

ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ ЗАЖИГАНИЯ

А. Э. Аверсон, В. В. Барзыкин, А. Г. Мержанов
(Москва)

В данной работе с помощью предложенного ранее авторами приближенного метода [1] рассматриваются динамические режимы зажигания, т. е. такие режимы, у которых закономерности теплообмена между внешним источником и зажигаемым веществом зависят явно от времени. Кроме того, для частных случаев рассматриваются: постоянная температура поверхности, постоянный тепловой поток, ньютоновский теплообмен с источником постоянной температуры; проводится сопоставление полученных результатов с результатами других авторов.

1. ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД

Анализ нестационарной картины теплового зажигания, проведенный с помощью электронно-вычислительных машин, показывает, что при протекании процесса зажигания можно выделить две существенно различные стадии. Во время первой стадии исходное вещество ведет себя как инертное тело, т. е. нагрев вещества происходит практически только за счет тепла, поступающего от внешнего источника (создание прогретого слоя). Во время второй стадии становится существенным протекание химической реакции в этом слое, тепловое самоускорение которой приводит к собственно зажиганию. Для обычно рассматриваемых невырожденных режимов [2] длительность второй стадии намного меньше общего времени задержки зажигания.

Это обстоятельство позволяет для расчета основных характеристик процесса зажигания использовать решения, полученные в теории теплопроводности для инертного тела, дополнив их некоторым условием зажигания.

Предложенное в [1] условие зажигания имеет вид

$$q(t_3) = Q k_0 \int_0^{\infty} \left\{ \exp \left[- \frac{E}{RT(x, t_3)} \right] - \exp \left(- \frac{E}{RT_n} \right) \right\} dx, \quad (1.1)$$

где Q — тепловой эффект реакции (на единицу объема); k_0 — предэкспонент; E — энергия активации; R — универсальная газовая постоянная; $q(t_3)$ — тепловой поток от внешнего источника; T_n — начальная температура вещества; x — координата; t — время; t_3 — время задержки зажигания.

Выражение (1.1) фактически вытекает из описанной выше нестационарной картины зажигания и имеет следующий физический смысл: зажигание наступает тогда, когда скорости теплоприхода от внешнего

источника и химической реакции становятся равными. Интеграл в правой части (1.1) отражает объемный характер протекания реакции в прогревом слое. Второй член в подынтегральном выражении записан для математической корректности, так как в теории зажигания важны режимы, для которых реакция при начальной температуре не существенна. Входящие в (1.1) функции $q(t)$ и $T(x, t)$ находятся из решения соответствующих уравнений теплопроводности без химических источников тепла. Зная $T(x, t)$, можно определить время задержки зажигания t_3 , а также температуру зажигания T_3 и запас тепла в прогревом слое Q_3 :

$$Q_3 = c \rho \int_0^{\infty} [T(x, t_3) - T_H] dx = \int_0^{t_3} q(t) dt, \quad (1.2)$$

где c, ρ — теплоемкость и плотность вещества соответственно.

Благодаря сильной экспоненциальной зависимости скорости химической реакции от температуры для вычисления интеграла (1.1) может быть применен метод Лапласа [3]. Тогда, если из решения «инертной задачи» следует, что наибольшая температура находится на поверхности вещества, из (1.1) получаем

$$q^2(t_3) = \lambda Q k_0 \frac{RT_3^2}{E} \exp\left(-\frac{E}{RT_3}\right), \quad (1.3)$$

$$T_3 = T(0, t_3). \quad (1.4)$$

Проведем анализ полученных соотношений.

1. Из (1.3) и (1.4) следует, что температура зажигания T_3 зависит как от теплофизических свойств вещества и кинетических констант реакции, так и от условий теплообмена с внешним источником. Выражение (1.3) аналогично выражению, полученному в [4] путем обработки результатов численного счета для температуры T_* , определяющей скорость протекания химической реакции при зажигании (ордината точки перегиба на кривой зависимости: температура поверхности — время). При этом T_3 близка по величине к T_* . Например, для случая $q = \text{const}$

$$T_3 - T_* \simeq 2,6 \frac{RT_*^2}{E}.$$

Отметим, что использование T_* как характеристики для динамических режимов в общем случае нецелесообразно.

2. Преобразованное условие зажигания (1.3) с точностью до постоянного множителя совпадает с условием Зельдовича [5], полученным при решении стационарной задачи, если за масштабную температуру принять T_3 . Действительно, переходя к безразмерным переменным,

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \frac{E}{RT_3^2} (T - T_3); & \xi &= \frac{x}{x_0}; & \tau &= \frac{x t}{x_0^2}; & \chi &= \frac{\lambda}{c \rho}, \\ x_0^2 &= \frac{\lambda}{Q k_0} \cdot \frac{RT_3^2}{E} \exp\left(\frac{E}{RT_3}\right); & \theta_H &= \frac{E}{RT_3^2} (T_3 - T_H). \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Из (1.3) получаем $\frac{\partial \theta}{\partial \xi}(0, \tau_3) = -1$, в то время как у Зельдовича [5] для случая постоянной температуры поверхности было получено $\frac{\partial \theta}{\partial \xi}(\tau_3) = -\sqrt{2}$.

3. Описанная выше картина развития процесса зажигания позволяет дать более простую трактовку условия зажигания (1.3). Поскольку профиль температуры в веществе к моменту зажигания достаточно крутой, а зависимость скорости тепловыделения от температуры экспоненциальная, то можно считать, что весь процесс происходит в узкой зоне вблизи поверхности вещества. Полагая, что зажигание наступает, когда выполняется равенство теплоприхода от источника и тепловыделения в этой зоне, можно записать:

$$q(t_3) = Q k_0 \exp\left(-\frac{E}{RT_3}\right) \cdot x_3. \quad (1.6)$$

Приравнявая (1.3) и (1.6), получаем выражение для определения ширины зоны химической реакции x_3 :

$$x_3 \equiv x_0 = \left[\frac{\lambda}{Q k_0} \cdot \frac{RT_3^2}{E} \exp\left(\frac{E}{RT_3}\right) \right]^{1/2}. \quad (1.7)$$

Из (1.7) видно, что ширина зоны химической реакции в этом случае определяется не только теплофизическими свойствами вещества, как это принято, например, в [6], но и кинетическими параметрами реакции, протекающей в веществе.

2. ПРИМЕНЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО МЕТОДА [1] К РЕШЕНИЮ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ¹

Рассмотрим задачу о динамических режимах зажигания вещества, в котором отсутствуют внутренние источники тепла нехимической природы. Согласно вышеописанному, для расчета t_3 , T_3 и Q_3 в этом случае необходимо найти решение уравнения

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

с соответствующими начальными и граничными условиями и подставить его в соотношения (1.2)—(1.4). Будем считать, что начальная температура вещества постоянна, т. е.

$$T(x, 0) = T(\infty, t) = T_n = \text{const}. \quad (2.2)$$

Второе граничное условие определяется условиями теплообмена с источником. Как известно из теории теплопроводности, на поверхности вещества могут осуществляться 3 типа теплообмена с внешним источником (граничные условия 1, 2 и 3-го рода). Рассмотрим эти случаи. Для общности рассмотрения задаваемую граничную функцию времени представим в виде степенного ряда.

¹ При динамических режимах в определенных условиях могут наблюдаться критические явления, которые в настоящей работе не исследуются.

1. Граничные условия 1-го рода:

$$x = 0 \quad T(t) = T_n + \sum_{n=0}^m A_n \cdot t^n. \quad (2.3)$$

Решение системы (2.1)–(2.3) с использованием условий (1.2)–(1.4) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} T_3 &= T_n + \sum_{n=0}^m A_n \cdot t_3^n, \\ \bar{q}(t_3) &= (\lambda c \rho)^{1/2} \sum_{n=0}^m A_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1/2)} t_3^{n-1/2} = \left[\lambda Q k_0 \frac{RT_3^2}{E} \exp\left(-\frac{E}{RT_3}\right) \right]^{1/2}, \\ Q_3 &= (\lambda c \rho)^{1/2} \sum_{n=0}^m A_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1+1/2)} \cdot t_3^{n+1/2}, \end{aligned} \right\} (2.4)$$

где $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} u^{n-1} \exp(-u) du$ — гамма-функция; A_n — произвольные константы; $m=0, 1, 2, 3, \dots$

2. Граничные условия 2-го рода:

$$x = 0 \quad q(t) = \sum_{n=0}^m A_n t^n. \quad (2.5)$$

Решение задачи с условием (2.5):

$$\left. \begin{aligned} T_3 &= T_n + (\lambda c \rho)^{-1/2} \sum_{n=0}^m A_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1+1/2)} t_3^{n+1/2}, \\ \sum_{n=0}^m A_n t_3^n &= \left[\lambda Q k_0 \frac{RT_3^2}{E} \exp\left(-\frac{E}{RT_3}\right) \right]^{1/2}, \\ Q &= \sum_{n=0}^m \frac{1}{n+1} A_n t_3^n. \end{aligned} \right\} (2.6)$$

3. Граничные условия 3-го рода:

$$x = 0 \quad q(t) = \alpha(t) [T_0(t) - T_n], \quad (2.7)$$

где α — коэффициент теплоотдачи; T_0 — температура внешнего источника; T_n — температура поверхности вещества.

В общем случае при решении задачи с условием (2.7) получаются очень громоздкие выражения, которые не приводятся.

Схема расчета t_3 , T и Q_3 по формулам (2.4) и (2.6) очевидна.

При анализе решений (2.4) и (2.6) было замечено, что все значения t_3 , T_3 и Q_3 можно приближенно представить в виде одной кривой в безразмерных координатах:

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{\tau_3}{\omega_3} = \frac{t_3 \cdot q(t_3)}{\omega_3}, \\ Y &= \frac{\sqrt{\tau_3}}{\theta_H} = \left(\frac{t_3}{\lambda c \rho} \right)^{1/2} \frac{q(t_3)}{T_3 - T_H}, \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

где $\omega_3 = \frac{E}{RT_3^2} \cdot \frac{1}{x_0} \cdot \frac{Q_3}{c \rho}$ — безразмерный запас тепла в прогревом слое в момент зажигания.

На рис. 1 в координатах X и Y изображены результаты расчетов для некоторых произвольно выбранных видов функций $T(t)$ и $q(t)$.

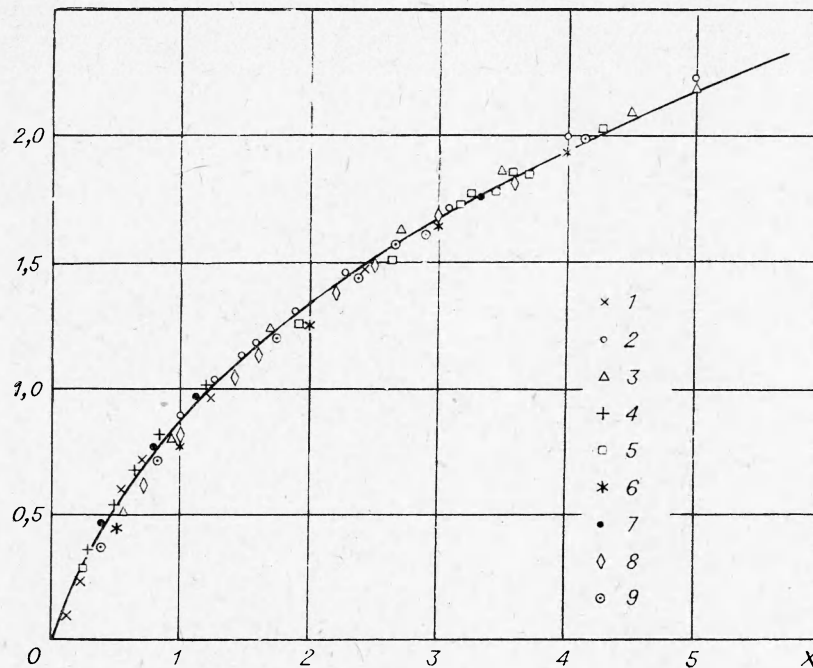


Рис. 1. «Универсальная» кривая. Линия соответствует формуле (2.10). Точки отвечают следующим законам изменения $q(t)$.

1 — $A_0 + A_1 t$; 2 — $A \cdot \exp(bt)$; 3 — $A_0 + A_1 t^4$; 4 — $A_0 / \sqrt{t} + A_1 t$; 5 — $A_0 + A_1 t^2 + A_2 t^3 + A_3 t^4$;
6 — $(A_0 + A_1 t) t^3$ и $T(t)$; 7 — $T_H + A_1 t + A_0$; 8 — $T_H + (A_0 + A_1 t) t^2$;
9 — $T_H + A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3 + A_4 t^4$.

Как видно из рис. 1, с удовлетворительной точностью (ошибка не более 30%) можно говорить об «универсальной» кривой $Y(X)$. Отметим, что некоторые рассматриваемые функции $T(t)$ или $q(t)$ на «универсальной» кривой представлены отрезком конечной длины; например, при $q(t) = (A_1 + A_2 t) \cdot t^3$ имеем $0 \leq X \leq 5$.

Для получения аналитического выражения «универсальной» кривой во всем диапазоне изменения координат рассмотрим функцию вида

$$T(t) = T_H + A \cdot t^n, \quad (n > -1/2).$$

Тогда из (2.4) следует

$$\left. \begin{aligned} T_3 &= T_n + A \cdot t_3^n, \\ (\lambda c \rho)^{1/2} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1/2)} A \cdot t_3^{n-1/2} &= \left[\lambda Q k_0 \frac{R T_3^2}{E} \exp \left(-\frac{E}{R T_3} \right) \right]^{1/2}, \\ Q_3 &= (\lambda c \rho)^{1/2} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1+1/2)} A \cdot t_3^{n+1/2}. \end{aligned} \right\} (2.9)$$

Переходя к безразмерным координатам (2.8), получаем

$$Y = \frac{\Gamma(X+1/2)}{\Gamma(X)}. \quad (2.10)$$

Интересно отметить, что точно такой же вид $Y(X)$ можно получить, рассматривая функцию

$$q(t) = A t^n, \quad (n > -1).$$

Можно ожидать, что решение задачи с граничными условиями 3-го рода также будет соответствовать «универсальной» кривой, так как граничные условия 1-го и 2-го рода в задачах о зажигании являются предельными случаями граничных условий 3-го рода [4].

Наличие «универсальной» кривой значительно упрощает расчеты характеристик зажигания. Условию зажигания в координатах X, Y соответствует точка пересечения «универсальной» кривой с кривой, определяемой уравнениями:

$$X' = \frac{t \cdot q(t)}{\int_0^t q(t) dt}, \quad (2.11)$$

$$Y' = \left(\frac{t}{\lambda c \rho} \right)^{1/2} \frac{q(t)}{T(t) - T_n}, \quad (2.12)$$

$$q^2(t) = \lambda Q k_0 \frac{R}{E} T^2(t) \exp \left[-\frac{E}{R T(t)} \right]. \quad (2.13)$$

где $q(t)$ или $T(t)$ — заданная функция.

Зная координаты точки пересечения X'_3 и Y'_3 из (2.11) и (2.12), получаем для определения t_3 выражения:

если задана $T(t)$,

$$\frac{\lambda c \rho}{t_3} Y_3'^2 [T_3(t_3) - T_n]^2 = \lambda Q k_0 \frac{R}{E} T^2(t_3) \exp \left[-\frac{E}{R T(t_3)} \right],$$

если задана $q(t)$,

$$\begin{aligned} q^2(t_3) &= \lambda Q k_0 \frac{R}{E} \left[T_n + \left(\frac{t_3}{\lambda c \rho} \right)^{1/2} \frac{q(t_3)}{Y_3'} \right]^2 \times \\ &\times \exp \left[-\frac{E}{R} \cdot \frac{1}{T_n + \left(\frac{t_3}{\lambda c \rho} \right)^{1/2} \frac{q(t_3)}{Y_3'}} \right]. \end{aligned}$$

Далее определяются $T_3 = T(t_3)$, $q(t_3)$ и $Q_3 = \frac{q(t_3) \cdot t_3}{X_3'}$.

Приведем два примера использования «универсальной» кривой для расчета t_3 , T_3 и Q_3 .

1. Рассмотрим один из простейших случаев ньютоновского теплообмена (граничные условия 3-го рода) в динамических условиях. Пусть в (2.7) $\alpha = \text{const}$, а

$$T_0(t) = T_n + At. \quad (2.14)$$

Решение задачи с условием (2.14) описывается системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} T_3 &= T_0 - \frac{A}{h^2} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} h \sqrt{t_3} + \varphi(h \sqrt{t_3}) - 1 \right], \\ \alpha^2 (T_0 - T_3)^2 &= \lambda Q k_0 \frac{RT_3^2}{E} \exp\left(-\frac{E}{RT_3}\right), \\ Q_3 &= \alpha \frac{A}{h^2} t_3 \left(\frac{4}{3\sqrt{\pi}} h \sqrt{t_3} - 1 \right) + \frac{\alpha}{h^2} (T_0 - T_3), \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

где

$$h = \frac{\alpha}{\lambda c \rho}; \quad \varphi(u) = \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-v^2} dv \right) \exp(u^2).$$

Расчет для случая зажигания пироксилина, кинетические и теплофизические константы которого известны [7, 8], проведем как по формулам (2.15), так и с помощью «универсальной» кривой. При расчете использовались следующие величины: $T_n = 300^\circ \text{K}$, $c = 0,31 \text{ кал/град} \cdot \text{г}$; $\rho = 1,5 \text{ г/см}^3$; $Qk_0 = 6,35 \cdot 10^{21} \text{ кал/см}^3 \cdot \text{сек}$; $E = 48500 \text{ кал/моль}$; $\lambda = 3 \cdot 10^{-4} \text{ кал/см} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}$; $A = 100 \text{ град/сек}$.

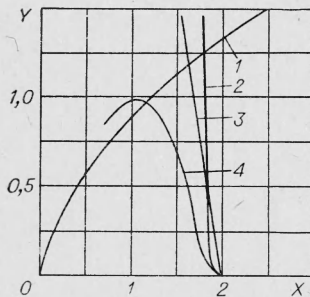


Рис. 2. Применение «универсальной» кривой 1 для упрощенного расчета. Вспомогательные кривые:

2 — при $q(t) = 5 \cdot 10^{-3} [T_n - 100t - T_n] \text{ кал/см}^2 \cdot \text{сек}$;

3 — при $q(t) = 2 \cdot 10^4 t \exp(-100t) \text{ кал/см}^2 \cdot \text{сек}$; 4 — при $q(t) = 10^4 t \exp(-100t) \text{ кал/см}^2 \cdot \text{сек}$.

Применение «универсальной» кривой иллюстрируется рис. 2, а полученные результаты приведены в табл. 1 и сравниваются с аналитическим расчетом по формулам (2.15). Как видно из табл. 1, соответствие результатов, полученных этими двумя методами, вполне удовлетворительное.

2. Рассмотрим закон теплообмена в реальных условиях зажигания в ракетном двигателе на твердом топливе. В соответствии с экспериментальными данными [9] теплоотдачу от продуктов сгорания воспламенителя к поверхности топлива можно приближенно представить в виде

$$q(t) = A \cdot t^n \exp(-bt), \quad (2.16)$$

где A , n , b — постоянные, определяемые из эксперимента.

Таблица 1

Метод расчета	$t_3, \text{сек}$	$T_3, \text{°K}$	$Q_3, \frac{\text{кал}}{\text{см}^2}$	X'_3	Y'_3
Аналитический расчет	5,6	549	4,86	—	—
«Универсальная» кривая	5,7	557	5,11	1,8	1,25

Система для расчета t_3 , T_3 и Q_3 в случае граничных условий (2.16) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} A \cdot t_3^n \exp(-bt_3) &= \lambda Q k_0 \frac{RT_3^2}{E} \exp\left(-\frac{E}{RT_3}\right), \\ T_3 - T_n &= (\lambda c \rho)^{-1/2} A \cdot \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1+1/2)} t_3^{n+1/2} \exp(-bt_3) \cdot {}_1F_1 \times \\ &\quad \times \left(\frac{1}{2}; n + \frac{3}{2}; bt_3\right), \\ Q_3 &= A \int_0^{t_3} t^n \exp(-bt) dt, \end{aligned} \right\} (2.17)$$

где

$$F_1(\alpha, \gamma, z) = \frac{2^{1-\gamma} \exp\left(\frac{z}{2}\right)}{B(\alpha, \gamma - \alpha)} \int_{-1}^1 (1-u)^{\gamma-\alpha-1} (1+u)^{\alpha-1} \times \exp\left(\frac{z}{2}u\right) du$$

— вырожденная гипергеометрическая функция, а $B(p, q) = \int_0^1 u^{p-1} (1-u)^{q-1} du$ — бэта-функция.

Результаты расчета для случая зажигания пироксилина, проведенного как с использованием «универсальной» кривой (рис. 2), так и по формулам (2.17), представлены в табл. 2 (расчет проведен при $n=1$; $b=100$ 1/сек).

Таким образом, как видно из табл. 1 и 2, точность расчетов с использованием «универсальной» кривой удовлетворительна.

Таблица 2

$A, \frac{\text{кал}}{\text{см}^2 \cdot \text{сек}^2}$	Метод расчета	$t_3, \text{сек}$	$T_3, \text{°K}$	$Q_3, \frac{\text{кал}}{\text{см}^2}$	X'_3	Y'_3
$2 \cdot 10^4$	Формулы (2.17)	$5,9 \cdot 10^{-3}$	662	0,22	—	—
	«Универсальная» кривая	$5,3 \cdot 10^{-3}$	624	0,2	1,64	1,19
10^4	Формулы (2.17)	$1,96 \cdot 10^{-2}$	704	0,58	—	—
	«Универсальная» кривая	$1,63 \cdot 10^{-2}$	668	0,47	1,16	0,97

3. АНАЛИЗ ПРОСТЕЙШИХ РЕЖИМОВ ЗАЖИГАНИЯ

Представляется интересным сравнить получаемые с помощью описанного выше приближенного метода результаты с имеющимися в литературе.

1. Наиболее подробно изучен процесс зажигания при постоянной температуре поверхности:

$$T(0,t) = T_0 = \text{const.} \quad (3.1)$$

Здесь известны результаты численного интегрирования на электронно-вычислительных машинах [2, 9—11] и приближенные методы расчета [1, 5, 6, 12, 13]. Результаты численного интегрирования сравнивались между собой в [2], поэтому остановимся лишь на приближенных методах.

Подставив (3.1) в (2.9), получаем следующие соотношения для расчета t_3 и Q_3 ($T_3 = T_0$):

$$\left. \begin{aligned} t_3 &= \frac{(T_0 - T_H)^2}{\pi} \frac{c \rho}{Q k_0} \frac{E}{RT_0} \exp\left(\frac{E}{RT_0}\right), \\ Q_3 &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} (T_0 - T_H) (\lambda c \rho \cdot t_3)^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Отметим, что на «универсальной» кривой задаче с граничным условием (3.1) соответствует точка с координатами: $X = \frac{1}{2}$; $Y = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Сопоставление результатов, полученных различными приближенными методами, приведено в безразмерных переменных (1.5) в табл. 3.

Т а б л и ц а 3

Источ- ник	Формула для τ_3	Формула для ω_3	τ_3 при $\theta_H = 10$	ω_3 при $\theta_H = 10$
[5]	$\theta_H^2/2\pi$	—	15,9	—
[12]	θ_H^2/π	—	31,8	—
[6]	$\theta_H/\sqrt{\pi}$	$2(\theta_H/\sqrt{\pi})^{3/2}$	5,64	26,80
[13]	$\frac{1}{4}\theta_H^2 + \frac{3}{16}\theta_H + \frac{3}{32}$	$0,41\theta_H^2 + 0,49\theta_H$	27,0	45,9
[3.2]	θ_H^2/π	$2\theta_H^2/\pi$	31,8	63,6
[2]	$0,2\theta_H^2 + \theta_H$	$0,33\theta_H^2 + 0,7\theta_H$	30,0	40,0

Как следует из табл. 3, формула (3.2) дает хорошее совпадение с результатами численного счета [2]. Метод Зельдовича дает примерно вдвое заниженный результат. Хорошее соответствие получено в работах Энига [12] и Гришина [13], методы которых представляют собой разновидности метода последовательных приближений. Однако применение этих методов для более сложных граничных условий связано с большими математическими трудностями. В работе Андерсена [6] для расчета t_3 и Q_3 использован метод, по физической постановке совпадающий с описываемым в настоящей работе: предполагается, что зажигание наступает тогда, когда скорость теплоприхода от внешнего источника станет равной скорости тепловыделения за счет хими-

ческой реакции в слое определенной толщины. Однако предположение о том, что толщина этого слоя зависит только от теплофизических свойств вещества и времени зажигания, приводит, как видно из табл. 3, к неверным результатам.

2. Зажигание постоянным тепловым потоком:

$$q(t) = q_0 = \text{const.}$$

Задача расчета t_3 , T_3 и Q_3 в том случае сводится к решению системы:

$$\left. \begin{aligned} T_3 &= T_n + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{q_0 \sqrt{t_3}}{\sqrt{\lambda c \rho}}, \\ q_0^2 &= \lambda Q k_0 \frac{RT_3^2}{E} \exp\left(-\frac{E}{RT_3}\right), \\ Q_3 &= q_0 \cdot t_3. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

На «универсальной» кривой этому случаю соответствует точка с координатами: $X = 1$, $Y = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

В работах [15, 16] предполагается, что $t_3 \sim q_0^{-n}$, где $n \approx 2$. Этот результат вытекает из (3.3), если считать $T_3 = \text{const}$. На самом деле, T_3 зависит от q_0 , а связь между t_3 и q_0 более сложная и определяется соотношениями (3.3). Однако практически эту связь можно на определенном интервале изменения q_0 аппроксимировать зависимостью вида $t_3 \sim q_0^{-n}$, где $n < 2$. Это обстоятельство подтверждается и экспериментом [16], в котором получено $n = 1,84$.

3. Задача о зажигании конвективным потоком тепла при постоянной температуре источника $T_0 = \text{const}$ (граничные условия 3-го рода) рассматривалась в [17—18]. Теплообмен на поверхности определяется условием.

$$q(t) = \alpha [T_0 - T(0, t)].$$

В этом случае для расчета t_3 , T_3 и Q_3 имеем:

$$\left. \begin{aligned} \alpha^2 (T_0 - T_3)^2 &= \lambda Q k_0 \frac{RT_3^2}{E} \exp\left(-\frac{E}{RT_3}\right), \\ T_3 &= T_0 - (T_0 - T_n) \varphi(h \sqrt{t_3}), \\ Q_3 &= \frac{T_0 - T_n}{h^2} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} h \sqrt{t_3} + \varphi(h \sqrt{t_3}) - 1 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Из (3.4) видно, что задаче о зажигании конвективными потоками тепла на «универсальной» кривой соответствует участок:

$$\frac{1}{2} \leq X \leq 1; \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \leq Y \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Крайние точки этого участка отвечают двум рассмотренным выше режимам теплообмена: $T_n = \text{const}$, и $q_0 = \text{const}$. Как и в предыдущем случае, при $T_3 = \text{const}$ $t_3 \sim \alpha^{-2}$. Из (3.4) следует, что $t_3 \sim \alpha^{-n}$, где $n < 2$, что подтверждается экспериментом [8, 19].

Приближенные методы расчета t_3 при граничных условиях 2-го и 3-го рода имеются в работах Хикса [17] и Вилюнова [18]. В методе Хикса [17] предполагается, что зажигание наступает тогда, когда выполняется соотношение

$$\frac{Q k_0 \exp \left[-\frac{E}{RT(0, t_3)} \right]}{c \rho \frac{\partial T}{\partial t}(0, t_3) + Q k_0 \exp \left[-\frac{E}{RT(0, t_3)} \right]} = 0,833,$$

где $T(0, t)$ и $\frac{\partial T}{\partial t}(0, t)$ определяются из решения для инертного тела.

В приближенном методе Вилюнова [18] используется идея расчленения процесса на две стадии (прогрев без реакции и адиабатический саморазогрев) по величине температуры поверхности с последующей «сшивкой» получающихся решений. Оба эти метода при граничных условиях 1-го рода неприменимы. Для расчета t_3 при больших значениях α (условия,

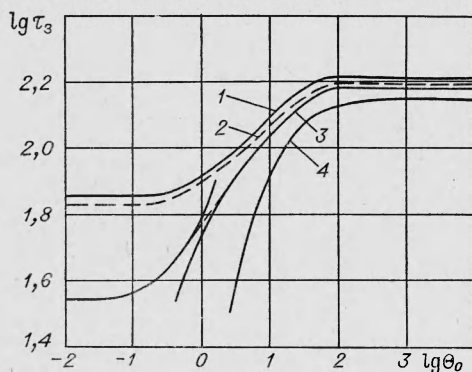


Рис. 3. Зависимость $\tau_3(\theta_0)$, полученная различными методами: 1 — приближенный метод [1]; 2 — численный счет [4]; 3 — метод [18]; 4 — метод [17].

близкие к 1-му роду) Вилюнов применил метод Зельдовича [5]. Сравнение результатов, получаемых различными методами в безразмерных переменных (1.5), приведено на рис. 3. Как видно из рис. 3, описываемый приближенный метод [1] дает наилучшее совпадение с результатами численного счета во всем диапазоне изменения параметра $\theta_0 = \frac{E}{RT_3^2} (T_0 - T)$, характеризующего условия теплообмена с источником.

4. О СХЕМАХ РАСЧЕТА КИНЕТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ИЗ ОПЫТОВ ПО ЗАЖИГАНИЮ

Одним из вопросов, развивающихся в тепловой теории зажигания, является разработка схем определения кинетических параметров реакций, протекающих в прогревом слое конденсированной фазы. Ряд таких схем обсужден в работах [8, 19]. Данный приближенный метод позволяет сформулировать новые схемы расчета кинетических параметров. Прологарифмировав (1.3), получаем

$$2 \ln \frac{q(t_3)}{T_3} = \ln A - \frac{E}{R} \cdot \frac{1}{T_3}, \quad (4.1)$$

где $A = \lambda Q k_0 \frac{R}{E}$ — величина, постоянная для данного вещества.

Из (4.1) вытекают две схемы расчета E и Qk_0 .

а) Если в эксперименте известны условия теплообмена и измеряется температура поверхности вещества в момент зажигания, то, по-

строив зависимость $\lg \frac{q(t_3)}{T_3}$ от $\frac{1}{T_3}$, из наклона получающейся прямой можно рассчитать E , а затем и Qk_0 .

б) Во второй схеме для расчета E и Qk_0 используются только времена задержки зажигания t_3 . Действительно, зная t_3 и условия теплообмена, из (1.4) можно рассчитать T_3 , а затем и E . Отметим, что расчет E и Qk_0 по этой схеме очень удобен, поскольку все вспомогательные величины рассчитываются из решений для инертного тела. Кроме того, обработку экспериментальных данных можно проводить в широком температурном интервале (температурные ограничения в данном случае определяются только пределами применимости модели).

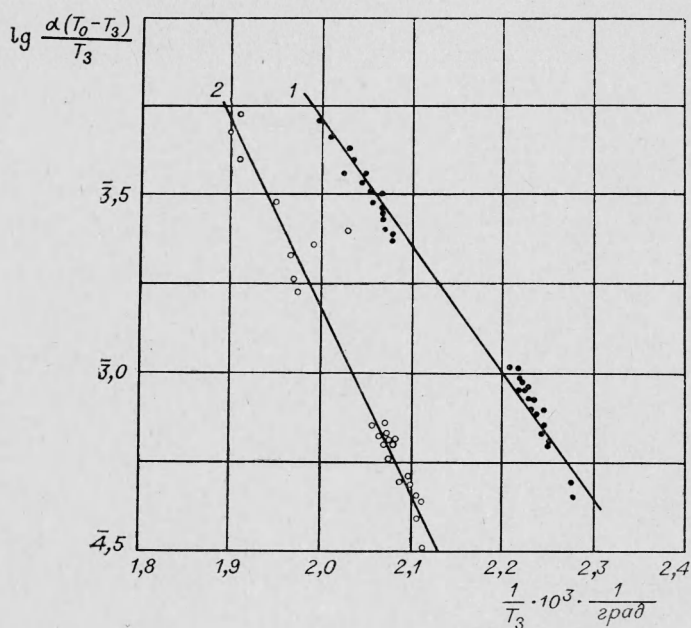


Рис. 4. Определение кинетических констант из экспериментальных данных [8, 19].

1 — поливинилнитрат; 2 — пироксилин.

Для иллюстрации приведем пример расчета кинетических констант пироксилина и поливинилнитрата из опытов по зажиганию в потоке горячего газа [8, 19]. Результаты обработки имеющихся в этих работах экспериментальных данных по схеме (б) приведены на рис. 4. Значения полученных при этом кинетических констант: $E = 48000$ кал/моль; $Qk_0 = 6,7 \cdot 10^{22}$ кал/г·сек — для пироксилина и $E = 34000$ кал/моль; $Qk_0 = 5,4 \cdot 10^{17}$ кал/г·сек — для поливинилнитрата, находятся в удовлетворительном соответствии со значениями, приведенными в [7, 8, 19]. Несколько завышенное значение параметра Qk_0 связано с различием абсолютных величин t_3 , рассчитываемых теоретически и экспериментально (теоретические значения t_3 , рассчитанные с применением кинетических констант [7], примерно в 2—2,5 раза выше экспериментальных; причина такого расхождения не выяснена).

Поступила в редакцию
27/IV 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Э. Аверсон, В. В. Барзыкин, А. Г. Мержанов. Докл. АН СССР, 1968, 178, 1.
2. А. Э. Аверсон, В. В. Барзыкин, А. Г. Мержанов. ИФЖ, 1965, IX, 2, 244.
3. А. Эрдейи. Асимптотические разложения. М., «Наука», 1962.
4. А. Э. Аверсон, В. В. Барзыкин, А. Г. Мержанов. Докл. АН СССР, 1966, 169, 1, 158.
5. Я. Б. Зельдович. Докл. АН СССР, 1963, 150, 2, 283.
6. W. H. Andersen. Ind. and Eng. Chem. Proc. and Develop. 1965, 4, 3.
7. Ю. М. Григорьев, Э. И. Максимов, А. Г. Мержанов. Научно-технические проблемы горения и взрыва, 1965, 1, 93.
8. В. И. Лисицкий, А. Г. Мержанов. Научно-технические проблемы горения и взрыва, 1965, 2, 62.
9. D. S. Allan, E. K. Bastress, K. A. Smith. J. of Spacecr. and Rock., 1967, 4, 1, 95.
10. R. J. Seeger. Symp. on Large — Scale Digital Calc. Machinery., Harvard University, 1948.
11. G. B. Cook. Proc. Roy. Soc., 1958, A246, 154.
12. В. Н. Виллюнов, О. Б. Сидонский. Докл. АН СССР, 1963, 152, 1, 131.
13. J. W. Enig. J. Chem. Phys., 1964, 41, 12, 4012.
14. А. М. Гришин. ПМТФ, 1966, 5, 25.
15. E. W. Price, H. H. Bradley, G. L. Dehority, M. M. Jbiricu. AIAA J., 1966, 4, 7.
16. A. D. Vaer, N. W. Ryan. AIAA J., 1965, 3, 5, 884
17. V. L. Hicks. J. Chem. Phys., 1954, 22, 3, 444.
18. В. Н. Виллюнов. ФГВ, 1966, 2, 77.
19. Ю. М. Григорьев, В. И. Лисицкий, А. Г. Мержанов. ФГВ, 1967, 3, 4.