоя.

Приведенные результаты, а также результаты решения ряда контактных задач [2, 3] указывают на эффективность применения метода слоев для исследования краевых эффектов в упругих прослойках и в других плоских задачах упругости с сингулярными эффектами в напряженном состоянии.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Иванов Г.В.** Теория пластин и оболочек. — Новосибирск: НГУ, 1980.
2. **Дергилева Л.А.** Метод решения плоской контактной задачи для упругого слоя // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. — 1976. — Вып. 25.
3. **Волчков Ю.М., Дергилева Л.А.** Решение задач упругого слоя по приближенным уравнениям и сравнение с решениями теории упругости // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. — 1977. — Вып. 28.
4. **Пелех Б.Л., Сухорольский М.А.** Контактные задачи упругих анизотропных оболочек. — Киев: Наук. думка, 1980.
5. **Hennart J.P.** A general family of nodal schemes // SIAM J. Sci. Stat. Comput. — 1986. — V. 7, N 1.

г. Новосибирск *Поступила 31/I 1994 г.*

УДК 539.3

В.Д. Бондарь

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРУГОСТИ

В ряде актуальных задач упругости линейная теория уже не обеспечивает требуемой точности, поэтому ее заменяют одной из нелинейных теорий. Нелинейность связывают как с законом механического поведения материала (физическая нелинейность), так и с зависимостью деформаций от градиентов перемещений (геометрическая нелинейность). В работе рассматривается плоская динамическая задача в варианте Новожилова геометрически нелинейной упругости. Выводятся уравнения движения в напряжениях и поворотах. Даются представления этих величин через потенциалы и устанавливаются уравнения для потенциалов.

Показывается, что при учете нелинейности происходит взаимодействие волн расширения — сжатия и волн сдвига. Указывается класс решений уравнений движения, содержащий две произвольные функции, и дается его приложение к решению краевой задачи о распределении напряжений в полубесконечной упругой среде при движении импульса давлений по ее поверхности.

Предложенная В.В. Новожиловым [1] нелинейная модель упругости в динамическом случае описывается уравнениями движения, законом Гука, специальной нелинейной связью деформаций с удлинениями-сдвигами и поворотами и представлениями последних величин через перемещения:

(1) $$\rho(\mathbf{f} - \mathbf{u}_{tt}) + \operatorname{div} P = 0, \rho = \text{const},$$
$$P = \lambda\varepsilon_1 G + 2\mu\varepsilon, \ \varepsilon_1 = \operatorname{tr}\varepsilon,$$
$$2\varepsilon = 2e + \omega\cdot\omega, \ 2e = \nabla\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla, \ 2\omega = \nabla\mathbf{u} - \mathbf{u}\nabla.$$

Здесь $\mathbf{u}$, $\mathbf{f}$ — векторы перемещений и плотности массовых сил; G, P, ε, e, ω, $\nabla\mathbf{u}$, $\mathbf{u}\nabla$ — метрический тензор и тензоры напряжений, деформаций, удлинений-сдвигов, поворотов, градиент и транспонированный градиент перемещений; ρ, λ, μ — плотность материала и коэффициенты упругости Ламе.

Модель (1) получена в длинноволновом приближении и в предположении, что малые повороты могут существенно превосходить малые же удлинения-сдвиги, так что квадраты первых из них сравнимы по величине со вторыми. Подобные условия реализуются, например, в гибких телах, в телах с полостями вблизи внутренних и внешних границ и в других случаях.

Система (1) обобщает динамические уравнения линейной упругости, отличаясь от них только наличием нелинейного члена в представлениях деформаций через удлинения-сдвиги и повороты. В случае плоской задачи уравнения (1) в комплексных координатах актуального состояния $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ (x, y — декартовы координаты) соответственно имеют вид

(2) $$\rho\left(f - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) + \frac{\partial P^{11}}{\partial z} + \frac{\partial P^{12}}{\partial \bar{z}} = 0,$$
$$P^{11} = \overline{P^{22}} = 2\mu\varepsilon^{11}, \ P^{21} = P^{12} = 2(\lambda + \mu)\varepsilon^{21},$$
$$\varepsilon^{11} = \overline{\varepsilon^{22}} = e^{11}, \ \varepsilon^{21} = \varepsilon^{12} = e^{21} + \frac{1}{4}(\omega^{21})^2,$$
$$e^{11} = \overline{e^{22}} = 2\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}, \ e^{21} = e^{12} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}}, \ \omega^{21} = \overline{\omega^{12}} = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}}.$$

Фигурирующие в (2) контравариантные комплексные компоненты векторов и тензоров связаны с декартовыми компонентами соответствующих величин (обозначаемыми прежними символами, но с нижними буквенными индексами) формулами типа [2]

(3) $$u = u^1 = u_x + iu_y, \ \bar{u} = u^2 = u_x - iu_y,$$
$$P^{11} = P_{xx} - P_{yy} + 2iP_{xy}, \ P^{21} = P_{xx} + P_{yy},$$
$$\omega^{11} = 0, \omega^{22} = 0, \omega^{21} = 2i\omega_{xy}.$$

Из (2) вытекают представления градиентов перемещения через напряжения и поворот:

(4) $$4\mu\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}P^{21} + 2\mu\omega^{21}\left(1 - \frac{1}{4}\omega^{21}\right), \ 4\mu\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = P^{11}.$$

Условие совместности этих равенств дает уравнение совместности напряжений и поворота. Последнее вместе с представленным в напряжениях динамическим уравнением (2) образует систему двух комплексных уравнений для комплексного и вещественного напряжений P^{11}, P^{21} и чисто мнимого поворота ω^{21}:

$$(5)\qquad \frac{\partial P^{11}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left[\frac{\mu}{\lambda+\mu}P^{21} + 2\mu\omega^{21}\left(1 - \frac{1}{4}\omega^{21}\right)\right];$$

$$(6)\qquad \left(\Delta - \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)P^{11} + 4\frac{\partial^2 P^{21}}{\partial \bar{z}^2} + 4\rho\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0,\ \Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$$

(Δ — оператор Лапласа).

Уравнения (4)—(6) допускают представления напряжений, поворота и перемещений через потенциальную комплексную функцию $J(z,\bar{z}) = J_1 + iJ_2$. Действительно, уравнение (5) будет удовлетворено, если положить

$$P^{11} = 4\frac{\partial^2 J}{\partial \bar{z}^2},\ \frac{\mu}{\lambda+\mu}P^{21} + 2\mu\omega^{21}\left(1 - \frac{1}{4}\omega^{21}\right) = 4\frac{\partial^2 J}{\partial z \partial \bar{z}}.$$

Отсюда и из (4) следуют выражения через потенциалы напряжений, поворота и перемещений:

$$(7)\qquad P^{11} = 4\frac{\partial^2 (J_1 + iJ_2)}{\partial \bar{z}^2},\ P^{21} = \frac{\lambda+\mu}{\mu}\left(\Delta J_1 - \frac{1}{8\mu}(\Delta J_2)^2\right);$$

$$(8)\qquad \omega^{21} = \frac{i}{2\mu}\Delta J_2,\ \mu u = \frac{\partial J_1}{\partial \bar{z}} + i\frac{\partial J_2}{\partial \bar{z}}.$$

Выразив объемную силу через потенциал $\Psi = \Psi_1 + i\Psi_2$ соотношением $\rho f = 2\partial\Psi/\partial\bar{z}$, а напряжения — формулами (7), представим (6) в виде уравнения для потенциалов:

$$4\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2}\left\{\left(\Delta - \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(J_1 + iJ_2) + \frac{\lambda+\mu}{\mu}\left[\Delta J_1 - \frac{1}{8\mu}(\Delta J_2)^2\right] + 2(\Psi_1 + i\Psi_2)\right\} = 0.$$

Последнее тождественно удовлетворяется при равенстве нулю комплексного выражения, стоящего в фигурной скобке, т.е. при обращении в нуль его действительной и мнимой частей:

$$(9)\qquad \left(\Delta - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)J_1 - \frac{1}{8\mu}\frac{c_1^2 - c_2^2}{c_1^2}(\Delta J_2)^2 + 2\frac{c_2^2}{c_1^2}\Psi_1 = 0,$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)J_2 + 2\Psi_2 = 0,\ c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho},\ c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}.$$

Таким образом, для потенциалов, удовлетворяющих уравнениям (9), формулы (7) и (8) определяют решение уравнений движения.

Из выражения перемещения (8) и уравнений для потенциалов (9) можно заключить, что потенциал J_1 определяет волну расширений — сжатий, распространяющуюся со скоростью c_1, а потенциал J_2 — волну сдвигов со скоростью распространения c_2.

Равенства (9) показывают также, что сдвиговая волна в нелинейной среде ведет себя так же, как в линейной. Что касается волны расширений — сжатий, то она в нелинейной среде испытывает воздействие со стороны сдвиговой волны, которое проявляется как действие некоторой объемной силы. Тем самым в нелинейной среде имеет место определенное взаимодействие волн [3].

Рассмотрим класс задач о движении полубесконечной среды $y \geqslant 0$, в которой объемные силы отсутствуют, а возмущения перемещаются по поверхности с постоянной скоростью c параллельно оси абсцисс. В этом случае в сопутствующей системе координат ξ,η, где $\xi = x - ct$, $\eta = y$, картина явления будет стационарной, поэтому можно принять $J(x,y,t) = J(\xi,\eta)$. Соответственно вместо комплексных переменных z, $\bar{z}$, t можно рассматривать только комплексные координаты z_1, $\bar{z}_1$ или z_2, $\bar{z}_2$, которые связаны с прежними комплексными переменными и друг с другом соотношениями

$$
(10) \qquad z_1 = \xi + i\beta_1\eta = \frac{1+\beta_1}{2} z + \frac{1-\beta_1}{2}\bar{z} - ct, \; \beta_1^2 = 1 - \frac{c^2}{c_1^2},
$$

$$
z_2 = \xi + i\beta_2\eta = \frac{1+\beta_2}{2} z + \frac{1-\beta_2}{2}\bar{z} - ct, \; \beta_2^2 = 1 - \frac{c^2}{c_2^2},
$$

$$
z_2 = \frac{\beta_1+\beta_2}{2\beta_1} z_1 + \frac{\beta_1-\beta_2}{2\beta_1}\bar{z}_1, \; z_1 = \frac{\beta_2+\beta_1}{2\beta_2} z_2 + \frac{\beta_2-\beta_1}{2\beta_2}\bar{z}_2.
$$

Фигурирующие в (7) — (9) дифференциальные операторы в переменных (10) имеют представления

$$
(11) \qquad \begin{aligned}
\Delta &= (1-\beta_1^2)\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_1^2}\right) + 2(1+\beta_1^2)\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} = \\
&= (1-\beta_2^2)\left(\frac{\partial^2}{\partial z_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_2^2}\right) + 2(1+\beta_2^2)\frac{\partial^2}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2},
\end{aligned}
$$

$$
4\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} = (1-\beta_1)^2\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + (1+\beta_1)^2\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_1^2} + 2(1-\beta_1^2)\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} =
$$

$$
= (1-\beta_2)^2\frac{\partial^2}{\partial z_2^2} + (1+\beta_2)^2\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_2^2} + 2(1-\beta_2^2)\frac{\partial^2}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2},
$$

$$
\Delta - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = 4\beta_1^2\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} = (\beta_1^2 - \beta_2^2)\left(\frac{\partial^2}{\partial z_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_2^2}\right) + 2(\beta_1^2 + \beta_2^2)\frac{\partial^2}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2},
$$

$$
\Delta - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = 4\beta_2^2\frac{\partial^2}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2} = (\beta_2^2 - \beta_1^2)\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_1^2}\right) + 2(\beta_2^2 + \beta_1^2)\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1},
$$

$$
2\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = (1-\beta_1)\frac{\partial}{\partial z_1} + (1+\beta_1)\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} = (1-\beta_2)\frac{\partial}{\partial z_2} + (1+\beta_2)\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2},
$$

в силу которых уравнения для потенциалов (9) (при $\Psi_1 = \Psi_2 = 0$) принимают вид уравнений Лапласа и Пуассона

$$
(12) \qquad \frac{\partial^2 J_2}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2} = 0, \; \frac{\partial^2 J_1}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} = \frac{w}{\mu}, \; w = \frac{1}{32\beta_1^2}\frac{\beta_1^2 - \beta_2^2}{1-\beta_1^2}(\Delta J_2)^2.
$$

Общие решения уравнений (12) выражаются через произвольные аналитические функции $F_1(z_1)$ и $F_2(z_2)$ и частное решение $F(z_1,\bar{z}_1)$ второго из них формулами

$$
(13) \qquad J_2(z_2,\bar{z}_2) = \frac{1+\beta_2^2}{2i\beta_2}\left[F_2(z_2) - \overline{F_2(z_2)}\right],
$$

$$
J_1(z_1,\bar{z}_1) = \frac{1}{\mu}F(z_1,\bar{z}_1) - F_1(z_1) - \overline{F_1(z_1)}.
$$

В предположении, что при $|z_1| \to \infty$ $|w| = O(1/|z_1|^{1+\alpha})$, $\alpha > 0$, и с учетом выражений функции J_2 и операторов (11) частное решение можно представить в виде интеграла по области S, занятой упругим телом [4]:

$$
(14) \quad F(z_1,\bar{z}_1) = \frac{2}{\pi}\iint_S w(\xi',\beta_1\eta')\ln|z'_1 - z_1|\,d\xi'\,d(\beta_1\eta'), \; z'_1 = \xi' + i\beta_1\eta',
$$

$$
w = \tau\left[\operatorname{Im}F''_2(z_2)\right]^2 = \tau\left[\operatorname{Im}F''_2(z_1,\bar{z}_1)\right]^2, \; \tau = (1-\beta_2^2)\frac{\beta_1^2-\beta_2^2}{2}\left(\frac{1+\beta_2^2}{4\beta_1\beta_2}\right)^2.
$$

Потенциалам (13) в силу (7), (8) и (11) отвечают следующие комплексные напряжения, поворот и перемещения:

$$(15)\ P^{21} = -2\mathrm{Re}\left\{(\beta_1^2 - \beta_2^2)[F''_1(z_1) - \frac{1}{\mu} F_{z_1 z_1}]\right\} + (\beta_1^2 + \beta_2^2)\frac{\tau}{\mu}[\mathrm{Im} F''_2(z_2)]^2,$$

$$P^{11} = -2\mathrm{Re}\left\{(1 + \beta_1^2)[F''_1(z_1) - \frac{1}{\mu} F_{z_1 z_1}] + \right.$$
$$\left. + (1 + \beta_2^2)F''_2(z_2) - (1 - \beta_1^2)\frac{\tau}{\mu}[\mathrm{Im} F''_2(z_2)]^2\right\} +$$
$$+ 4i\mathrm{Im}\left\{\beta_1[F''_1(z_1) - \frac{1}{\mu} F_{z_1 z_1}] + \frac{(1 + \beta_2^2)^2}{4\beta_2} F''_2(z_2)\right\},$$

$$\mu\omega^{21} = i\frac{1 - \beta_2^4}{2\beta_2}\mathrm{Im}\, F''_2(z_2),$$

$$\mu u = -\mathrm{Re}\left\{F'_1(z_1) - \frac{1}{\mu} F_{z_1} + \frac{1 + \beta_2^2}{2} F'_2(z_2)\right\} +$$
$$+ i\mathrm{Im}\left\{\beta_1[F'_1(z_1) - \frac{1}{\mu} F_{z_1}] + \frac{1 + \beta_2^2}{2\beta_2} F'_2(z_2)\right\}.$$

Здесь, согласно (14), производные от частного решения имеют вид

$$F_{z_1} = -\frac{i}{\pi}\iint\limits_S \frac{w(\xi',\beta_1\eta')}{z'_1 - z_1}\, d\xi' d(\beta_1\eta'),\quad F_{z_1 z_1} = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_S \frac{w(\xi',\beta_1\eta')}{(z'_1 - z_1)^2}\, d\xi' d(\beta_1\eta')$$

с интегралом в последней из них, понимаемым в смысле главного значения по Коши. Для получения выражений декартовых компонент рассматриваемых величин достаточно воспользоваться равенствами (3) и (15), отделить в них действительные и мнимые части и решить получающуюся при этом систему уравнений для напряжений, в результате будем иметь

$$(16)\quad P_{xx} = -\mathrm{Re}\left\{(1 + 2\beta_1^2 - \beta_2^2)[F''_1(z_1) - \frac{1}{\mu} F_{z_1 z_1}] + \right.$$
$$\left. + (1 + \beta_2^2)F''_2(z_2)\right\} + (1 - 2\beta_1^2 - \beta_2^2)\frac{\tau}{\mu}[\mathrm{Im}\, F''_2(z_2)]^2,$$

$$P_{yy} = (1 + \beta_2^2)\mathrm{Re}\,\{F''_1(z_1) - \frac{1}{\mu} F_{z_1 z_1} + F''_2(z_2)\} - (1 + \beta_2^2)\frac{\tau}{\mu}[\mathrm{Im}\, F''_2(z_2)]^2,$$

$$P_{xy} = \mathrm{Im}\,\{2\beta_1[F''_1(z_1) - \frac{1}{\mu} F_{z_1 z_1}] + \frac{(1 + \beta_2^2)^2}{2\beta_2} F''_2(z_2)\},$$

$$\mu\omega_{xy} = \frac{1 - \beta_2^4}{4\beta_2}\mathrm{Im}\, F''_2(z_2),$$

$$\mu u_x = -\mathrm{Re}\,\{F'_1(z_1) - \frac{1}{\mu} F_{z_1} + \frac{1 + \beta_2^2}{2} F'_2(z_2)\},$$

$$\mu u_y = \mathrm{Im}\{\beta_1[F'_1(z_1) - \frac{1}{\mu} F_{z_1}] + \frac{1 + \beta_2^2}{2\beta_2} F'_2(z_2)\}.$$

Полученные формулы определяют класс точных решений нелинейных динамических уравнений упругости, зависящий от двух произвольных аналитических функций $F_1(z_1)$ и $F_2(z_2)$. Эти функции находятся из краевых условий.

Как следует из (16), обобщенные перемещения и поворот ($U_x = \mu u_x$, $U_y = \mu u_y$, $\Omega_{xy} = \mu\omega_{xy}$) подобно напряжениям определяются через одни и те же потенциалы и, следовательно, являются конечными величинами. Пусть L_0 и P_0 — характерные длина и напряжение, а $\sigma = P_0/\mu$ — характерное безразмерное напряжение. Сопоставим рассматриваемым величинам соответствующие безразмерные величины, отмечаемые звездочкой, согласно формулам

$$z_1 = L_0 z_1^*,\ U_x = L_0 P_0 U_x^*,\ P_{xx} = P_0 P_{xx}^*,\ \Omega_{xy} = P_0 \Omega_{xy}^*,$$
$$F'_1 = L_0 P_0 F'^*_1,\ F''_1 = P_0 F''^*_1,\ F_{z_1} = L_0 P_0^2 F^*_{z_1},\ F_{z_1 z_1} = P_0^2 F^*_{z_1 z_1}$$

и внесем их в (16). Тогда легко видеть, что безразмерные величины будут связаны между собою равенствами вида (16) с той, однако, разницей, что в них множитель $1/\mu$ следует заменить на множитель σ.

Полагая, что безразмерные функции конечны по модулю, а параметр σ весьма мал сравнительно с единицей, можем в безразмерных соотношениях пренебречь слагаемыми, содержащими этот множитель, как малыми величинами сравнительно с другими членами. Эквивалентный результат получается при пренебрежении в правых частях размерных выражений (16) членами с множителем $1/\mu$, после чего они принимают вид

$$P_{xx} = -\mathrm{Re}\{(1 + 2\beta_1^2 - \beta_2^2)F''_1(z_1) + (1 + \beta_2^2)F''_2(z_2)\},$$
$$P_{yy} = (1 + \beta_2^2)\mathrm{Re}\{F''_1(z_1) + F''_2(z_2)\},$$
$$P_{xy} = \mathrm{Im}\,\{2\beta_1 F''_1(z_1) + \frac{(1 + \beta_2^2)^2}{2\beta_2} F''_2(z_2)\},\ \mu\omega_{xy} = \frac{1 - \beta_2^4}{4\beta_2}\mathrm{Im} F''_2(z_2),$$
$$\mu u_x = -\mathrm{Re}\{F'_1(z_1) + \frac{1 + \beta_2^2}{2} F'_2(z_2)\},\ \mu u_y = \mathrm{Im}\{\beta_1 F'_1(z_1) + \frac{1 + \beta_2^2}{2\beta_2} F'_2(z_2)\},$$

совпадающий с решением Радока [2] динамических уравнений линейной упругости. Таким образом, результаты линейной теории вытекают из результатов нелинейной теории при весьма малых σ, т.е. при характерных нагрузках, значительно уступающих упругой постоянной материала.

В качестве приложения формул (16) рассмотрим распределение напряжений в полубесконечной двумерной упругой среде $y \geqslant 0$, обусловленное равномерным движением со скоростью c импульса давлений вдоль границы $y = 0$. Направив ось абсцисс вдоль границы в сторону движения импульса, примем, что граничные условия имеют вид

$$P_{xy} = 0,\ P_{yy} = -\mathrm{Re}\,H(x - ct) \text{ на } y = 0. \tag{17}$$

Полагая в выражении (16) для P_{xy} $\eta = 0$, найдем, что первое условие (17) удовлетворится, если принять

$$F''_1(\xi) - \frac{1}{\mu} F_{\xi\xi} + \frac{(1 + \beta_2^2)^2}{4\beta_1\beta_2} F''_2(\xi) = 0.$$

Последнее же равенство будет выполнено при наличии во всей области следующей связи между произвольными функциями:

$$F''_1(z_1) - \frac{1}{\mu} F_{z_1 z_1} = -\frac{(1 + \beta_2^2)^2}{4\beta_1\beta_2} F''_2(z_1).$$

Тем самым напряжения (16) определяются только функцией F''_2:

$$\begin{aligned} P_{xx} = (1 + \beta_2^2)\Big\{&(1 + 2\beta_1^2 - \beta_2^2)\frac{1 + \beta_2^2}{4\beta_1\beta_2}\mathrm{Re}\,F''_2(z_1) - \\ &- \mathrm{Re}\,F''_2(z_2)\Big\} + (1 - 2\beta_1^2 - \beta_2^2)\frac{\tau}{\mu}(\mathrm{Im}\,F''_2(z_2))^2, \end{aligned} \tag{18}$$

$$P_{yy} = (1 + \beta_2^2)\Big\{\mathrm{Re}\,F''_2(z_2) - \frac{(1 + \beta_2^2)^2}{4\beta_1\beta_2}\mathrm{Re}\,F''_2(z_1) - \frac{\tau}{\mu}(\mathrm{Im}\,F''_2(z_2))^2\Big\},$$

$$P_{xy} = \frac{(1 + \beta_2^2)^2}{2\beta_2} \left\{ \operatorname{Im} F''_2(z_2) - \operatorname{Im} F''_2(z_1) \right\}.$$

При использовании выражения (18) для напряжения P_{yy} второе условие (17) приводит к нелинейной краевой задаче для аналитической функции F''_2:

(19) $$m \operatorname{Re} F''_2(\xi) + n(\operatorname{Im} F''_2(\xi))^2 = \operatorname{Re} H(\xi),$$

$$m = (1 + \beta_2^2) \frac{(1 + \beta_2^2)^2 - 4\beta_1\beta_2}{4\beta_1\beta_2}, \; n = (1 - \beta_2^4) \frac{\beta_1^2 - \beta_2^2}{2\mu} \left(\frac{1 + \beta_2^2}{4\beta_1\beta_2} \right)^2.$$

В соответствии с изложенным выше поле напряжений и краевая задача для потенциала в линейной упругости следуют из (18) и (19), если в них опустить члены, содержащие множитель $1/\mu$, при этом краевая задача (19) становится линейной [2].

Если сопоставить аналитической функции $F''_2(z_2)$ комплексную функцию $\Phi(z_2,\bar{z}_2) = \Phi_1 + i\Phi_2$ соотношениями

(20) $$\operatorname{Re} F''_2(z_2) = \frac{1}{m} \Phi_1(z_2,\bar{z}_2) - \frac{k}{m} \Phi_2^2(z_2,\bar{z}_2), \; \operatorname{Im} F''_2(z_2) = \frac{1}{m} \Phi_2(z_2,\bar{z}_2),$$

$$F''_2(z_2) = \frac{1}{m} \Phi(z_2,\bar{z}_2) + \frac{k}{4m} (\Phi(z_2,\bar{z}_2) - \overline{\Phi(z_2,\bar{z}_2)})^2, \; k = \frac{n}{m^2},$$

то, как следует из условия аналитичности $F''_2(z_2)$ ($\partial_{\bar{z}_2} F''_2(z_2) = 0$) и краевого условия (19), эта функция удовлетворяет линейной краевой задаче для квазилинейного уравнения:

(21) $$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} - \gamma(\Phi,\bar{\Phi}) \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{z}} = 0, \; \gamma = \frac{ik\Phi_2}{1 + ik\Phi_2},$$

$$\operatorname{Re} \Phi(\xi) = \operatorname{Re} H(\xi) \text{ на } \eta = 0.$$

Из (16) и (20) вытекает, что входящая в γ величина Φ_2 пропорциональна обобщенному повороту:

$$\Phi_2 = \frac{4\beta_2}{1 - \beta_2^4} \Omega_{xy}.$$

Поскольку в рассматриваемой теории обобщенные повороты полагаются конечными величинами, то механический смысл имеют только ограниченные решения уравнения (21). На ограниченных решениях,очевидно, $|\gamma| < 1$, тем самым (21) является уравнением эллиптического типа [5]. Таким образом, если установлено ограниченное решение задачи (21), то выражение (20) определяет аналитическую функцию $F''_2(z_2)$. Последняя, в свою очередь, определяет поле напряжений по формулам (18).

Рассмотрим приближенное решение нелинейной краевой задачи для потенциала (19), соответствующее слабому импульсу давлений: $P_0 \ll \mu$ ($\sigma \ll 1$). Опираясь на выражения

$$(F''_2)^2 = (\operatorname{Re} F''_2)^2 - (\operatorname{Im} F''_2)^2 + 2i \operatorname{Re} F''_2 \operatorname{Im} F''_2,$$

$$(\operatorname{Im} F''_2)^2 = (\operatorname{Re} F''_2)^2 - \operatorname{Re}(F''_2)^2,$$

представим задачу (19) в форме

(22) $$\operatorname{Re} F''_2(\xi) + \alpha[(\operatorname{Re} F''_2(\xi))^2 - \operatorname{Re}(F''_2(\xi))^2] = \operatorname{Re} h(\xi), \; \alpha = \frac{n}{m}, \; h = \frac{H}{m}.$$

Это уравнение, записанное в безразмерном виде, содержит малый безразмерный параметр

$$\alpha P_0 = \sigma \frac{\beta_2^2 - \beta_2^2}{2} \frac{1 + \beta_2^2}{4\beta_1\beta_2} \frac{1 - \beta_2^4}{(1 + \beta_2^2)^2 - 4\beta_1\beta_2},$$

которому отвечает малый размерный параметр α. Представим искомый потенциал $F''_2(z_2)$ и определяемые им входящие в (22) выражения в виде разложений по малому параметру:

(23) $F''_2 = \varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2 + \ldots,\ \mathrm{Re}\, F''_2 = \mathrm{Re}\,\varphi_0 + \alpha\mathrm{Re}\varphi_1 + \alpha^2\mathrm{Re}\varphi_2 + \ldots,$

$$(\mathrm{Re}\, F''_2)^2 = (\mathrm{Re}\,\varphi_0)^2 + \alpha 2\mathrm{Re}\,\varphi_0\mathrm{Re}\,\varphi_1 + \alpha^2(2\mathrm{Re}\varphi_0\mathrm{Re}\varphi_2 + (\mathrm{Re}\varphi_1)^2) + \ldots,$$

$$\mathrm{Re}(F''_2)^2 = \mathrm{Re}(\varphi_0^2) + \alpha\mathrm{Re}(2\varphi_0\varphi_1) + \alpha^2\mathrm{Re}(2\varphi_0\varphi_2 + \varphi_1^2) + \ldots$$

Подстановка этих разложений в (22) и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях параметра в разных частях равенства приводят для функций φ_ν к системе уравнений

(24) $$\mathrm{Re}\varphi_\nu(\xi) = w_\nu(\xi) \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots) \text{ на } \eta = 0,$$

где

$$w_0 = \mathrm{Re}\, h;$$
$$w_1 = \mathrm{Re}(\varphi_0^2) - (\mathrm{Re}\,\varphi_0)^2 = -(\mathrm{Im}\,\varphi_0)^2;$$
$$w_2 = \mathrm{Re}(2\varphi_0\varphi_1) - 2\mathrm{Re}\,\varphi_0\mathrm{Re}\,\varphi_1 = -2\mathrm{Im}\varphi_0\mathrm{Im}\varphi_1;$$
....

Здесь нулевое приближение отвечает соответствующей краевой задаче линейной упругости. В уравнении для ν-го приближения правая часть определяется предыдущими приближениями и тем самым известна. Таким образом, каждая из аналитических функций $\varphi_\nu(z_2)$, согласно (24), выражается формулой Шварца для полуплоскости [6] (в предположении, что функция $H(\xi)$ ограничена и при $|\xi| \to \infty$ стремится к нулю не медленнее, чем $1/|\xi|^e$, $e > 0$):

$$\varphi_\nu(z_2) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{w_\nu(\xi)}{\xi - z_2}\, d\xi \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

а искомый потенциал $F''_2(z_2)$ — рядом (23).

Если в (17) вместо второго напряжения считать заданным на границе поворот, то можно рассматривать краевую задачу

$$P_{xy} = 0,\ \mu\omega_{xy} = \mathrm{Im}\, h(x - ct),$$

где $h(x - ct)$ — граничное значение аналитической функции $h(z_2)$. Тогда первое краевое условие, как и ранее, устанавливает связь между произвольными функциями F''_1 и F''_2, что приводит к формулам (18), определяющим напряжения через одну функцию F''_2. Второе же краевое условие в силу (16) становится условием для функции F''_2:

$$\frac{1 - \beta_2^4}{4\beta_2}\,\mathrm{Im}\, F''_2(\xi) = \mathrm{Im}\, h(\xi) \text{ на } y = 0.$$

Последнему можно удовлетворить, взяв искомую функцию пропорциональной $h(z_2)$ во всех точках области $y \geqslant 0$:

$$F''_2(z_2) = \frac{4\beta_2}{1 - \beta_2^4}\, h(z_2).$$

Найденная таким способом F''_2 имеет тот же вид, что и при решении данной задачи в рамках линейной упругости, так как в обоих случаях поворот одинаковым образом выражается через F''_2.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Новожилов В.В.** Теория упругости. — Л.: Судпромгиз, 1958.
2. **Снеддон И.Н., Берри П.С.** Классическая теория упругости. — М.: ГИФМЛ, 1961.
3. **Бондарь В.Д.** О волнах в геометрически нелинейной упругой среде // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. — 1972. — Вып. 10.
4. **Мусхелишвили Н.И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Наука, 1966.
5. **Монахов В.Н.** Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. — Новосибирск: Наука, 1977.
6. **Лаврентьев М.А, Шабат Б.В.** Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1973.

г. Новосибирск *Поступила 27/I 1994 г.*

УДК 539.3:517.958

Н.И. Остросаблин

ОБ УРАВНЕНИЯХ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ, СВОДЯЩИХСЯ К ТРЕМ НЕЗАВИСИМЫМ ВОЛНОВЫМ УРАВНЕНИЯМ

В [1—3] введены собственные операторы и векторы для системы дифференциальных уравнений линейной теории упругости. Определение собственных операторов и векторов приводится к специальной перевязанной задаче [3] на собственные значения и векторы для шести числовых матриц, составленных из компонент тензора модулей упругости. В данной работе предлагается способ построения структуры матрицы операторов линейной теории упругости анизотропных материалов, допускающих сведение исходной системы к трем независимым волновым уравнениям. Найдены конкретные классы анизотропных материалов, зависящие от произвольных параметров. В частности, получены формулы для упругой анизотропной среды (обобщение среды Грина) с чисто продольными и чисто поперечными волнами при любом направлении волновой нормали, а также для специальных ортотропных и трансверсально-изотропных материалов.

Уравнения теории упругости при произвольной анизотропии и отсутствии объемных сил в декартовых ортогональных координатах x_1, x_2, x_3 имеют вид [4]

$$L_{ij}u_j = 0,\ L_{ij} = L_{ji} = A_{i(kl)j}\partial_{kl} - \rho\delta_{ij}\partial_{..}, \tag{1}$$

где u_j — вектор смещения; $A_{i(kl)j} = (A_{iklj} + A_{ilkj})/2$; $A_{iklj} = A_{kilj} = A_{ljik}$ — постоянный тензор модулей упругости; ρ — постоянная плотность материала; δ_{ij} — символ Кронекера; $\partial_{.}$, ∂_k — производные по времени и координате x_k; повторяющиеся буквенные индексы означают суммирование. Свойства коэффициентов $A_{i(kl)j}$ изучались в [5—7].

Для операторов (1) ищутся с постоянными коэффициентами дифференциальные матрицы $T = [t_{jp}]$, $D = \mathrm{diag}(D_1, D_2, D_3)$ такие, что $LT = TD$, $|T| \neq 0$. Тогда общее решение уравнений (1) будет следующее: $u = T\varphi$, $D\varphi = f$, $Tf = 0$. Формулы $u = T\varphi$, $\varphi = T'\tilde{u}$ (штрих означает транспонирование) переводят решения уравнений $Lu = 0$, $D\varphi = 0$ друг в друга [2, 3]. Выражение $u = TT'\tilde{u}$ есть формула производства новых решений, т.е. $Q = TT'$ — оператор симметрии в смысле группового анализа [8].