

тов a_{21} и a_{32} , q_* — экспериментальная величина краевого эффекта. Разница между значениями q_0 и q_1 увеличивается с возрастанием коэффициента a_{21} , который определяется ν_2 . При росте ν_2 в проведенных вычислениях с 0,03 до 0,25 разница между q_0 и q_1 возрастает с 3 до 30 %. Для наглядности теоретические и экспериментальные величины краевых эффектов показаны на рис. 3, где 1 — экспериментальное значение q_* , 2 — теоретическое значение q_0 , 3 — теоретическое значение q_1 при $a_{21} \neq a_{32} \neq 0$.

Анализ полученных результатов показывает, что с возрастанием параметра анизотропии E_1/G как в экспериментах, так и в теоретических расчетах зона проникновения краевого эффекта увеличивается, по численные значения для q и q_* различаются. Экспериментальные значения q_* в 1,2—1,6 раза больше, чем теоретические.

Возвращаясь к рассматриваемой задаче и качественному сопоставлению теоретических расчетов с результатами экспериментов, отметим, что это сопоставление не совсем корректно. Во-первых, в расчетах не учитывалась нагрузка, реализованная в эксперименте. Во-вторых, расчет проводился для плоской деформации, в эксперименте реализовывалось осесимметрическое нагружение. В-третьих, предлагаемая теория не отражает ярко выраженной структуры испытываемых образцов. Однако качественное совпадение предлагаемой теории для определения глубины проникновения краевого эффекта и результатов экспериментов получено. С увеличением параметра анизотропии E_1/G как в теоретических расчетах, так и в эксперименте зона краевого эффекта возрастает.

ЛИТЕРАТУРА

1. Слепян Л. И. Нестационарные упругие волны. — Л., 1972.
2. Корнев В. М. Уточненные теории растяжения и изгиба ортотропной арматуры // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. — 1982. — Вып. 51.
3. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. — М.; Л., 1974.
4. Демешкин А. Г., Корнев В. М. О распространении импульса деформаций по композитным стержням // Механика композит. материалов. — 1984. — № 1.
5. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетере Г. А. Сопротивление жестких полимерных материалов. — Рига, 1972.

г. Новосибирск

Поступила 2/XI 1989 г.

УДК 539.3

Н. С. Астапов, В. М. Корнев

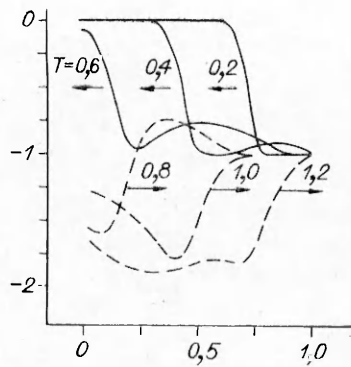
ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ БЛОКА УПРУГОГО МАТЕРИАЛА

В рамках плоской динамической задачи теории упругости рассматривается деформирование блока упругого материала при динамическом нагружении. Численное решение основано на конечно-разностном методе С. К. Годунова [1] и его модификаций [2—4] для расчета разрывных течений. Изучается напряженно-деформированное состояние блока при разных системах нагружения, моделирующих воздействие на блок высокоэнергетического ударника различных конфигураций. При специальной конфигурации тупого инструмента впереди него образуется клин из разрушаемого материала, т. е. инструмент как бы самозатачивается при каждом ударе, а впереди этого клина имеется область растягивающих напряжений, что может привести к появлению трещины отрыва.

1. Постановка задачи и метод решения. Определяются функции $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, $\sigma_1(x, y, t)$, $\sigma_2(x, y, t)$, $\tau_{12}(x, y, t)$, удовлетворяющие для $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq t \leq T_*$ системе уравнений (см. [2—4])

$$(1) \quad \rho \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} = 0, \quad \rho \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial t} - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_2}{\partial t} - \lambda \frac{\partial u}{\partial x} - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$



Р и с. 1

$$\frac{\partial \tau_{12}}{\partial t} - \mu \frac{\partial v}{\partial x} - \mu \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

начальным условиям

$$(2) \quad u = v = \sigma_1 = \sigma_2 = \tau_{12} = 0$$

и граничным условиям

$$(3) \quad \sigma_1 = \tau_{12} = 0 \quad (x = 0, 1); \quad u = v = 0 \\ (y = 0); \quad \tau_{12} = 0, \quad \sigma_2 = -1 \quad (y = 1).$$

Здесь u, v — скорости вдоль осей Ox, Oy ; σ_1, σ_2 — нормальные напряжения вдоль этих осей; τ_{12} — касательное напряжение; ρ — плотность; λ, μ — параметры Ламэ.

Задача (1)–(3) являлась отладочной для вычислительной программы. Для численно-

го решения использован алгоритм из [4], где развита схема С. К. Годунова — Г. В. Иванова [1, 2] для расчета разрывных решений. Схема [1] обладает свойством монотонности и имеет первый порядок точности. На каждом слое по времени решение рассматривается как кусочно-постоянное, а для решения на промежуточном этапе используются формулы распада произвольного разрыва. В [2] предложен способ построения схем на основе аппроксимации решения кусочно-линейными полиномами. Этот способ хорошо соответствует задачам, для которых характерно присутствие заранее не известных поверхностей разрыва [3]. В [4] построено семейство схем, позволяющих находить решение с большей точностью по сравнению со схемами [1, 2], оставаясь в рамках этих же подходов. Семейство схем [4] содержит схемы [1, 2]. Улучшения удалось добиться благодаря включению в дополнительные уравнения большего числа членов и в итоге получить семейство разностных схем, содержащих большее число управляющих параметров (констант диссипации).

Для задачи (1)–(3) значения восьми управляющих параметров выбраны так, чтобы крутизна вычисляемого фронта падающей (рис. 1, сплошные линии) и отраженной (штриховые) волн была максимальной (стрелки указывают направление движения фронтов). Численный эксперимент проводился для модельного материала с характеристиками $\rho = 1, \lambda = 3/7, \mu = 2/7$, рассматривался блок материала единичного размера, причем в начальный момент времени $t = 0$ на границе $y = 1$ задавалась единичная нормальная сжимающая нагрузка (см. (1)–(3)). Счет прекращался по истечении времени T_* , когда возмущение, отразившись от дальней границы, возвращалось к исходной. С этими значениями параметров решались все следующие задачи, отличающиеся от (1)–(3) лишь краевыми условиями.

Исследовались три разных способа нагружения блока материала:

а) тупым инструментом с проскальзыванием вдоль поверхности блока, б) тупым инструментом при наличии касательных напряжений, в) тупым полым инструментом с проскальзыванием вдоль поверхности блока, а именно:

$$(4a) \quad u = \tau_{12} = 0 \quad (x = 0); \quad \sigma_1 = \tau_{12} = 0 \quad (x = 1); \quad u = v = 0 \\ (y = 0); \quad \tau_{12} = 0 \quad (y = 1);$$

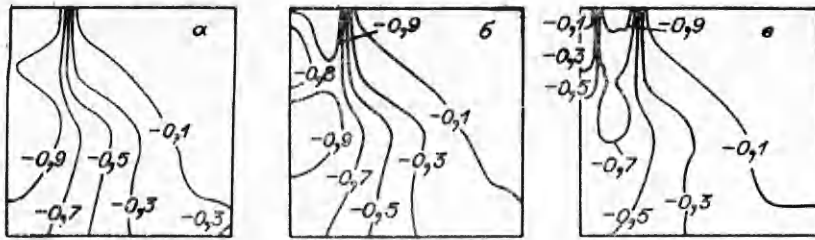
$$\sigma_2 = -1, \quad 0 \leq x \leq 0,225; \quad \sigma_2 = 20x - 5,5, \quad 0,225 < x \leq 0,275; \\ \sigma_2 = 0, \quad 0,275 < x \leq 1 \quad (y = 1);$$

$$(4b) \quad u = \tau_{12} = 0 \quad (x = 0); \quad \sigma_1 = \tau_{12} = 0 \quad (x = 1); \quad u = v = 0 \quad (y = 0);$$

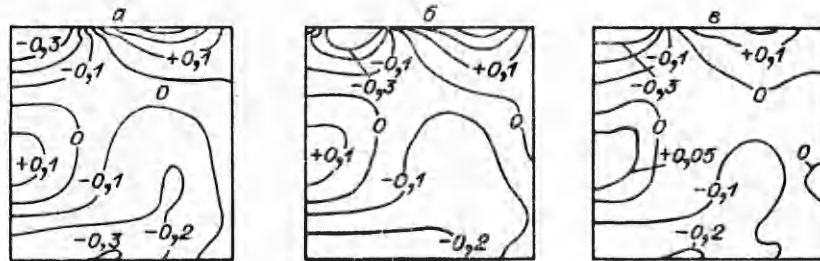
$$\tau_{12} = 0,5 \sin^2 4\pi x, \quad 0 \leq x \leq 0,25; \quad \tau_{12} = 0, \quad 0,25 < x \leq 1 \\ (y = 1);$$

$$\sigma_2 = -1, \quad 0 \leq x \leq 0,225; \quad \sigma_2 = 20x - 5,5, \quad 0,225 < x \leq 0,275;$$

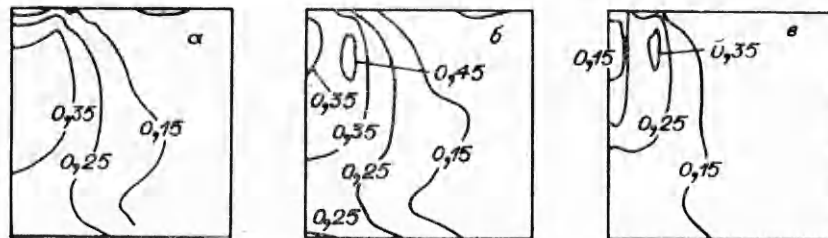
$$\sigma_2 = 0, \quad 0,275 < x \leq 1 \quad (y = 1);$$



Р и с. 2



Р и с. 3

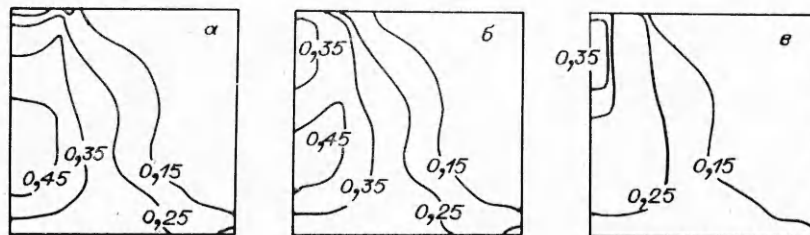


Р и с. 4

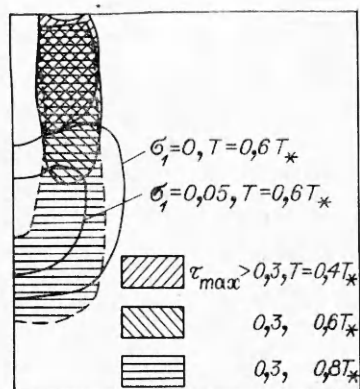
$$(4в) \quad u = \tau_{12} = 0 \quad (x = 0); \quad \sigma_1 = \tau_{12} = 0 \quad (x = 1); \quad u = v = 0 \\ (y = 0); \quad \tau_{12} = 0 \quad (y = 1); \\ \sigma_2 = 0, \quad 0 \leq x \leq 0,1; \quad \sigma_2 = -1, \quad 0,1 < x \leq 0,225; \quad \sigma_2 = 20x - 5,5, \\ 0,225 < x \leq 0,275; \quad \sigma_2 = 0, \quad 0,275 < x \leq 1 \quad (y = 1).$$

Сформулированные задачи (1), (2), (4а); (1), (2), (4б); (1), (2), (4в) моделируют центральное нагружение, поэтому рассматривается половина блока, причем $u = 0$ на границе $x = 0$. Краевые условия (4а), (4б), (4в) различаются лишь значениями τ_{12} , σ_2 на краю $y = 1$. Все краевые условия для σ_2 моделируют нагружение тупым инструментом, внешняя кромка которого закруглена.

2. Обсуждение результатов. Результаты счета для пяти последовательных моментов времени $0,2T_*$; $0,4T_*$; $0,6T_*$; $0,8T_*$; T_* выводились графически изолиниями напряжений σ_1 , σ_2 , τ_{\max} . Некоторые из результа-



Р и с. 5



Р и с. 6

τ_{\max} на всю глубину блока в полосе, ширина которой не больше $0,8a$. За пределами этой полосы влияния характера нагружения практически не ощутимо (рис. 2—5). В полосе влияния нагружения задачи с краевыми условиями (4б) есть «ядро» с центром в точке $(0; 0,8)$ пониженного напряжения σ_2 и τ_{\max} (рис. 2, б, 4, б, 5, б), а для краевых условий (4в) — «клип» пониженного напряжения σ_2 (рис. 2, в) и τ_{\max} (рис. 4, в, 5, в). В окрестности точки $(0, 1)$ задачи с краевыми условиями (4б) постоянно сохраняются растягивающее напряжение σ_1 (рис. 3, б) и самое высокое напряжение τ_{\max} (рис. 4, б, 5, б). Распределение напряжений σ_1 в задачах с краевыми условиями (4а) и (4в) почти совпадает во всей области (рис. 3, а, 3, в).

Изображенное поле изолиний на рис. 6 для τ_{\max} в разные моменты времени можно связать с образованием трещины сдвига, если воспользоваться кинетической концепцией разрушения С. Н. Журкова [5]. Согласно кинетической концепции разрушения, основной его характеристикой является долговечность (см., например, [6]). При заданной интенсивности растягивающих или сдвигающих напряжений долговечность отождествляется со временем от момента приложения нагрузки до разделения тела на части. После накопления повреждений в материале блока в окрестности прикладываемой нагрузки формируется система микротрещин (заштрихованные области на рис. 6); эти трещины сливаются в магистральную, и образуется как бы «острый» инструмент впереди тупого ударника с центральным отверстием, который позволяет расколоть блок на части, чему способствует наличие зоны растягивающих напряжений впереди «острого» инструмента. Итак, возможна другая схема разрушения блока, отличная от традиционной.

Изложенное не согласуется с утверждением, что «с увеличением энергии удара... влияние геометрии инструмента на эффективность разрушения горных пород значительно снижается...» [7, с. 29]. Проведенный численный эксперимент показывает, что с увеличением энергии удара в принципе возможно добиться разрушения блоков материала при каждой встрече ударника с блоком.

ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. — М.: Наука, 1976.
2. Иванов Г. В. Построение схем решения плоской динамической задачи теории упругости на основе аппроксимации линейными полиномами // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. — 1978. — Вып. 37.
3. Волчков Ю. М., Иванов Г. В., Кургузов В. Д. Алгоритм расщепления плоской динамической задачи упругого деформирования с учетом хрупкого разрушения // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. — 1983. — Вып. 48.

4. Богульский И. О. Повышение точности решения плоских динамических задач упругости в рамках аппроксимации линейными полиномами. — Красноярск, 1986. — Деп. в ВИНТИ 03.01.86, № 65—86.
5. Журков С. Н. Проблема прочности твердых тел // Вестн. АН СССР. — 1957. — № 11.
6. Степанов В. А., Песчанская Н. Н., Шнейзман В. В. Прочность и релаксационные явления в твердых телах. — Л.: Наука, 1984.
7. Войцеховский Б. В., Митин Л. А., Войцеховская Ф. Ф. Эффективность применения высоких энергий удара для разрушения крепких скальных пород // ФТПРПИ. — 1973. — № 4.

г. Новосибирск

Поступила 29/1 1990 г.

УДК 539.376

В. Н. Солодовников

К АНАЛИЗУ ПОЛЗУЧЕСТИ РАСТЯГИВАЕМОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ С КРУГЛЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Дано конечно-элементное решение задачи по теории ползучести типа упрочнения. Вследствие ползучести концентрация напряжений на краю отверстия уменьшается, смещения как функции от приведенного времени растут с почти постоянной скоростью. Представлены картины изолиний смещений типа картин муара.

Основные уравнения. Выражения деформаций через смещения, уравнения равновесия и соотношения между напряжениями и деформациями в плоском напряженном состоянии принимаются в виде [1, 2]

$$\begin{aligned} e_{11} &= u_{1,1}, \quad e_{22} = u_{2,2}, \quad 2e_{12} = u_{1,2} + u_{2,1}, \\ \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} &= 0, \quad \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} = 0, \\ e_{11} &= E^{-1}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) + \rho_{11}, \quad e_{22} = E^{-1}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}) + \rho_{22}, \\ e_{12} &= (1 + \nu)E^{-1}\sigma_{12} + \rho_{12}. \end{aligned}$$

Здесь E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; u_i — смещения; e_{ij} — деформации; σ_{ij} — напряжения; ρ_{ij} — деформации ползучести ($i, j = 1, 2$) в декартовой системе координат x_1, x_2 ; индексы 1 и 2 после запятой означают частное дифференцирование по x_1 и x_2 соответственно.

Для расчета ползучести пластины используем в отличие от [3—7] теорию ползучести типа упрочнения [2, 8]. В одноосном напряженном состоянии деформация ползучести ρ и напряжение σ как функции от времени t в данной теории связаны зависимостью

$$(1) \quad \rho^k d\rho/dt = a\sigma^n,$$

где k, n, a — положительные константы материала. В начальный момент времени $t = 0$ имеется особенность: $\rho = 0$, скорость деформации ползучести $d\rho/dt$ обращается в бесконечность. Для устранения особенности перейдем к новой переменной по времени — приведенному времени [8]

$$(2) \quad \tau = [a(k+1)t]^m, \quad m = 1/(k+1).$$

Из (1) и (2) получаем

$$(3) \quad \rho^k \dot{\rho} = \tau^k \sigma^n, \quad \dot{\rho} = \sigma^n \left[(k+1) \tau^{-(k+1)} \int_0^\tau \sigma^n \tau^k d\tau \right]^{m-1}.$$

Точка сверху означает дифференцирование по τ . При $\tau = 0$ производная $\dot{\rho}$ принимает конечное значение σ^{mn} . В дальнейшем τ для краткости называется временем, производные по τ — скоростями рассматриваемых функций.