

ет, что он найдет применение прежде всего для быстрого и эффективного количественного анализа структуры гидродинамических потоков, локализации вихревых и застойных зон, точек отрыва циркуляционных течений, в частности, в системах со сложной геометрией (смесители, диффузоры, изогнутые каналы, каналы переменного сечения, обтекание препятствий и т. п.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Levins D. M., Thompson D. H. Visualization of flow and turbulence in liquids.—Inst. of Eng. (Australia) Mech. Eng. Trans., 1976, vol. 1, N 1.
2. Дюррани Т., Грейгид К. Лазерные системы в гидродинамических измерениях. М.: Энергия, 1980.
3. Альварес-Суарес В. А., Барачевский В. А. и др. Метод фотохромной визуализации гидродинамических потоков. Препринт № 203. М.: ИПМ АН СССР, 1982.
4. Барачевский В. А., Лашков Г. И., Цехомский В. А. Фотохромизм и его применение. М.: Химия, 1977.
5. Popovich A. T., Hummel R. L. A new method for non-disturbing turbulent flow measurements very close to a wall.— Chem. Eng. Sci., 1967, vol. 22, p. 21.
6. Popovich A. T., Hummel R. L. Experimental study of the viscous sublayer in turbulent pipe flow.— AIChE J., 1967, vol. 13, p. 854.
7. Frantisak F., Palade de Iribarne A. et al. Nondisturbing tracer technique for quantitative measurements in turbulent flow.— Ind. Eng. Chem. Fundam., 1969, vol. 8, N 1.
8. Palade de Iribarne A., Hummel R. L. et al. Transition and turbulent flow parameters in a smooth pipe by direct flow visualization.— Chem. Eng. Progr., 1969, vol. 65, N 91.
9. Seeley L. E., Hummel R. L., Smith I. W. Experimental velocity profiles in laminar flow around spheres at intermediate Reynolds numbers.— J. Fluid Mech., 1975, vol. 68, pt 3.
10. Lavallee H. C., Popovich A. T. Fluid flow near roughness elements investigated by photolysis method.— Chem. Eng. Sci., 1974, vol. 29, p. 49.
11. Dunn S. G., Smith J. W. Some statistical properties of turbulent momentum transfer in rough pipes.— Can. J. Chem. Eng., 1972, vol. 50, p. 561.
12. Белоостоцкий Б. Р. и др. Основы лазерной техники. М.: Сов. радио, 1972.
13. Справочник фотолюбителя. М.: Искусство, 1962.
14. Столяров А. К., Комлев А. А., Аксенчиков А. П. Некоторые особенности поведения фотохромного органического слоя при высокой мощности облучения.— Квант. электроника, 1973, № 3.

Поступила 13/VII 1983 г.

УДК 533.6.014

ПРИМЕР ОБТЕКАНИЯ НЕСИММЕТРИЧНОГО ПРОФИЛЯ ЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

С. Т. Личук, А. А. Орел
(Саратов)

Получено частное решение околозвуковых уравнений, описывающих плоские течения идеального газа, соответствующее несимметричному обтеканию некоторого профиля. Найдены аэродинамические характеристики профиля.

На плоскости годографа скорости околозвуковые течения газа описываются уравнением Трикоми

$$(1) \quad \eta \partial^2 \psi / \partial \theta^2 + \partial^2 \psi / \partial \eta^2 = 0$$

для функции тока $\psi(\theta, \eta)$. Здесь θ — угол наклона вектора скорости к направлению потока на бесконечности; η — введенная Ф. И. Франклем [1] функция модуля скорости, которая ≥ 0 соответственно при до- и сверхзвуковых скоростях. Выберем в качестве решения уравнения (1) следующую линейную комбинацию автомодельных решений:

$$(2) \quad \begin{aligned} \psi(\theta, \eta) &= c_1 \psi_1(\theta, \eta) + c_2 \psi_2(\theta, \eta) + c_3 \psi_3(\theta, \eta) + c_4 = \\ &= c_1 \rho^{-5/3} f_{-5/3}(t) + c_2 \rho^{1/3} f_{1/3}(t) + c_3 \rho^{-2/3} f_{-2/3}(t) + c_4, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f_{-5/3}(t) &= 9^{-1}(3/2)^{1/3}[(1-t)^{1/3}(1+3t) - (1+t)^{1/3}(1-3t)]; \\ f_{1/3}(t) &= (3/2)^{1/3}[(1-t)^{1/3} - (1+t)^{1/3}]; \\ f_{-2/3}(t) &= -3^{-1}(3/2)^{1/3}[(1-t)^{1/3} + (1+t)^{1/3}], \quad \rho^2 = \theta^2 + (4/9)\eta^3, \\ & \quad t = \theta/\rho. \end{aligned}$$

Здесь c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные. Константу c_4 определим ниже. Первые два решения в (2) были исследованы в [1, 2] и описывают соответственно течения газа при $M_\infty = 1$ вдали от тела и в окрестности центра сопла Лавала. Третье решение в комбинации с первым описывает поведение потока при удалении в бесконечность при несимметричном обтекании профиля. Для определения формы тела в плоскости течения найдем прежде нулевую линию тока в плоскости годографа, а затем вычислим для нее координаты x . Тогда форма обтекаемого профиля получится интегрированием по x наклона нулевой линии тока. Воспользуемся дифференциальной зависимостью функций тока

$$(3) \quad \psi_1(\theta, \eta) = \partial^2 \psi_2(\theta, \eta) / \partial \theta^2, \quad \psi_3(\theta, \eta) = \partial \psi_2(\theta, \eta) / \partial \theta$$

и кубическим уравнением [3], которому удовлетворяет функция тока $\psi_2(\theta, \eta)$:

$$(4) \quad \psi_2^3 + 3\eta\psi_2 + 3\theta = 0.$$

Дифференцируя (4) по θ и используя зависимость (3), получим

$$(5) \quad \psi_1(\theta, \eta) = -2\psi_2(\psi_2^2 + \eta)^{-3}, \quad \psi_3(\theta, \eta) = -(\psi_2^2 + \eta)^{-1}.$$

Подставим (5) в (2) и приравняем к нулю полученное выражение

$$(6) \quad b\psi_2 [a - (\psi_2^2 + \eta)] [a^2 + a(\psi_2^2 + \eta) + (\psi_2^2 + \eta)^2] + (\psi_2^2 + \eta) [c_3/c_4 - (\psi_2^2 + \eta)] = 0,$$

где $a^3 = 2c_1/c_2$; $b = c_2/c_4$. Если теперь в (6) положить

$$(7) \quad c_3/c_4 = a = (2c_1/c_2)^{1/3},$$

то из (6) и (4) получим неявное уравнение контура несимметричного профиля в параметрическом виде на плоскости годографа

$$(8) \quad a^2(3b\psi_2 + 1) = 0, \quad \theta = -3^{-1}\psi_2(a + 2\eta), \quad \psi_2^2 + \eta = a.$$

В (8) параметром является функция $\psi_2(\theta, \eta)$. Выражение (7) определяет постоянную c_4 через произвольные постоянные c_1, c_2, c_3 . Решая совместно уравнения (8), найдем координаты носовой точки профиля B на плоскости годографа

$$(9) \quad \eta_B = a - 1/(9b^2), \quad \theta_B = [3a - 2/(9b^2)]/(9b).$$

Для перехода на плоскость потока используем околосзвуковое соотношение [4] $x = (\kappa + 1)^{1/3}\varphi(\theta, \eta)$, и тогда координату x нулевой линии тока представим в виде

$$(10) \quad (\kappa + 1)^{-1/3}x = c_1\varphi_1(\theta, \eta) + c_2\varphi_2(\theta, \eta) + c_3\varphi_3(\theta, \eta).$$

Потенциал скоростей $\varphi_n(\theta, \eta)$ автомодельного решения связан с функцией $f_n(t)$ соотношением [4]

$$\varphi_n(\theta, \eta) = \rho^{n+1/3}g_n(t) = (3/2)^{1/3}\rho^{n+1/3}(1-t^2)^{2/3}f'_n(t)/(n+1/3),$$

используя которое, найдем

$$(11) \quad \varphi_1(\theta, \eta) = (\psi_2^2 - \eta)(\psi_2^2 + \eta)^{-3}, \quad \varphi_2(\theta, \eta) = -2^{-1}(\psi_2^2 + 2\eta), \\ \varphi_3(\theta, \eta) = \psi_2(\psi_2^2 + \eta)^{-1}.$$

Подставляя (11) в (10) и учитывая равенство $\psi_2^2 + \eta = a$ из (8), получим зависимость

$$(12) \quad x = (\kappa + 1)^{1/3} c_2 [-(3/2)\eta \pm ca^{-1}(a - \eta)^{1/2}],$$

где $c = c_3/c_2$, а знаки $+$ и $-$ относятся соответственно к нижней и верхней частям несимметричного профиля. Равенство (12) указывает на нелинейное распределение скорости по поверхности профиля. Форму обтекаемого тела в плоскости течения найдем, вычислив интеграл

$$(13) \quad y(x) = \int_a^\eta \theta dx.$$

В результате вычисления интеграла (13) получим следующее параметрическое уравнение верхней и нижней частей несимметричного профиля в физических переменных:

$$(14) \quad (\kappa + 1)^{-1/3} y = +(2/5)c_2(a - \eta)^{5/2} + (3a)^{-1}c\eta^2 \pm c_2a(a - \eta)^{3/2} + 3^{-1}c\eta - (2/3)ac, \\ (\kappa + 1)^{-1/3} x = c_2[-(3/2)\eta \mp ca^{-1}(a - \eta)^{1/2}].$$

Исключив в (14) параметр η , запишем уравнение несимметричного профиля в явном виде

$$(15) \quad (\kappa + 1)^{-1/3} y(x) = +4(15a_1)^{-1} [a_2x + 2a_3(a_4 + a_2x)^{1/2} + a_5]^{5/2} + \\ + a_3 [a_2x + 2a_3(a_4 + a_2x)^{1/2} + 2a_3^2] \pm 2(3a_1)^{-1} a [a_2x + 2a_3(a_4 + a_2x)^{1/2} + \\ + a_5]^{3/2} - aa_3 [a_2x + 2a_3(a_4 + a_2x)^{1/2} + 2a_3^2] - a_6,$$

где $a_1 = 2(3c_2)^{-1}$, $a_2 = (\kappa + 1)^{-1/3} a_1$, $a_3 = (3a)^{-1} c$, $a_4 = a + a_3$, $a_5 = a + 2a_3^2$, $a_6 = 2 \cdot 3^{-1} ac$.

Полагая в (15) постоянные $c_3 = c_4 = 0$, получим уравнение контура симметричного профиля Гудерлея [4]

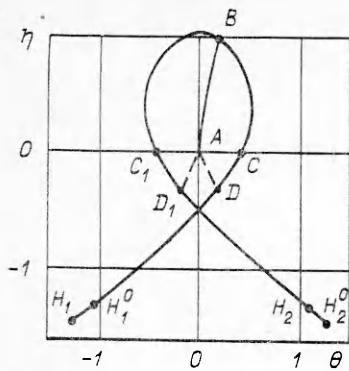
$$(16) \quad y(x) = 5^{-1}(\kappa + 1)^{1/3} c_2 (a_2x + a)^{3/2} (3a - 2a_2x).$$

Для удобства построения несимметричного профиля в плоскостях годографа и физической положим

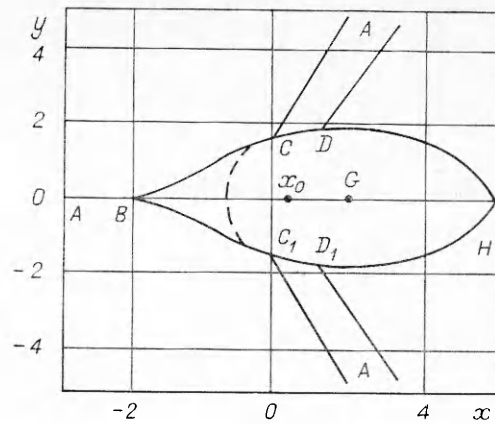
$$(17) \quad c_1 = c_2 = 1, \quad c_3 = c_4 = 2b_1, \quad \psi_2 = f, \quad z = f^2 + \eta.$$

На фиг. 1 представлен годограф течения, построенный для случаев $b_1 = 0$; $-0,1$. Отметим, что форма обтекаемого профиля на плоскости годографа не зависит от параметра b_1 . В то же время нулевая линия тока AB при различных b_1 приходит в разные точки профиля, определяемые (9). Если рассматривать полученный контур как границу области для задачи Трикоми с краевым условием $\psi = 0$, то, как известно [5], задача будет корректна в области, ограниченной контуром $ABCD$ и характеристикой AD , и соответственно в области ABC_1D_1A . Характеристики AD и AD_1 уравнения (1) начинаются на профиле и приходят в точку A , соответствующую бесконечности на плоскости течения, и поэтому возмущения потока, вносимые частью профиля, расположенной по потоку ниже точек D и D_1 , не влияют на течение в области AD_1C_1BCDA . Следовательно, профиль ниже точек D и D_1 можно задавать произвольно, не меняя потока в области до предельных характеристик AD и AD_1 . Здесь следует отметить, что вдоль характеристик AD и AD_1 дискриминант $Q = \theta^2 + (4/9)\eta^3$ уравнения (4) обращается в нуль, имея вверх по течению положительное значение, а вниз по потоку — отрицательное. Таким образом, формальное продолжение решения (2) в область, где $Q < 0$, приводит к трехзначности в соответствии с корнями уравнения (4):

$$f_1 = 2(-\eta)^{1/2} \cos(\beta/3), \quad f_{2/3} = -2(-\eta)^{1/2} \cos(\beta/3 + \pi/3), \quad \cos \beta = \\ = (3/2)\theta(-\eta)^{-3/2}.$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Однако аналитическое продолжение решения через AD_1 дает только корень f_1 , а через AD — корень f_2 . Отметим также, что эти продолжения не имеют предельных линий, т. е. допускают взаимно-однозначный переход к физическим координатам x, y .

Для того чтобы профиль на физической плоскости был замкнутым, необходимо, чтобы крайним точкам продолжений контура на плоскости годографа соответствовала одна и та же точка на физической плоскости. С учетом (17) параметрическое уравнение профиля в физической плоскости принимает вид

$$(18) \quad \begin{aligned} y &= (\kappa + 1)^{1/3} f^2 [b_1(1 - 3^{-1}f^2) + 2f(2f_1^2 - 5)/5], \\ x &= (\kappa + 1)^{1/3} [3(f^2 - 1) - 2b_1f]. \end{aligned}$$

Найдем координаты кормовой точки профиля. В этой точке должны выполняться условия $x(f_1) = x(f_2)$, $y(f_1) = y(f_2)$. Последние соотношения представляют систему нелинейных алгебраических уравнений с неизвестными f_1 и f_2 , которую можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} (f_2 - f_1)(3h - b_1) &= 0, \quad h = f_1 + f_2, \\ g^2 + (6h^2 - 5)g - 2h^2(8h^2 - 5) &= 0, \quad g = f_1^2 + f_2^2, \end{aligned}$$

откуда

$$(19) \quad g = 5 - 8h^2 \quad \text{или} \quad g = 2h^2.$$

Поскольку в кормовой точке $f_1 \neq f_2$, получим $h = b_1/3$. Тогда из первого уравнения (19) имеем

$$f_{1,2} = [b_1/3] \pm v, \quad v = \sqrt{(5/2) [1 - (2/9)b_1^2]}.$$

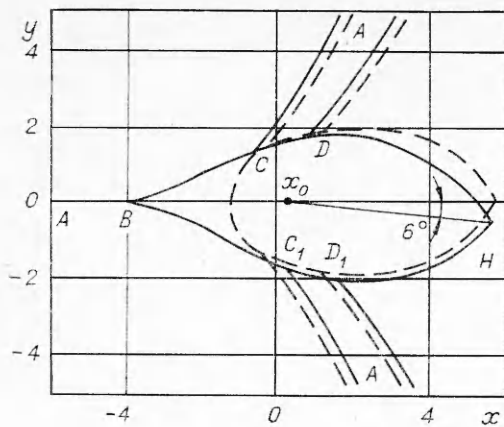
Второе уравнение (19) не имеет действительных корней. Таким образом, для координат x, y кормовой точки H получим

$$(20) \quad \begin{aligned} x_H &= -(\kappa + 1)^{1/3} (3 + b_1^2/3), \quad y_H = (\kappa + 1)^{1/3} b_1 [15/4 - \\ &\quad - (7/3)b_1 + (1114/81)b_1^4]. \end{aligned}$$

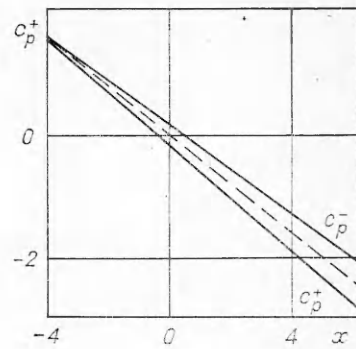
На плоскости годографа точке H соответствуют две точки H_1 и H_2 с координатами

$$\theta_{1,2} = 3^{-1}f_{1,2}(3 - 2f_{1,2}^2), \quad \eta_{1,2} = 1 - f_{1,2}^2.$$

Точки H_1^0, H_2^0, H_1, H_2 для случаев $b_1 = 0; -0,1$ изображены на фиг. 1. При подходе к кормовой точке по верхней и нижней стороне профиля соответствующие векторы скорости имеют вертикальные составляющие, направленные навстречу друг другу, что приводит к образованию хвостов



Ф и г. 3



Ф и г. 4

вых ударных волн, которые, однако, не влияют на течение вдоль границы профиля. На фиг. 2, 3 построены профили на физической плоскости для случаев $b_1 = 0; -0,1$, показаны звуковые линии CA, C_1A ($\eta = 0$) и предельные характеристики DA, D_1A ($\theta \mp (2/3)(-\eta)^{3/2} = 0$), построенные согласно соотношениям [4] $y = \psi, x = (\kappa + 1)^{1/3}\phi$. В случае $b_1 = 0$ построенное решение описывает обтекание симметричного профиля (16). С изменением b_1 профиль деформируется. При этом для $|b_1| \leq 0,1$ передняя часть ($\approx 40\%$ длины) остается практически неизменной, за исключением малой окрестности носовой точки ($\approx 2\%$ длины). Кормовая часть профиля ($\approx 60\%$ длины), почти не меняя своей формы, поворачивается на некоторый угол α относительно направления набегающего потока. Для $b_1 = -0,1$ имеем $\alpha = 6^\circ$. Общая площадь профиля при этом практически не меняется. Найдем траекторию кормовой точки в системе координат, привязанной к носовой части профиля. Координаты носовой точки B получаются при $f = b_1/3$ из соотношений (18)

$$x_B = -(\kappa + 1)^{1/3}(3 + b_1^2/3), \quad y_B = 0.$$

Таким образом, перемещение Δx_B носовой точки при изменении параметра b_1 определено выражением $\Delta x_B = b_1^2/3$. Тогда, смещая начало системы координат x, y на величину Δx_B , для координаты x кормовой точки H получим выражение

$$(21) \quad x_H = (\kappa + 1)^{1/3} [9/2 + (5/3) b_1^2].$$

Здесь начало координат совпадает с проекцией на ось звуковой точки профиля, взятой при $b_1 = 0$. Представляя уравнение движения кормовой точки в виде $y^2 + (x - x_0)^2 = R^2$, получим на основании (21) и второго соотношения (20)

$$x_0 = (9/32)(\kappa + 1)^{1/3}, \quad R = R_0 + O(b_1^3), \quad R_0 = (135/32)(\kappa + 1)^{1/3}.$$

Величины x_0, R_0 определяют соприкасающуюся окружность к траектории кормовой точки.

Определим аэродинамические характеристики профиля. Как известно [4], коэффициент давления c_p в точке профиля определяется выражением $c_p = 2(\kappa + 1)^{-1/3}\eta$. Распределение величин c_p^\pm вдоль хорды профиля для верхней и нижней сторон при $b_1 = -0,1$ в сравнении с линейным распределением $c_p = -(2/3)(\kappa + 1)^{-2/3}x$ в случае симметричного профиля $b_1 = 0$ дано на фиг. 4. Используя формулы

$$c_y = l^{-1} \oint_L c_p dx, \quad c_x = -l^{-1} \oint_L c_p dy, \quad c_m = l^{-2} \oint_L (x - x_1) c_p dx,$$

подсчитаем коэффициенты подъемной силы c_y , сопротивления c_x и момента

c_M , взятого относительно точки $x = x_1, y = 0$. Здесь l — длина хорды профиля: $l = x_H - x_D$; L — граница профиля. Производя вычисления, получим

$$c_y = (8/9) \sqrt{10} (\kappa + 1)^{-1/3} b_1 [1 - (2/9) b_1^2]^{1/2} = \sqrt{10} (\kappa + 1)^{-1/3} \alpha + O(\alpha^2),$$

$$c_x = (8/21) \sqrt{10} (\kappa + 1)^{-1/3} \text{ при } b_1 = 0,$$

$$c_M = (4/3)^3 0,04 (\kappa + 1)^{-2/3} b_1 [x_1 v^3 + 3 (\kappa + 1)^{1/3} (v^2 - 3v^5/5 + b_1^2/9)].$$

Найдем центр давления G , т. е. точку приложения подъемной силы. Для этого положим $c_M = 0$, откуда

$$x_1 = 3 (\kappa + 1)^{1/3} v^{-3} [(3/5)v^5 - v^2 - b_1^2/9] = 1,5 (\kappa + 1)^{1/3} + O(b_1^2).$$

В заключение отметим, что все приведенные расчеты выполнены для профиля с относительной толщиной $\tau_0 = (8/25) \sqrt{1,5} \approx 0,39$, $\kappa = 1,4$. Для обобщения полученных результатов на профиль произвольной относительной толщины τ следует все аэродинамические коэффициенты домножить на величину $(\tau/\tau_0)^{2/3}$ в силу закона аэродинамического подобия для околозвуковых течений газа. Кроме того, закон околозвуковой стабилизации позволяет распространить полученные результаты на случай высокой дозвуковой скорости набегающего потока газа.

Авторы благодарят С. В. Фальковича за полезное обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Франкль Ф. И. К теории сопел Лавалья. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1945, т. 9, № 5.
2. Франкль Ф. И. Исследования по теории крыла бесконечного размаха, движущегося со скоростью звука. — ДАН СССР, 1947, т. 57, № 7.
3. Фалькович С. В. К теории сопла Лавалья. — ПММ, 1946, т. 10, вып. 4.
4. Гудерлей К. Г. Теория околозвуковых течений. М.: ИЛ, 1960.
5. Трикоми Ф. О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа. М.: Гостехиздат, 1947.

Поступила 25/VII 1983 г.

УДК 532.525.2 : 534.83

К РАСЧЕТУ ТЕЧЕНИЯ В ОСНОВНОМ УЧАСТКЕ СВЕРХЗВУКОВОЙ СТРУИ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ТОРЦА СОПЛА

П. А. Неццет, Е. А. Капустин, О. Э. Шлик

(Днепропетровск)

Известно, что на распространение затопленной сверхзвуковой струи существенно влияет акустическая обстановка в окружающем пространстве, в том числе расположение и размеры акустических экранов, отражающих собственное излучение струи, что приводит к возникновению при некоторых условиях резонансного эффекта, так называемой акустической обратной связи. Условиями возникновения акустической обратной связи является наличие в спектре шума, выделяющегося по амплитуде дискретного тона [1—3], что связано с режимом истечения струи из сопла (числом Маха сопла M_a и нерасчетностью истечения $n = p_a/p_{вн}$), а также наличие акустических экранов, отражающих излучение обратно на струю [4]. Чаще всего встречающимся и наиболее близко расположенным к чувствительной зоне струи отражающим экраном является торец сопла.

Ранее исследовалось влияние диаметра торца сопла на динамические характеристики струи [5, 6] и получены формулы для определения избыточного давления торможения на оси струи в основном турбулентном участке $\bar{p} = p_{0a}/p_{0\infty}$ (p_{0a} — давление, соответствующее конкретному торцевому экрану с диаметром d_T , $p_{0\infty}$ — давление, соответствующее бесконечному торцевому экрану (плоская стенка)). Схема построения кривой изменения \bar{p}_0 в зависимости от $\bar{d} = d_T/d_a$, принятая в [5], приведена на фиг. 1 ($M_a = 1,9$, $n = 0,8$, угол раствора сопла $\gamma = 40^\circ$).