

ГЕОФИЗИКА

УДК 532.7:537.3:550.372

О ВОЗМОЖНОСТЯХ ЭЛЕКТРОРАЗВЕДКИ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ  
ВОДОНЕФТЯНЫХ СЛОИСТЫХ СИСТЕМ

С.В. Доровский, В.Н. Доровский\*

*Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2, Россия*  
*\* Институт геологии и минералогии СО РАН, 630090, Новосибирск, просп. Коптюга, 3, Россия*

Строится электрогидродинамическая теория водонефтяных слоистых систем. Выявлены факторы, позволяющие управлять устойчивостью таких структур. Показано, что при наличии анизотропии диэлектрической восприимчивости, проводимости и периодического электрического тока в распределенной системе возникает параметрический резонанс, приводящий к разрушению всей структуры.

*Электродинамика, слоистые жидкие диэлектрики, водонефтяные системы, облитерация, методы электроразведки.*

THE POTENTIAL OF ELECTRICAL PROSPECTING IN STUDYING THE STABILITY  
OF OIL-WATER LAYERED SYSTEMS

S.V. Dorovsky and V.N. Dorovsky

We develop the electric-hydrodynamic theory of oil-water layered systems and reveal factors that allow control over the stability of these systems. Anisotropy of dielectric susceptibility, conductivity, and periodic current in a distributed system causes parametric resonance and makes the system prone to collapse.

*Electrodynamics, layered liquid dielectrics, oil-water systems, obliteration, methods of electrical prospecting*

ВВЕДЕНИЕ

Нефть в пластах, вытесняемая водными потоками, насыщена полярными составляющими, благодаря чему в процессе фильтрации в трещиноватых зонах коллекторов формируются водонефтяные слоистые системы. Трещины в процессе эксплуатации зарастают, блокируя транспортную структуру коллекторов, что выводит значительные нефтеносные области из режимов водного вытеснения. Восстановление проницаемости коллектора возможно лишь в условиях разрушения слоистых водонефтяных структур. В качестве одного из возможных механизмов разрушения таких образований можно рассмотреть параметрический резонанс как явление, наиболее согласующееся с данными полевых экспериментов и характером добычи обводненных месторождений. Рассматривая слои водонефтяной системы достаточно тонкими, но макроскопическими, было предложено [1, 2] ввести в рассмотрение поверхностную энергию границы раздела слоев в единице объема среды, зависящую от концентрации газа, содержащегося в системе. Полевые эксперименты [3] устанавливают четкую корреляцию между вибрационным воздействием, выходом полярных составляющих нефти и ненасыщенного газа. Для плотности деформационных искажений слоистой системы принималось выражение [1]

$$E_0 = e_0 + \frac{B}{8} \left[ \frac{\mathbf{b}^2}{q^2} - 1 \right]^2 + \frac{N}{2q^2} (\partial_i b_k)^2 + \\ + \sigma q \left[ \frac{|\mathbf{b}|}{b^3} - 1 \right] + \frac{\alpha}{2q^2} [(\mathbf{b}^2(\nabla\sigma)^2 - (\mathbf{b}\nabla\sigma)^2)].$$

Здесь вектор  $\mathbf{b} = \nabla W$ , функция  $W = \text{const}$  задает геометрическую форму слоев так, что в недеформированном состоянии  $W = qz$ , при малых деформациях  $W = q(z - u)$ ;  $\sigma = \sigma(c)$  — „поверхностное натяжение“ как функция концентрации газа  $c$ ;  $B, N$  — модули упругости;  $\alpha$  — параметр, характеризующий тангенциальные (по отношению к слоям) силы;  $q$  — количество слоев на единицу длины.

Первые два члена [4] обобщают известный вид [5] энергии деформационных искажений смектика, рассматриваемого в излагаемом контексте как элемент слоистой системы. В работе [1] представлена

полученная система динамических уравнений для газосодержащих структур. Кроме того, показано, что присутствие газовой фазы и введение понятия объемной плотности поверхностной энергии слоистой системы позволяет, с одной стороны, стабилизировать ее по отношению к механическим искажениям слоев [6], с другой — обеспечивает возможность параметрической неустойчивости при гармоническом длительном возмущении ее внешней границы [2].

Основой для развития параметрической неустойчивости является зависимость концентрации газа от деформационных искажений  $u$  в слоистой системе, если развитие возмущений рассматривается на фоне установившегося градиента концентрации газа. Поскольку плотность поверхностного натяжения, входящая параметром в динамические уравнения, зависит от концентрации газа, то получаем зависимость параметра системы от деформаций, которые при внешних периодических воздействиях обеспечивают необходимые условия параметрической неустойчивости. Такое акустическое воздействие соответствует, как правило, килогерцевому диапазону частот. Последнее обстоятельство, с экспериментальной точки зрения, создает проблемы переноса силового воздействия этого диапазона частот в толщи нефтеносных коллекторов. Значительно проще обеспечить силовое воздействие килогерцевой частоты методами электроразведки. Поскольку водонефтяные системы являются анизотропными диэлектриками, слабопроводящими электрический ток, возникает вопрос о развитии параметрической неустойчивости в системе при протекании переменного электрического тока достаточно малой амплитуды. Электродинамические неустойчивости хорошо исследованы в слоистых системах [6], однако вопрос о параметрическом воздействии малыми амплитудами в упомянутой постановке, насколько известно авторам, остается открытым. В настоящем сообщении анализируется возможность организации параметрической неустойчивости в слоистой системе при протекании электрического тока с целью ее разрушения.

#### ГИДРОДИНАМИКА СЛОИСТЫХ ДИЭЛЕКТРИКОВ С ТОКАМИ В ПРИСУТСТВИИ СТОРОННИХ ЗАРЯДОВ

Уравнения электродинамики жидких диэлектриков хорошо известны (см., например, [7]). Фрагменты электродинамики и механики слоистых анизотропных диэлектриков можно обнаружить в известной публикации [6]. Однако учет поверхностных эффектов и отсутствие последовательного объединения электродинамики и механики слоистых систем указывают на необходимость некоторого обобщения подхода с целью получения замкнутой системы уравнений, объединяющей электродинамику и механику слоистых диэлектриков с точностью до  $v^2/c_e^2$ , где  $c_e$  — электродинамическая постоянная,  $v$  — скорость гидродинамического течения.

В системе покоя жидкой частицы рассматриваемой среды для дифференциала плотности внутренней энергии  $E_0$  имеем выражение

$$dE_0 = TdS + \mu'd\rho + \mathbf{E}'d\mathbf{P}' - \mathbf{M}'d\mathbf{B}' + \mathbf{f}d\mathbf{b} + \Phi_{ik} dB_{ik} + Zdc + \xi da. \quad (1)$$

Здесь  $T$  — температура,  $S$  — энтропия единицы объема,  $\mu'$  — химический потенциал, связанный с частицей,  $c$  — концентрация газа,  $\mathbf{a} = \nabla c$ ,  $B_{ik} = \partial_i b_k$ . Здесь также введены векторы электрической и магнитной поляризации  $\mathbf{P}'$ ,  $\mathbf{M}'$ . Электрическое поле  $\mathbf{E}'$  и магнитное поле  $\mathbf{B}'$  связаны с соответствующими векторами поляризации соотношениями  $\mathbf{D}' = \mathbf{E}' + 4\pi\mathbf{P}'$ ,  $\mathbf{H}' = \mathbf{B}' - 4\pi\mathbf{M}'$ . Связь электромагнитного поля и поляризационных векторов с лабораторной системой отсчета определяется формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E} + \left(\frac{\mathbf{v}}{c_e} \wedge \mathbf{B}\right), \quad \mathbf{D}' = \mathbf{D} + \left(\frac{\mathbf{v}}{c_e} \wedge \mathbf{H}\right), \quad \mathbf{P}' = \mathbf{P}, \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{B} - \left(\frac{\mathbf{v}}{c_e} \wedge \mathbf{E}\right), \quad \mathbf{H}' = \mathbf{H} - \left(\frac{\mathbf{v}}{c_e} \wedge \mathbf{D}\right), \quad \mathbf{M}' = \mathbf{M} + \left(\frac{\mathbf{v}}{c_e} \wedge \mathbf{P}\right). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь принято во внимание, что  $\mathbf{M} \sim 1/c_e$ . Закон преобразования химического потенциала  $\mu' = \mu + \mu_*$  будет получен ниже. Формулы (2) означают, что вдоль траектории жидкой частицы имеет место соотношение

$$\frac{dE_0}{dt} = T \frac{dS}{dt} + \mu' \frac{d\rho}{dt} + \mathbf{E}' \frac{d\mathbf{P}'}{dt} - \mathbf{M}' \frac{d\mathbf{B}'}{dt} + \mathbf{f} \frac{d\mathbf{b}}{dt} + \Phi_{ik} \frac{dB_{ik}}{dt} + Z \frac{dc}{dt} + \xi \frac{da}{dt}.$$

Для перехода к переменным Эйлера воспользуемся преобразованием (2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_0}{\partial t} + v_i \partial_i E_0 &= T \left( \frac{\partial S}{\partial t} + v_i \partial_i S \right) + (\mu + \mu_*) \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \partial_i \rho \right) + Z \left( \frac{\partial c}{\partial t} + v_i \partial_i c \right) + \\ &+ \left[ \mathbf{E} + \left(\frac{\mathbf{v}}{c_e} \wedge \mathbf{B}\right) \right] \left( \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + v_i \partial_i \mathbf{P} \right) - \left[ \mathbf{M} + \left(\frac{\mathbf{v}}{c_e} \wedge \mathbf{P}\right) \right] \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + v_i \partial_i \mathbf{B} \right) + \end{aligned}$$

$$+ \mathbf{f} \left( \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + v_i \partial_i \mathbf{b} \right) + \boldsymbol{\xi} \left( \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + v_i \partial_i \mathbf{a} \right) + \Phi_{ik} \left( \frac{\partial B_{lk}}{\partial t} + v_i \partial_i B_{lk} \right). \quad (3)$$

Для последующих преобразований полученного выражения используем гидродинамические уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + \nabla(\mathbf{v}\mathbf{b}) = 0, \quad \frac{\partial B_{ik}}{\partial t} + \partial_i (v_\mu B_{k\mu} + b_\mu \partial_k v_\mu) = 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0, \quad \frac{\partial(\rho c)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho c\mathbf{v}) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \nabla(\mathbf{v}\mathbf{a}) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

и уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c_e} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c_e} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c_e} \mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho_e, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (5)$$

Здесь  $\mathbf{j}$  — плотность тока,  $\rho_e$  — плотность стороннего электрического заряда. Первые два уравнения системы (4) получаются из кинематического [1, 4] условия

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla W = 0 \quad (6)$$

последовательным дифференцированием. В связи с присутствием плотности тока проводимости в уравнениях Максвелла в правую часть закона сохранения энтропии следует включить производство энтропии ( $R$  — диссипативная функция)

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}(s\mathbf{v}) = \frac{R}{T}. \quad (7)$$

Закон сохранения импульса удобно представить в форме

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho v_i + \frac{(\mathbf{E} \wedge \mathbf{B})_i}{4\pi c_e} \right] + \partial_k (\rho v_i v_k - \Sigma_{ik}) = 0, \quad (8)$$

что не придает ему физического содержания до тех пор, пока не определен тензор напряжений  $\Sigma_{ik}$ . Для определения гидродинамической скорости получаем уравнение

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = -\rho v_k \partial_k v_i + \partial_k \Sigma_{ik} - \frac{\partial (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B})_i}{\partial t} \frac{1}{4\pi c_e}.$$

Уравнения Максвелла позволяют получить выражение

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_e} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B})_i = \frac{4\pi}{c_e} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B} \wedge \mathbf{P})_i - 4\pi (\mathbf{P} \partial_i \mathbf{E} + \mathbf{M} \partial_i \mathbf{B}) - \frac{4\pi}{c_e} (\mathbf{j} \wedge \mathbf{B}) + \\ + \partial_k \left[ B_k H_i + D_k E_i - \left( \frac{E^2 + B^2}{2} - 4\pi \mathbf{B}\mathbf{M} \right) \delta_{ik} \right] - E_i \operatorname{div} \mathbf{D}. \end{aligned}$$

Используя представленные формулы, выделим в левой части (3) полную энергию, а в правой — заменим производные по времени их значениями из соответствующих динамических уравнений,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( E_0 + \frac{\rho v^2}{2} + \frac{E^2 + B^2}{8\pi} \right) + v_i \partial_i E_0 - \frac{\partial (\rho v^2)}{\partial t} \frac{1}{2} - \frac{\partial (E^2 + B^2)}{\partial t} \frac{1}{8\pi} = \\ = R + T [-\operatorname{div}(S\mathbf{v}) + v_i \partial_i S] + \mu [-\operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) + v_i \partial_i \rho] - \mu_* \rho \operatorname{div} \mathbf{v} + \\ + \left( \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} - \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) + \left[ \left( \frac{\mathbf{v}}{c_e} \wedge \mathbf{B} \right) \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} - \left( \frac{\mathbf{v}}{c_e} \wedge \mathbf{P} \right) \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] + \\ + v_i \left[ \left( \frac{\mathbf{v}}{c_e} \wedge \mathbf{B} \right) \partial_i \mathbf{P} - \left( \frac{\mathbf{v}}{c_e} \wedge \mathbf{P} \right) \partial_i \mathbf{B} \right] + v_i (\mathbf{E} \partial_i \mathbf{P} - \mathbf{M} \partial_i \mathbf{B}) + \\ + \mathbf{f} [-\nabla(\mathbf{v}\mathbf{b}) + v_i \partial_i \mathbf{b}] + \boldsymbol{\xi} [-\nabla(\mathbf{v}\mathbf{a}) + v_i \partial_i \mathbf{a}] + \Phi_{lk} (-\partial_l [v_\mu B_{k\mu} + b_\mu \partial_k v_\mu] + v_i \partial_i B_{lk}). \end{aligned} \quad (9)$$

Вычислив из уравнений Максвелла производную

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{E^2 + B^2}{8\pi} \right) = -\frac{c_e}{4\pi} \operatorname{div} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) - \mathbf{j}\mathbf{E} - \left( \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} - \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right),$$

исключаем из уравнения (9) оставшиеся производные по времени. Тожественное преобразование

$$\Phi_{lk} (-\partial_l [v_\mu B_{k\mu} + b_\mu \partial_k v_\mu] + v_i \partial_i B_{lk}) =$$

$$= -\partial_i (\Phi_{ik} [\nu_\mu B_{k\mu} + b_\mu \partial_k \nu_\mu]) + \partial_i [(\mathbf{vb}) \partial_\mu \Phi_{\mu i}] + \nu_i \partial_k [\Phi_{\mu k} B_{\mu i} - b_i \partial_\mu \Phi_{\mu k}]$$

позволяет в последнем члене выделить полную дивергенцию. Выделив в оставшихся слагаемых „дивергентные“ части, приходим к выражению, которое в гидродинамике, с одной стороны, должно представлять закон сохранения энергии, с другой — выполняться тождественно

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( E_0 + \frac{\rho v^2}{2} + \frac{E^2 + B^2}{8\pi} \right) + \\ & + \operatorname{div} \left[ \left( \frac{\rho v^2}{2} + TS + \rho \mu \right) \mathbf{v} + \frac{c_e}{4\pi} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) + (f_i - \partial_\mu \Phi_{i\mu}) (\mathbf{bv}) + \xi_i (\mathbf{av}) + \Phi_{ik} (\nu_\mu B_{k\mu} + b_\mu \partial_k \nu_\mu) \right] = \\ & = R - (\mathbf{j} - \rho_e \mathbf{v}) \left[ \mathbf{E} + \left( \frac{\mathbf{v}}{c_e} \wedge \mathbf{B} \right) \right] - \left[ \rho \mu_* + \frac{\mathbf{v}}{c_e} (\mathbf{B} \wedge \mathbf{P}) \right] \operatorname{div} \mathbf{v} + \\ & + \nu_i \partial_k \left( \Sigma_{ik} + p \delta_{ik} + b_i (f_k - \partial_\mu \Phi_{k\mu}) + a_i \xi_k + B_{\mu i} \Phi_{\mu k} - \right. \\ & \left. - \left[ \frac{B_k H_i + D_k E_i}{4\pi} - \left( \frac{E^2 + B^2}{8\pi} - \mathbf{BM} \right) \delta_{ik} \right] + \frac{\nu_k}{c_e} (\mathbf{B} \wedge \mathbf{P})_i \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь введены инвариантное давление и диссипативная функция

$$p = -E_0 + TS + \mu \rho + \mathbf{EP}, \quad R = (\mathbf{j} - \rho_e \mathbf{v}) \left[ \mathbf{E} + \left( \frac{\mathbf{v}}{c_e} \wedge \mathbf{B} \right) \right].$$

Согласовывая предельные переходы к гидродинамическим уравнениям слоистых структур [1] и гидродинамике жидких диэлектриков [7], получаем связь двух химических потенциалов (которую можно интерпретировать как закон преобразования химического потенциала)

$$\rho \mu' = \rho \mu + \frac{\mathbf{v}}{c_e} (\mathbf{P} \wedge \mathbf{B}), \quad (11)$$

тензор напряжений

$$\begin{aligned} \Sigma_{ik} = & b_i (-f_k + \partial_\mu \Phi_{k\mu}) - a_i \xi_k - B_{\mu i} \Phi_{\mu k} + \\ & + \left[ \frac{B_k H_i + D_k E_i}{4\pi} - \left( \frac{E^2 + B^2}{8\pi} - \mathbf{BM} \right) \delta_{ik} \right] - p \delta_{ik} - \frac{\nu_k}{c_e} (\mathbf{B} \wedge \mathbf{P})_i \end{aligned} \quad (12)$$

и закон сохранения энергии

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( E_0 + \frac{\rho v^2}{2} + \frac{E^2 + B^2}{8\pi} \right) + \\ & + \operatorname{div} \left[ \rho \mathbf{v} \left( \frac{v^2}{2} + \mu + TS \right) + \frac{c_e}{4\pi} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) + (f_i - \partial_\mu \Phi_{i\mu}) (\mathbf{bv}) + \xi_i (\mathbf{av}) + \Phi_{ik} (\nu_\mu B_{k\mu} + b_\mu \partial_k \nu_\mu) \right] = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Выражение для диссипативной функции движущихся диэлектриков с утечкой приводит к линейному диссипативному соотношению

$$j_i = \rho_e \nu_i + \sigma_{ik} \left[ \mathbf{E} + \left( \frac{\mathbf{v}}{c_e} \wedge \mathbf{B} \right) \right]_k.$$

Как и следовало ожидать, гидродинамический перенос стороннего заряда не дает вклада в омическую диссипацию. Уравнения (4)—(8), (13) представляют полную систему электрогидродинамических уравнений жидких диэлектриков, причем закон сохранения энергии (13) является тождественным следствием уравнений (4)—(8).

### ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В АНИЗОТРОПНОМ СЛОИСТОМ ДИЭЛЕКТРИКЕ

Полученные гидродинамические уравнения позволяют последовательно, без дополнительных предположений рассмотреть простейшую задачу для анализа возможности организации параметрической неустойчивости водонефтяной слоистой системы переменным электрическим током. Слоистую систему рассматриваем как жидкий анизотропный диэлектрик, находящийся во внешнем электрическом поле, в отсутствие намагниченности и газовой фазы. Пусть внешнее воздействие осуществляется протекающим в продольном (по оси  $z$ ) направлении неискаженной слоистой системы с  $W = q_s z$  переменным электрическим током с плотностью  $j_z(t)$  достаточно низкой частоты. Току соответствует электрическое поле  $E_z(t) = E$ .

Искажение слоистой структуры рассматривается как возмущение, которое, в свою очередь, приводит к возмущению электрического поля. Электрическое поле в главном порядке по  $1/c_e$  удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho_e, \quad \frac{\partial\rho_e}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \\ j_i &= \rho_e v_i + \sigma_{ik} E_k, \quad \sigma_{ik} = \sigma_{\perp} \delta_{ik} + (\sigma_{\parallel} - \sigma_{\perp}) n_i n_k. \end{aligned}$$

Структура тензора проводимости  $\sigma_{ik}$  соответствует смектической симметрии [5].

Для рассматриваемой системы в уравнении состояния выделим в явном виде зависимость от электрического поля. Для покоящейся частицы внутренняя энергия  $E_0$  имеет вид

$$dE_0 = TdS + \mu'd\rho + \mathbf{f}d\mathbf{b} + \mathbf{E}'d\mathbf{P}'. \quad (14)$$

Одновременно тензор диэлектрической восприимчивости связывает поляризуемость с электрическим полем  $P'_i = \chi_{ik} E'_k$ . Полагая, что восприимчивость  $\chi_{ik}$  не зависит от электрического поля, вычисляем, используя два последних соотношения, искомые поправки:

$$\begin{aligned} E_0 &= U + \frac{\chi_{ik}}{2} E'_i E'_k, \quad \mu = \frac{\partial U}{\partial\rho} - \frac{\partial\chi_{ik}}{\partial\rho} \frac{E'_i E'_k}{2} - \mu_*, \\ f_v &= \frac{\partial U}{\partial b_v} - \frac{\partial\chi_{ik}}{\partial b_v} \frac{E'_i E'_k}{2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Причем

$$dU = \frac{\partial U}{\partial S} dS + \frac{\partial U}{\partial\rho} d\rho + \frac{\partial U}{\partial b_v} db_v.$$

При вычислении использовалась симметрия тензора диэлектрической восприимчивости  $\chi_{ik} = \chi_{ki}$ .

Для вычисления соответствующих поправок к гидродинамическому давлению  $p$  удобно перейти из (14) к энергии  $e = E_0/\rho$  и энтропии  $s = S/\rho$  единицы массы

$$de = (-E_0 + TS + \mu\rho) \frac{d\rho}{\rho^2} + Tds + \mu_* \frac{d\rho}{\rho} + \frac{f_i}{\rho} db_i + \frac{\mathbf{E}'}{\rho} d\mathbf{P}'.$$

Выражение для давления перепишем в виде

$$p = -E_0 + TS + \mu\rho + \mathbf{E}\mathbf{P} = -E_0 + TS + \mu\rho + \mathbf{E}'\mathbf{P}' - (\mathbf{B} \wedge \mathbf{P}) \frac{\mathbf{v}}{c_e}.$$

Принимая во внимание конкретный вид функции  $\mu_*$  (см. (11)), получаем

$$d\left(e - \frac{\mathbf{E}'\mathbf{P}'}{\rho}\right) = p \frac{d\rho}{\rho^2} + Tds + \frac{f_i}{\rho} db_i - \frac{\mathbf{P}'}{\rho} d\mathbf{E}'.$$

Последняя формула позволяет вычислить вклад электрического поля в давление

$$p = \rho^2 \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\frac{U}{\rho}\right)_{s, \mathbf{b}} - \rho^2 \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\frac{\chi_{ik}}{2\rho}\right)_{s, \mathbf{b}} E'_i E'_k.$$

Преследуя методические цели, ограничимся случаем, когда восприимчивость не зависит от плотности,

$$p = \rho^2 \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\frac{U}{\rho}\right)_{s, \mathbf{b}} + \frac{\chi_{ik}}{2} E'_i E'_k.$$

Используя систему (4)–(8), получим динамические уравнения, описывающие взаимодействие деформаций и возмущений электрического поля в главном порядке по  $1/c$ . Закон сохранения импульса позволяет записать

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_k \partial_k v_i = \mathbf{P} \partial_i \mathbf{E} + \frac{E_i \operatorname{div} \mathbf{D}}{4\pi} - \partial_i p + \partial_k (-b_i f_k). \quad (16)$$

Для вычисления  $\mathbf{f}$  воспользуемся формулой (15)

$$f_v = \frac{\partial U}{\partial b_v} - \frac{E_i E_k}{2} \frac{\partial\chi_{ik}}{\partial b_v} = \frac{\partial U}{\partial b_v} - \frac{(\chi_{\parallel} - \chi_{\perp}) \mathbf{b}\mathbf{E}}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \left( E_v - \frac{\mathbf{b}\mathbf{E} (b_1 \delta_{1v} + b_2 \delta_{2v} + b_3 \delta_{3v})}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \right),$$

где использована явная зависимость тензора поляризуемости от деформационных искажений

$$\chi_{ik} = \chi_{\perp} \delta_{ik} + (\chi_{\parallel} - \chi_{\perp}) n_i n_k,$$

$n_i = \partial_i W / |\nabla W|$  — нормаль к деформированным слоям системы. Линеаризуем уравнение (16) относительно невозмущенного состояния. Вычисления для функции  $\mathbf{f}$  дают

$$\begin{aligned} f_1 &= \tilde{f}_1 + \Phi_1 = \tilde{f}_1 - \frac{(\chi_{\parallel} - \chi_{\perp})}{q_s} \left( EE_x + E^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \sigma \frac{\partial u}{\partial x}, \\ f_2 &= \tilde{f}_2 + \Phi_2 = \tilde{f}_2 - \frac{(\chi_{\parallel} - \chi_{\perp})}{q_s} \left( EE_y + E^2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \sigma \frac{\partial u}{\partial y}, \\ f_3 &= \tilde{f}_3 + \Phi_3 = \tilde{f}_3. \end{aligned}$$

Здесь использовано

$$n_x = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad n_y = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad n_z = 1, \quad \tilde{f}_i = \frac{\partial U}{\partial b_i}, \quad U = U_0 + \frac{B}{8} \left[ \frac{b^2}{q^2} - 1 \right]^2.$$

В тензоре напряжений в (16) выделим две части:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_k \partial_k v_i = \mathbf{P} \partial_i \mathbf{E} + \frac{E_i \operatorname{div} \mathbf{D}}{4\pi} + \partial_k (-p \delta_{ik} - b_i \tilde{f}_k) + \partial_k (-b_i \Phi_k)$$

и линеаризуем уравнение относительно малых искажений структуры. Отметим, что тензор  $-b_i \Phi_k$  несимметричен, но может в линеаризованном виде относительно просто приведен к симметричному виду [5], причем

$$\partial_k (-b_i \Phi_k) = [(\chi_{\parallel} - \chi_{\perp}) (-E_* \Delta_{\perp} \varphi + E_*^2 \Delta_{\perp} u) + q \sigma \Delta_{\perp} u] \delta_{i3}.$$

Здесь  $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ . Для  $\rho_e$  получаем выражение

$$\rho_e = \frac{\operatorname{div} \mathbf{D}}{4\pi} = -\frac{\Delta \varphi}{4\pi} - \chi_{\perp} \Delta_{\perp} \varphi - \chi_{\parallel} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - (\chi_{\parallel} - \chi_{\perp}) E_* \Delta_{\perp} u.$$

Линеаризованное уравнение (6)  $v_z = \partial u / \partial t$  приводит в линейном приближении к уравнению, определяющему деформацию

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial z} + E \rho_e + B \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - (\chi_{\parallel} - \chi_{\perp}) E \Delta_{\perp} \varphi + [q \sigma + (\chi_{\parallel} - \chi_{\perp}) E^2] \Delta_{\perp} u. \quad (17)$$

При выводе использован результат линеаризации  $\partial_k (-b_i \tilde{f}_k) = B \partial^2 u / \partial z^2$ . Вектор  $\mathbf{P} \partial_i \mathbf{E}$  в линейном приближении не дает вклада в уравнение движения. Уравнение (17) замыкается двумя линеаризованными уравнениями Максвелла

$$\begin{aligned} \rho_e &= -\left( \chi_{\perp} + \frac{1}{4\pi} \right) \Delta_{\perp} \varphi - \left( \chi_{\parallel} + \frac{1}{4\pi} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - (\chi_{\parallel} - \chi_{\perp}) E \Delta_{\perp} u, \\ \frac{\partial \rho_e}{\partial t} - \sigma_{\perp} \Delta_{\perp} \varphi - \sigma_{\parallel} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= (\sigma_{\parallel} - \sigma_{\perp}) E \Delta_{\perp} u. \end{aligned}$$

Для исключения давления из представленных уравнений ограничимся приближением, при котором плотность успеваеет подстроиться под изменяющееся расстояние между слоями. Будем считать, что плотность соответствует равновесному состоянию, соответствующему фиксированному значению производной  $\partial u / \partial z$ . Равновесное значение плотности получим из условия

$$\mu = \frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{\gamma B}{\rho_0} \frac{\partial u}{\partial z} + \mu_0 + \left( \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right) (\rho - \rho_0) = \text{const}.$$

В вычислениях ниже принимается уравнение состояния вида  $\mu = \mu(\rho)$ . Выбрав константу из условия соответствия начальной плотности недеформированному состоянию ( $u = 0$ ), находим связь

$$\rho = \rho_0 - \frac{\gamma B}{\rho_0} \left( \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)^{-1} \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (18)$$

Здесь все термодинамические производные определяются значениями термодинамических параметров начального невозмущенного состояния

$$p = \gamma B \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial \rho} (\rho - \rho_0), \quad A_0 = B \left[ \frac{1 - \gamma}{\rho_0} + \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\gamma}{\rho_0^2} \left( \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)^{-1} \right], \quad \gamma = \frac{\partial \ln q}{\partial \ln \rho}.$$

Таким образом, в принятом приближении самосогласованное изменение объемного заряда и деформационных искажений слоистой структуры при периодическом изменении продольного электрического тока описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= A_0 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left( \frac{q\sigma}{\rho_0} + \frac{(\chi_{\parallel} - \chi_{\perp}) E^2}{\rho_0} \right) \Delta_{\perp} u + \frac{E}{\rho_0} [\rho_e - (\chi_{\parallel} - \chi_{\perp}) \Delta_{\perp} \varphi], \\ \rho_e &= - \left( \frac{1}{4\pi} + \chi_{\perp} \right) \Delta_{\perp} \varphi - \left( \frac{1}{4\pi} + \chi_{\parallel} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - (\chi_{\parallel} - \chi_{\perp}) E \Delta_{\perp} u, \\ \frac{\partial \rho_e}{\partial t} - \sigma_{\perp} \Delta_{\perp} \varphi - \sigma_{\parallel} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= (\sigma_{\parallel} - \sigma_{\perp}) E \Delta_{\perp} u \end{aligned}$$

или в Фурье-представлении  $[u, \varphi, \rho_e] \rightarrow [u(t), \varphi(t), \rho_e(t)] \exp(\mathbf{kx})$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= - \left( A_0 k_z^2 + \frac{q\sigma}{\rho_0} k_{\perp}^2 + \frac{(\chi_{\parallel} - \chi_{\perp}) E^2}{\rho_0} k_{\perp}^2 \right) u + \frac{E}{\rho_0} [\rho_e + k_{\perp}^2 (\chi_{\parallel} - \chi_{\perp}) \varphi], \\ \rho_e &= [(1/4\pi + \chi_{\perp}) k_{\perp}^2 + (1/4\pi + \chi_{\parallel}) k_z^2] \varphi + (\chi_{\parallel} - \chi_{\perp}) E k_{\perp}^2 u, \\ \frac{\partial \rho_e}{\partial t} + (\sigma_{\perp} k_{\perp}^2 + \sigma_{\parallel} k_z^2) \varphi &= - (\sigma_{\parallel} - \sigma_{\perp}) E k_{\perp}^2 u. \end{aligned} \quad (19)$$

В системе (19) исключим потенциал  $\varphi$ , примем внешнее воздействие в виде  $E = E_0 \sin(\omega t)$  и перепределим плотность стороннего электрического заряда  $\rho_e = \theta E_0 \kappa$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \kappa}{\partial t} + \lambda \kappa &= \sin(\omega t) u, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + [\omega_0^2 + \beta E_0^2 \sin^2(\omega t)] u &= \mu \theta E_0^2 \sin(\omega t) \kappa. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} \lambda &= Q [\sigma_{\perp} k_{\perp}^2 + \sigma_{\parallel} k_z^2], \quad \theta = k^2 k_{\perp}^2 Q [\sigma_{\perp} (1/4\pi + \chi_{\parallel}) - \sigma_{\parallel} (1/4\pi + \chi_{\perp})], \\ \beta &= \frac{k^2 k_{\perp}^2}{\rho_0} Q (\chi_{\parallel} - \chi_{\perp}) (1/4\pi + \chi_{\parallel}), \quad \mu = \frac{k^2}{\rho_0} Q (1/4\pi + \chi_{\parallel}), \\ \omega_0 &= \sqrt{A_0 k_z^2 + \frac{q\sigma}{\rho_0} k_{\perp}^2}, \quad Q = [k_{\perp}^2 (1/4\pi + \chi_{\perp}) + k_z^2 (1/4\pi + \chi_{\parallel})]^{-1}. \end{aligned} \quad (21)$$

Пусть  $\beta E_0^2, \mu \theta E_0^2$  — малые величины, что связано с достаточно малыми значениями амплитуды  $E_0$  электрического поля. В уравнениях (20) от переменных  $u, \dot{u}, \kappa$  удобно перейти к новым переменным  $\psi, \dot{\psi}, \kappa_0$

$$u = \psi \sin \psi, \quad \dot{u} = \omega_0 \psi \cos \psi, \quad \kappa = \kappa_0 e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \psi \int_0^t e^{\lambda t} \sin(\omega t) \sin \psi dt.$$

Введенное преобразование позволяет представить систему уравнений (20) в виде, удобном для асимптотического анализа [8, 9]:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \omega, \quad \dot{\kappa}_0 = - \dot{\psi} \int_0^t e^{\lambda t} \sin \psi_{\omega} \sin \psi dt, \\ \dot{\psi} &= \omega_0 + \frac{\beta E_0^2}{\omega_0} \sin^2 \psi_{\omega} \sin^2 \psi - \frac{\mu \theta E_0^2 \sin \psi_{\omega} \sin \psi}{\omega_0 \psi} (\kappa_0 e^{-\lambda t} + \psi I), \\ \dot{\psi} &= - \frac{\beta E_0^2}{\omega_0} \psi \sin^2 \psi_{\omega} \sin \psi \cos \psi + \frac{\mu \theta E_0^2 \sin \psi_{\omega} \cos \psi}{\omega_0} (\kappa_0 e^{-\lambda t} + \psi I). \end{aligned}$$

Для выделения быстрых и медленных переменных из третьего уравнения следует вычесть первое

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= -\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\beta E_0^2}{\omega_0} \sin^2(\psi - \alpha) \sin^2 \psi - \frac{\mu \theta E_0^2}{\omega_0} \frac{\sin(\psi - \alpha) \sin \psi}{\nu} (\kappa_0 e^{-\lambda t} + \nu I), \\ \dot{\nu} &= -\frac{\beta E_0^2}{\omega_0} \nu \sin^2(\psi - \alpha) \sin \psi \cos \psi + \frac{\mu \theta E_0^2}{\omega_0} \sin(\psi - \alpha) \cos \psi (\kappa_0 e^{-\lambda t} + \nu I), \\ \dot{\psi} &= \omega_0 + \frac{\beta E_0^2}{\omega_0} \sin^2(\psi - \alpha) \sin^2 \psi - \frac{\mu \theta E_0^2}{\omega_0} \frac{\sin(\psi - \alpha) \sin \psi}{\nu} (\kappa_0 e^{-\lambda t} + \nu I), \\ \dot{\kappa}_0 &= -\dot{\nu} \int_0^t e^{\lambda t} \sin(\psi - \alpha) \sin \psi dt.\end{aligned}$$

Здесь

$$\omega - \omega_0 = \varepsilon/2, \quad \alpha = \psi - \psi_0, \quad I = e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda t} \sin(\psi - \alpha) \sin \psi dt.$$

Расстройка  $\varepsilon$  является величиной одного порядка малости с  $\beta E_0^2$ ,  $\mu \theta E_0^2$ . Очевидно  $\psi$  является быстрой переменной,  $\alpha$  — медленной. Осреднение двух первых уравнений по быстрой переменной приводит к результату

$$\begin{aligned}\dot{\nu} &= \left( \frac{\sin 2\alpha}{8\omega_0} \beta E_0^2 - \frac{\sin 2\alpha}{8\lambda\omega_0} \mu \theta E_0^2 - \frac{1}{4(\lambda^2 + \omega_0^2)} \mu \theta E_0^2 \right) \nu, \\ \dot{\alpha} &= -\frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{4\omega_0} \left( 1 + \frac{\cos 2\alpha}{2} \right) \beta E_0^2 - \frac{\cos^2 \alpha}{4\lambda\omega_0} \mu \theta E_0^2 - \frac{\lambda}{8\omega_0(\lambda^2 + 4\omega_0^2)} \mu \theta E_0^2.\end{aligned}\quad (22)$$

Вычисление среднего от  $I$  проведено в главном порядке по малому параметру  $\varepsilon$ .

Границы области параметрической неустойчивости определим в главном порядке по компонентам тензора проводимости. Первое уравнение системы (22) приводит к двум значениям:  $\cos^2 \alpha_1 = 1$ ,  $\cos^2 \alpha_2 = 0$ . При этом второе уравнение определяет границы области параметрической неустойчивости

$$\varepsilon_1 = \left( 3\beta - 2\mu \frac{\theta}{\lambda} \right) \frac{E_0^2}{4\omega_0}, \quad \varepsilon_2 = \beta \frac{E_0^2}{4\omega_0}.$$

Здесь  $\theta$  и  $\mu$  рассматриваются как величины одного порядка малости относительно компонент тензора проводимости. Таким образом, граница  $\varepsilon_1$  области частот параметрической неустойчивости определяется исключительно эффектами, связанными с возникновением и ростом, по мере развития неустойчивости, плотности стороннего электрического заряда. Система (22) легко интегрируется

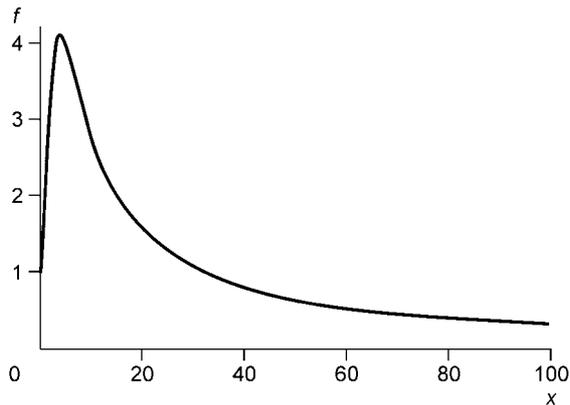
$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \alpha &= \frac{\sqrt{-\varepsilon + \varepsilon_1}}{\varepsilon - \varepsilon_2} \frac{c_0 g - 1}{c_0 g + 1}, \\ \nu &= \nu_0 \sqrt{c_0 g^2 + \frac{1}{c_0 g^2} + 2 \frac{4\omega_0 \varepsilon / E_0^2 - 2\beta + \mu \theta / \lambda}{\beta - \mu \theta / \lambda}},\end{aligned}\quad (23)$$

$g = g(t) = \exp[\sqrt{(\varepsilon - \varepsilon_2)(-\varepsilon + \varepsilon_1)} t]$ ;  $c_0, \nu_0$  — постоянные интегрирования.

Границы  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  области параметрической неустойчивости смещаются в зависимости от соотношения компонент тензора анизотропии и рассматриваемых мод возмущений. При  $\chi_{\parallel} - \chi_{\perp} > 0$  ( $\beta > 0$ ) возникает условие параметрической неустойчивости  $3\beta - 2\mu\theta/\lambda < 0$ . С учетом (21) неравенство накладывает ограничения на соотношение между продольными и поперечными возбуждаемыми модами, а также значениями компонент тензоров восприимчивости и проводимости

$$\left[ 3 \frac{\sigma_{\perp}}{\sigma_{\parallel}} - 2 - 2 \left( \frac{\sigma_{\perp}}{\sigma_{\parallel}} - 1 \right) \frac{\chi_{\parallel} + 1/4\pi}{\chi_{\parallel} - \chi_{\perp}} \right] < \frac{k_z^2}{k_{\perp}^2} \left[ 2 \left( \frac{\sigma_{\perp}}{\sigma_{\parallel}} - 1 \right) \frac{\chi_{\parallel} + 1/4\pi}{\chi_{\parallel} - \chi_{\perp}} - 1 \right].$$

Условие можно выполнить, например, при  $\sigma_{\perp} > \sigma_{\parallel}$ . При  $\chi_{\parallel} - \chi_{\perp} < 0$  ( $\beta > 0$ ) условие резонанса принимает вид  $3\beta - 2\mu\theta/\lambda > 0$ .



**График зависимости  $f(x)$  при значениях:**

$$\sigma_{\perp}(\chi_{\parallel} - \chi_{\perp})/v_0 = 0,01, \quad \sigma_{\parallel}/\sigma_{\perp} = 0,1, \quad A_0\rho_0/\sigma q = 0,1, \quad (1 + 4\pi\chi_{\parallel}) / (1 + 4\pi\chi_{\perp}) = 0,9.$$

Максимальное значение инкремента  $G = \sqrt{(\varepsilon - \varepsilon_2)(-\varepsilon + \varepsilon_1)}$  параметрической неустойчивости достигается при значении расстройки  $\varepsilon = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2$ , причем

$$G_{\max} = \frac{E_0^2}{4\omega_0} \left( \beta - \mu \frac{\theta}{\lambda} \right) = G_0 f,$$

$$f = \frac{1 + x^2}{\sqrt{1 + A_0\rho_0 x^2/\sigma q}} \left[ \frac{\sigma_{\perp}}{v_0} (\chi_{\parallel} - \chi_{\perp}) + \frac{1 + x^2}{1 + \sigma_{\parallel} x^2/\sigma_{\perp}} \right] \left( 1 + \frac{1 + 4\pi\chi_{\parallel}}{1 + 4\pi\chi_{\perp}} x^2 \right)^{-1},$$

$$x = \frac{k_z}{k_{\perp}},$$

$$G_0 = \frac{E_0^2}{\sqrt{\sigma q \rho_0}} \frac{k_{\perp} v_0}{4\sigma_{\perp}} \left( \chi_{\parallel} + \frac{1}{4\pi} \right), \quad v_0 = \sigma_{\perp} \left( \chi_{\parallel} + \frac{1}{4\pi} \right) - \sigma_{\parallel} \left( \chi_{\perp} + \frac{1}{4\pi} \right).$$

На рисунке представлена зависимость максимального значения инкремента от  $k_z/k_{\perp}$ . Принципиально, что инкремент имеет значение  $k_z/k_{\perp}$ , при котором развитие неустойчивости имеет минимальное время. Возникает взаимно-однозначное соответствие между частотой внешнего воздействия и модой, время развития которой минимально (поперечная мода  $k_{\perp}$  отбирается из дополнительного условия  $\varepsilon = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2$ ). Связь  $k_z = k_z(\varepsilon)$ ,  $k_{\perp} = k_{\perp}(\varepsilon)$  определяет кривую в плоскости  $k_z, k_{\perp}$ , на которой уже зафиксирована нейтральная кривая параметрической неустойчивости  $3\beta - 2\mu\theta/\lambda = 0$ . Все значения  $\varepsilon$ , при которых кривая лежит в зоне, где выполняется условие  $3\beta - 2\mu\theta/\lambda < 0$ , являются частотами внешнего воздействия, при которых реализуется параметрическая неустойчивость системы. Следует отметить, что максимум у инкремента существует только при введении в систему поверхностного натяжения, в отсутствие которого экстремальное значение достигается при минимальном возможном значении  $k_z$ . Представленная простейшая модель слоистой системы указывает, что параметрический резонанс в анизотропных слоистых водонефтяных структурах, обусловленный протекающими переменными токами достаточно малой амплитуды, может представлять реальный инструмент разрушения облитерационных водонефтяных систем.

Работа выполнена при финансовой поддержке Сибирского отделения РАН (междисциплинарные интеграционные проекты № 103; 1.6; 46), Президиума РАН (программы № 16, № 14, проект № 115), РФФИ (проекты № 03-01-00162, 04-01-00900).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Dorovsky V.N., Dorovsky S.V.** A hydrodynamic model of water-oil layered systems containing gas // *Math. Comput. Mod.*, 2002, v. 35, p. 751—757.
2. **Dorovsky V.N., Belonosov V.S., Belonosov A.S.** Numerical investigation of parametric resonance in water-oil structures containing gas // *Math. Comput. Mod.*, 2003, v. 36, p. 203—209.
3. **Курленя М.В., Сердюков С.В.** Интенсификация добычи нефти при низкочастотном виброрейсическом воздействии // *Горный информационно-аналитический бюллетень*, 2004, № 5, с. 29—34.
4. **Кац Е.И., Лебедев В.В.** Динамика жидких кристаллов. М., Наука, 1988, 148 с.
5. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Теоретическая физика, Т. VII. Теория упругости. М., Наука, 1987, 246 с.
6. **Пикин С.А.** Структурные превращения в жидких кристаллах. М., Наука, 1981, 336 с.

7. **де Гроот С.Р., Сатторп Л.Г.** Электродинамика. М., Наука, 1982, 560 с.
8. **Митропольский Ю.А.** Метод усреднения в нелинейной механике. Киев, Наук. думка, 1971, 273 с.
9. **Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Наука, 1974, 503 с.

*Рекомендована к печати 18 марта 2005 г.  
М.И. Эповым*

*Поступила в редакцию  
19 января 2005 г.*