

УДК 539.374

## РАВНОВЕСНЫЕ ФОРМЫ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ ПРИ ОДНООСНОМ РАСТЯЖЕНИИ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОЙ ПОЛОСЫ

И. Э. Келлер

Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013 Пермь

E-mail: kie@icmm.ru

С целью исследования задачи о шейке в металлах в условиях сверхпластичности выведено уравнение эволюции малых возмущений свободной границы нелинейно-вязкой полосы при ее квазистатическом одноосном растяжении. Показано, что группа симметрии этого линейного параболического уравнения эквивалентна группе симметрии линейного уравнения теплопроводности при произвольном материальном параметре модели. Получены автомодельные решения в виде простых и сложных стационарных локализованных структур, переносимых вместе с материалом удлиняющейся полосы.

**Ключевые слова:** свободная граница, уединенные волны, нелинейная вязкость, сверхпластичность, групповая классификация.

**Введение.** При одноосном растяжении металлических образцов в режиме высокотемпературной ползучести, особенно в условиях сверхпластичности, большие деформации сопровождаются макроскопическими поверхностными явлениями второго порядка [1–4]. На свободной поверхности деформируемого образца наблюдаются множественные неподвижные и подвижные шейки малой фиксированной амплитуды (рис. 1). Экспериментально это явление, по-видимому, систематически не изучалось. На рис. 1 представлена зависимость  $D/D_0$  от  $x/D_0$  ( $D$ ,  $D_0$  — текущее и начальное значения диаметра цилиндра;  $x$  — продольная координата;  $\varepsilon_s$  — средняя деформация). Характер эволюции формы свободной поверхности образца, “замораживающей” ее возмущения, обуславливает стабильность процесса его удлинения вплоть до аномально больших величин. Изучение условий существования таких режимов позволяет разработать новый способ классификации и идентификации определяющих соотношений вязкопластичности, а также сформулировать определение сверхпластичности с точки зрения механики [2].

В данной работе рассматривается задача о квазистатическом растяжении бесконечной нелинейно-вязкой полосы со свободными боковыми границами. Как и в [5], в качестве определяющих приняты нелинейные реологические соотношения несжимаемой жидкости Рейнера — Ривлина. Эволюция малых симметричных относительно осевой линии возмущений свободных границ исследуется с помощью метода малого параметра, представляющего собой отношение амплитуды возмущения к ширине полосы. Первый член равномерно сходящегося асимптотического ряда возмущения свободной границы удовлетворяет неавтономному линейному уравнению параболического типа, в котором имеется произвольный параметр  $m$  — материальный параметр чувствительности к скорости деформации. При произвольном параметре  $m$  путем эквивалентных (не меняющих структуру алгебры Ли) преобразований, инвертирующих время, это уравнение удается привести к линейному уравнению теплопроводности, которое имеет бесконечномерную алгебру точечных симметрий. Найдены автомодельные стационарные решения, имеющие локализованный

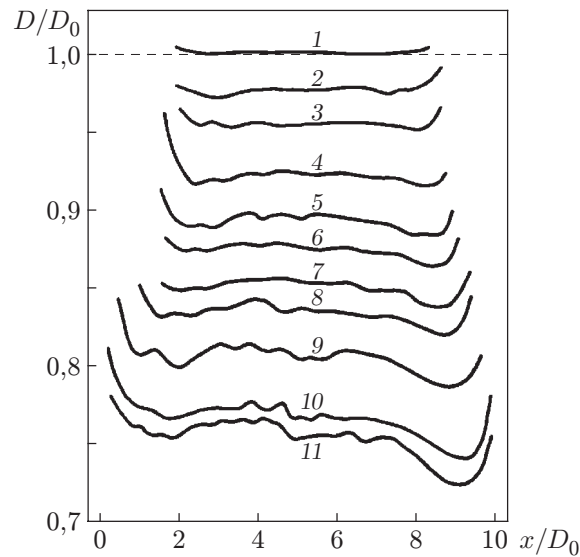


Рис. 1. Эволюция профиля свободной поверхности сплошного цилиндрического образца при одноосном растяжении (сплав индий — свинец, горячая деформация, контролируемый параметр истинной скорости деформации порядка  $10^{-7} \text{ с}^{-1}$ ) [4]:

1 —  $\varepsilon_s = 0$ ; 2 —  $\varepsilon_s = 0,032$ ; 3 —  $\varepsilon_s = 0,095$ ; 4 —  $\varepsilon_s = 0,159$ ; 5 —  $\varepsilon_s = 0,222$ ; 6 —  $\varepsilon_s = 0,254$ ; 7 —  $\varepsilon_s = 0,317$ ; 8 —  $\varepsilon_s = 0,349$ ; 9 —  $\varepsilon_s = 0,413$ ; 10 —  $\varepsilon_s = 0,476$ ; 11 —  $\varepsilon_s = 0,508$

и распределенный характер и существующие в некоторых диапазонах значений параметра  $m$ , обеспечивающих баланс кинематической и физической нелинейностей. Устойчивость данных решений не выяснена.

**Уравнение возмущений свободной границы.** Для нелинейно-вязкой несжимаемой полосы при одноосном квазистатическом растяжении уравнения равновесия имеют вид

$$\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} = 0, \quad \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} = 0; \quad (1)$$

$$\sigma_x = -p + \tau(\xi)\xi^{-1}u_{,x}, \quad \sigma_y = -p - \tau(\xi)\xi^{-1}u_{,x}, \quad \tau_{xy} = \tau(\xi)\xi^{-1}(u_{,y} + v_{,x})/2; \quad (2)$$

$$u_{,x} + v_{,y} = 0, \quad (3)$$

где  $x, y$  — декартовы ортогональные координаты (ось  $x$  совпадает с осевой линией полосы);  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  — компоненты тензора напряжений;  $p$  — гидростатическое давление;  $u, v$  — компоненты вектора скорости перемещений вдоль осей  $x$  и  $y$ ;  $\tau = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$  и  $\xi = \sqrt{(u_{,x})^2 + (u_{,y} + v_{,x})^2}/4$  — энергетически сопряженные в двумерном случае интенсивности напряжений и скоростей деформаций; запятая означает частную производную. Материальная функция  $\tau(\xi)$  полагается произвольной, определяющей вид решений для профиля свободной границы растягиваемой полосы. Нелинейность этой функции обуславливает нелинейность системы (1)–(3); соответствующую нелинейность модели будем называть физической.

В текущий момент времени выделяется основное движение при однородном растяжении полосы вдоль ее осевой линии со скоростью деформации  $\xi_0$ :

$$b_{,t} = -\xi_0 b \quad (4)$$

( $b$  — текущий поперечный размер невозмущенной полосы). Возмущения (прямолинейной формы) свободных границ полосы полагаются симметричными относительно осевой линии, что позволяет рассматривать только одну из границ:  $y(x, t) = b(t) + \eta(x, t)$ , где  $\eta < 0$  —

возмущение границы. С использованием неявной формы уравнения  $g = b + \eta - y \equiv 0$  записываются компоненты вектора внешней нормали к свободной границе  $n_x = g_{,x}/|\nabla g| = \eta_{,x}/|\nabla g|$ ,  $n_y = g_{,y}/|\nabla g| = -1/|\nabla g|$  и силовые граничные условия

$$\eta_{,x}\sigma_x - \tau_{xy} = 0, \quad \eta_{,x}\tau_{xy} - \sigma_y = 0. \quad (5)$$

Обозначив через  $d/dt$  производную по времени при фиксированной материальной частице, условие материальности свободной границы  $dg/dt = 0$  с учетом (4) и соотношений  $dx/dt \equiv u$ ,  $dy/dt \equiv v$  можно записать в виде

$$\eta_{,t} + u\eta_{,x} - v - \xi_0 b = 0. \quad (6)$$

Кинематическое условие (6) вводит в постановку задачи производную по времени: растягиваемая полоса может находиться в состоянии равновесия даже при некоторой эволюции ее свободной границы. Рассматриваются возмущения, исчезающие на бесконечно удаленных концах полосы:

$$\eta(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \pm\infty. \quad (7)$$

Подставляя (2), (3) в (1), получаем уравнения равновесия в скоростях

$$\begin{aligned} \tau^{-1}\xi p_{,x} - (m-1)[\xi^{-1}\xi_{,x}u_{,x} + \xi^{-1}\xi_{,y}(u_{,y} + v_{,x})/2] - u_{,xx} - (u_{,yy} - u_{,xx})/2 &= 0, \\ \tau^{-1}\xi p_{,y} - (m-1)[- \xi^{-1}\xi_{,y}u_{,x} + \xi^{-1}\xi_{,x}(u_{,y} + v_{,x})/2] + u_{,xy} - (u_{,xy} + v_{,xx})/2 &= 0, \\ \xi_{,x} &= \xi^{-1}[u_{,x}u_{,xx} + (u_{,y} + v_{,x})(u_{,xy} + v_{,xx})/4], \\ \xi_{,y} &= \xi^{-1}[u_{,x}u_{,xy} + (u_{,y} + v_{,x})(u_{,yy} - u_{,xy})/4], \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\tau'\xi/\tau = d \ln \tau / d \ln \xi \equiv m$  — параметр чувствительности к скорости деформаций, постоянный в случае степенного закона  $\tau(\xi)$ . Принимается, что при малых возмущениях коэффициенты при старших производных в (8) являются константами, соответствующими основному движению. Поэтому в выражениях для коэффициентов полагается  $u_{,y} = v_{,x} = 0$ ,  $u_{,x} = \xi_0$ , в результате чего система сводится к уравнениям

$$2\tau^{-1}\xi p_{,x} - (2m-1)u_{,xx} - u_{,yy} = 0, \quad 2\tau^{-1}\xi p_{,y} + (2m-1)u_{,xy} - v_{,xx} = 0. \quad (9)$$

В терминах функции тока  $u = \psi_{,y}$ ,  $v = -\psi_{,x}$  следствием (9) является известное в задаче устойчивости вязкопластической полосы уравнение

$$\psi_{,xxxx} + 2(2m-1)\psi_{,xxyy} + \psi_{,yyyy} = 0,$$

полученное в работе А. А. Ильюшина [6].

С помощью метода [7, 8], используемого при изучении слоя или полосы, неизвестные поля можно представить в виде разложений по поперечной координате

$$\begin{aligned} p &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)y^n, & \psi &= \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \psi_n(x)y^n, \\ u = \psi_{,y} &= \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} n\psi_n y^{n-1}, & v = -\psi_{,x} &= - \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \psi'_n y^n, \end{aligned}$$

где учтена осевая симметрия возмущенного поля скоростей. В первых членах рядов выделяются слагаемые, соответствующие основному движению и возмущению:

$$p_0 = -\tau_0 + \pi, \quad \psi_1 = \xi_0 x + \varphi.$$

Здесь  $\tau_0 = \tau(\xi_0)$ . Из уравнений равновесия (9) следуют связи между функциями  $p_n$ ,  $\psi_n$ :

$$\begin{aligned} y^0: & \quad \varkappa\pi_{,x} - (2m-1)\varphi_{,xx} - 6\psi_3 = 0, & p_1 &= 0, \\ y^1: & \quad p_{1,x} = 0, & 2\varkappa p_2 + 6(2m-1)\psi_{3,x} + \varphi_{,xxx} &= 0, \end{aligned}$$

$$y^2: \quad \varkappa p_{2,x} - 3(2m-1)\psi_{3,xx} - 60\psi_5 = 0, \quad p_3 = 0,$$

$$y^3: \quad p_{3,x} = 0, \quad 4\varkappa p_4 + 20(2m-1)\psi_{5,x} + \psi_{3,xxx} = 0$$

и т. д. ( $\varkappa \equiv 2\tau_0^{-1}\xi_0$ ), позволяющие выразить эти функции через  $\pi$  и  $\varphi$ :

$$p = -\tau_0 + \pi + \frac{\tau_0}{4\xi_0} [(2m-1)^2 - 1]y^2\varphi_{,xxx} - \frac{2m-1}{2}y^2\pi_{,xx} + O(y^4),$$

$$u = \xi_0x + \varphi - \frac{2m-1}{2}y^2\varphi_{,xx} + \frac{\xi_0}{\tau_0}y^2\pi_{,x} + O(y^4), \quad (10)$$

$$v = -\xi_0y - \varphi_{,xy} + \frac{2m-1}{6}y^3\varphi_{,xxx} - \frac{\xi_0}{3\tau_0}y^3\pi_{,xx} + O(y^5).$$

Далее члены более высокого порядка малости, чем явно выписанные, опускаются. Учет этих членов приводит к появлению дополнительных дисперсионных слагаемых в уравнениях эволюции свободной границы.

С учетом выражений (10) и того, что на свободной поверхности  $y = b + \eta$ , граничные условия (5), (6) в обезразмеренных переменных

$$x = b\bar{x}, \quad \eta = b\bar{\eta}, \quad y = b(1 + \bar{\eta}), \quad t = \xi_0^{-1}\bar{t}, \quad \varphi = \xi_0b\bar{\varphi}, \quad \pi = \tau_0\bar{\pi}$$

принимают вид системы трех уравнений относительно трех неизвестных функций  $\eta(x, t)$ ,  $\varphi(x, t)$ ,  $\pi(x, t)$  (черта опущена):

$$\eta_{,x}(2 - \pi + \varphi_{,x}) + m(1 + \eta)\varphi_{,xx} - (1 + \eta)\pi_{,x} = 0,$$

$$\eta_{,x}(-m(1 + \eta)\varphi_{,xx} + (1 + \eta)\pi_{,x}) + \varphi_{,x} + \pi = 0, \quad (11)$$

$$\eta_{,t} + \eta_{,x}(x + \varphi - (2m-1)(1 + \eta)^2\varphi_{,xx}/2 + (1 + \eta)^2\pi_{,x}) + \eta + (1 + \eta)\varphi_{,x} -$$

$$- (2m-1)(1 + \eta)^3\varphi_{,xxx}/6 + (1 + \eta)^3/3\pi_{,xx} = 0.$$

При малых возмущениях система (11) сводится к слабонелинейной форме методом многих масштабов [9]. Для этого искомые переменные представляются в виде разложений по малому параметру  $\varepsilon$ :

$$\eta = \varepsilon^s\eta_0 + \varepsilon^{2s}\eta_1 + \dots, \quad \varphi = \varepsilon^q\varphi_0 + \varepsilon^{2q}\varphi_1 + \dots, \quad \pi = \varepsilon^p\pi_0 + \varepsilon^{2p}\pi_1 + \dots \quad (12)$$

( $\eta_0, \varphi_0, \pi_0, \eta_1, \varphi_1, \pi_1$  — функции независимых переменных  $x, t, \chi \equiv \varepsilon x, \tau \equiv \varepsilon t$ , имеющие порядок  $\varepsilon^0$ ). В результате можно выписать множители при степенях  $\varepsilon$  ( $i$ -й столбец соответствует  $i$ -му уравнению системы (11)):

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
$\varepsilon^s$ :	$2\eta_{0,x}$	—	$\eta_{0,t} + x\eta_{0,x} + \eta_0$
$\varepsilon^q$ :	$m\varphi_{0,xx}$	$\varphi_{0,x}$	$\varphi_{0,x} - (2m-1)\varphi_{0,xxx}/6$
$\varepsilon^p$ :	$-\pi_{0,x}$	$\pi_0$	$\pi_{0,xx}/3$
$\varepsilon^{s+1}$ :	$2\eta_{0,\chi}$	—	$\eta_{0,\tau} + x\eta_{0,\chi}$
$\varepsilon^{q+1}$ :	$2m\varphi_{0,x\chi}$	$\varphi_{0,\chi}$	$\varphi_{0,\chi} - (2m-1)\varphi_{0,xx\chi}/2$
$\varepsilon^{p+1}$ :	$-\pi_{0,\chi}$	—	$2\pi_{0,x\chi}/3$
$\varepsilon^{2s}$ :	$2\eta_{1,x}$	—	$\eta_{1,t} + x\eta_{1,x} + \eta_1$
$\varepsilon^{2q}$ :	$m\varphi_{1,xx}$	$\varphi_{1,x}$	$\varphi_{1,x} - (2m-1)\varphi_{1,xxx}/6$
$\varepsilon^{2p}$ :	$-\pi_{1,x}$	$\pi_1$	$\pi_{1,xx}/3$
$\varepsilon^{s+q}$ :	$m\eta_0\varphi_{0,xx} + \eta_{0,x}\varphi_{0,x}$	$-m\eta_{0,x}\varphi_{0,xx}$	$\eta_{0,x}\varphi_0 - (2m-1)\eta_{0,x}\varphi_{0,xx}/2 +$ $+ \eta_0\varphi_{0,x} - (2m-1)\eta_0\varphi_{0,xxx}/2$
$\varepsilon^{s+p}$ :	$-\eta_{0,x}\pi_0 - \eta_0\pi_{0,x}$	$\eta_{0,x}\pi_{0,x}$	$\eta_{0,x}\pi_{0,x} + \eta_0\pi_{0,xx}$
$\varepsilon^{p+q}$ :	—	—	—

С помощью этих множителей выбираются показатели  $s = q = p = 1$ , соответствующие содержательной модели:

$$\begin{aligned} 2\eta_{0,x} + m\varphi_{0,xx} - \pi_{0,x} &= 0, & \pi_0 + \varphi_{0,x} &= 0, \\ \eta_{0,t} + x\eta_{0,x} + \eta_0 + \varphi_{0,x} - \frac{2m-1}{6}\varphi_{0,xxx} + \frac{1}{3}\pi_{0,xx} &= 0; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} 2\eta_{1,x} + m\varphi_{1,xx} - \pi_{1,x} &= \frac{2m}{m+1}\eta_{0,\chi} + 2\frac{m+3}{m+1}\eta_0\eta_{0,x}, & \pi_1 + \varphi_{1,x} &= -\varphi_{0,\chi} - 2(\eta_{0,x})^2, \\ \eta_{1,t} + x\eta_{1,x} + \eta_1 + \varphi_{1,x} - \frac{2m-1}{6}\varphi_{1,xxx} + \frac{1}{3}\pi_{1,xx} &= -\eta_{0,\tau} - x\eta_{0,\chi} - \varphi_{0,\chi} - \\ - \frac{6m+1}{3(m+1)}\eta_{0,x\chi} - \eta_{0,x}\varphi_0 + \frac{2}{m+1}\eta_0^2 - \frac{2m+1}{m+1}(\eta_{0,x})^2 - \frac{2m+1}{m+1}\eta_0\eta_{0,xx}. \end{aligned} \quad (14)$$

**Решения в виде локализованных и распространяющихся шеек.** С учетом условия (7) система (13) сводится к следующим уравнениям:

$$\eta_{0,t} + \varkappa_1\eta_0 + x\eta_{0,x} + \varkappa_2\eta_{0,xx} = 0, \quad \varkappa_1 \equiv \frac{m-1}{m+1}, \quad \varkappa_2 \equiv \frac{2m+1}{3(m+1)}; \quad (15)$$

$$\pi_0 = -\varphi_{0,x} = \frac{2}{m+1}\eta_0. \quad (16)$$

Уравнение (15) допускает точечную группу Ли с инфинитезимальным оператором  $\omega e^t \partial_x + \partial_t$ , где  $\omega$  — произвольная постоянная. Инвариант  $x - \omega e^t$  оператора порождает экспоненциально-автомодельную подстановку

$$\eta_0 = f(\zeta), \quad \zeta \equiv x - \omega e^t. \quad (17)$$

В основном движении произвольная материальная точка, имеющая в актуальной (возмущаемой) конфигурации полосы при  $t = 0$  пространственную координату  $x_*$ , в любой последующий момент времени  $t$  будет иметь координату  $x = x_* e^t$ . Полагая в (17)  $\omega = x_*$ , можно показать, что профиль  $f(\zeta)$  стационарен в системе отсчета  $\zeta$ , движущейся как жесткое целое вместе с материальной точкой, расположенной в начале координат  $\zeta = 0$ , при этом в системе отсчета  $\zeta$  материал испытывает растяжение.

Подставляя (17) в уравнение (15), получаем уравнение для  $f$

$$\varkappa_2 f_{,\zeta\zeta} + \zeta f_{,\zeta} + \varkappa_1 f = 0, \quad (18)$$

которое с помощью преобразований  $f = \exp(-\bar{\zeta}^2/4)\bar{f}$ ,  $\zeta = \varkappa_2^{1/2}\bar{\zeta}$  приводится к уравнению параболического цилиндра в стандартной форме  $\bar{f}_{,\bar{\zeta}\bar{\zeta}} - (\bar{\zeta}^2/4 + 1/2 - \varkappa_1)\bar{f} = 0$  [10]. Решение последнего уравнения целесообразно записать через вырожденную гипергеометрическую функцию  $\Phi$ , в результате чего решение уравнения (18) принимает вид

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= a(\chi, \tau) \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2\varkappa_2}\right) \Phi\left(\frac{1-\varkappa_1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\zeta^2}{2\varkappa_2}\right) + \\ &+ b(\chi, \tau) \zeta \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2\varkappa_2}\right) \Phi\left(\frac{2-\varkappa_1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\zeta^2}{2\varkappa_2}\right), \end{aligned} \quad (19)$$

где  $a \sim \varepsilon^0$ ;  $b \sim \varepsilon^0$ . При  $\zeta \rightarrow \pm\infty$  это решение имеет асимптотику  $f(\zeta) \sim \zeta^{-\varkappa_1}$  [10]. Следовательно, при  $m < -1$  или  $m > 1$ , когда  $\varkappa_1 > 0$  и заведомо  $\varkappa_2 > 0$ , данное решение удовлетворяет граничным условиям  $f(\zeta) \rightarrow 0$  ( $\zeta \rightarrow \pm\infty$ ), т. е. локализовано.

Для того чтобы локализованные функции  $\eta_0$ ,  $\varphi_0$ ,  $\pi_0$  представляли собой возмущения функций  $\eta$ ,  $\varphi$ ,  $\pi$  с точностью до малых порядка  $\varepsilon^1$ , ряды (12) должны сходиться равномерно, т. е. скорость затухания функции  $\eta_1$  должна быть не меньше скорости затухания

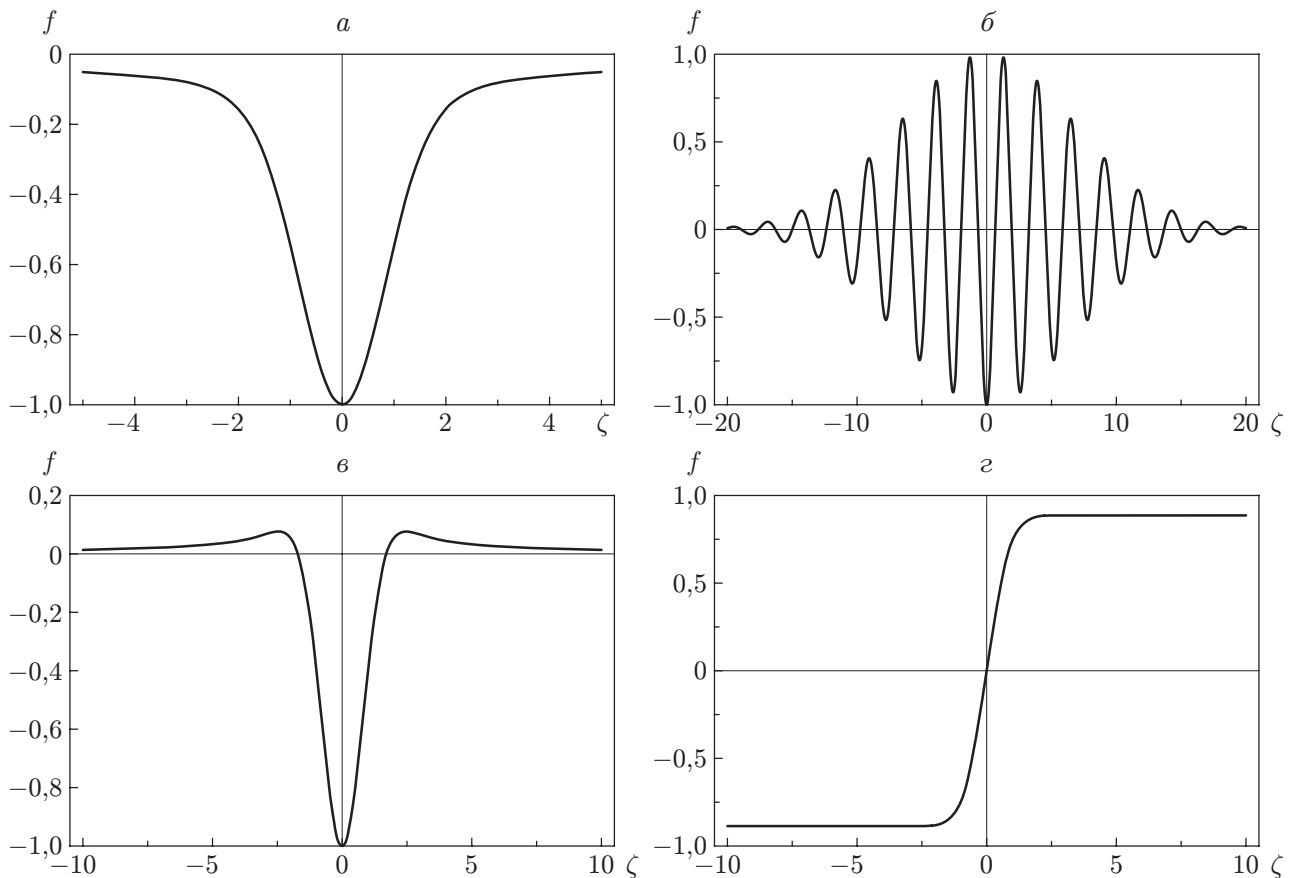


Рис. 2. Формы уединенной волны (19):

$a$ - $в$  —  $a = -1$ ,  $b = 0$  ( $a - m = 10$ ,  $б - m = -1,015$ ,  $в - m = -10$ );  $г$  —  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $m = 1$

функции  $\eta_0$ :  $\eta_1 \sim \zeta^{-\delta}$  при  $\zeta \rightarrow \pm\infty$ , где  $\delta \geq \kappa_1 > 0$ . Для этого из правой части следующего из (14) уравнения для  $\eta_1$  необходимо исключить члены  $\eta_{0,\tau}$  и  $x\eta_{0,\chi}$ . В результате получаем решение  $a(\chi, \tau) \equiv a$ ,  $b(\chi, \tau) \equiv b$ . Это решение не позволяет судить об устойчивости локализованной линейной волны (17)–(19). Для того чтобы выяснить, является ли это решение устойчивым, необходимо рассматривать следующие члены рядов (12) и зависимость решения от более медленных переменных.

Локализованный профиль функции  $f(\zeta)$  формируется линейной комбинацией четной ( $a \neq 0$ ,  $b = 0$ ) и нечетной ( $a = 0$ ,  $b \neq 0$ ) составляющих. На рис. 2 показана зависимость  $f(\zeta)$  в случае симметричного возмущения ( $a = -1$ ,  $b = 0$ ). При  $m > 1$  форма уединенной волны унимодальна (рис. 2,  $a$ ), причем при  $m \rightarrow -\infty$  имеет место гауссова функция  $f(\zeta) = a \exp(-\zeta^2/(2\kappa_2))$ . При  $m < -1$  вблизи точки  $m = -1$  уединенная волна имеет форму группового солитона (рис. 2,  $б$ ). По мере возрастания параметра  $m$  от значения  $m = -1$  осцилляции размываются (рис. 2,  $в$ ), и при  $m \rightarrow -\infty$  вновь имеет место гауссова функция.

При  $m = 1$  (реология линейно-вязкой жидкости) из уравнения (18) исчезает член  $\kappa_1 f$ . Решение этого уравнения представляет собой кинк (локализованное решение) (рис. 2,  $г$ ), описываемый интегралом вероятностей  $f(\zeta) = b\sqrt{\pi\kappa_2}/2 \operatorname{erf}(\zeta/\sqrt{2\kappa_2})$ , и не удовлетворяет граничным условиям локализованности (7). Однако если вместо (17) использовать подстановку  $\eta_0 = f(x - x_* e^t) - f(x + x_* e^t)$ , то получается решение в виде распределенной однородно растягиваемой шейки фиксированной глубины с неподвижными относительно лагранжевых координат  $\pm x_*$  берегами неизменяемого профиля.

Стационарное локализованное относительно автомодельной переменной решение уравнения (18) является следствием баланса основных членов уравнения  $\zeta f_{,\zeta}$  и  $\varkappa_2 f_{,\zeta\zeta}$ . Первый член появился из нелинейного члена кинематического условия на свободной границе (6), второй является следствием удержания в выражениях, аппроксимирующих компоненты скоростей (10), членов более высокой, чем первая, степени по поперечной координате (в работе [8] также сделан вывод, что гипотеза плоских сечений не допускает существования локализованных решений). При этом существование локализованного решения зависит от интервала значений  $m$  — меры физической нелинейности модели. Эти члены имеют наименьший показатель  $p = 2$  в выражении, с которого начинается разложение решения в степенной ряд:  $f = \exp(-\zeta^p) \sum_{n=0}^{\infty} f_n \zeta^n$ .

Из (10), (16) следует, что возмущение границы пропорционально противоположному по знаку возмущению скорости удлинения полосы, среднему по ее поперечному сечению. В частности, в области шейки  $\eta_0 < 0$  скорость удлинения увеличивается.

Решение (19) позволяет оценить форму шейки при  $m > 1$ . Вблизи точки  $\zeta = 0$  имеет место разложение в степенной ряд, начинающееся с членов  $f(\zeta) = -1 + \varkappa_1 \zeta^2 / (2\varkappa_2) + O(\zeta^4)$ . Ширина шейки  $\lambda$  на половине ее высоты находится из уравнения  $-1 + \varkappa_1 \lambda^2 / (8\varkappa_2) \approx -1/2$ , откуда следует  $\lambda = 2\sqrt{\varkappa_2 / \varkappa_1}$ . При значениях  $m$ , незначительно превышающих единицу, имеет место асимптотика

$$\lambda \sim 2/\sqrt{m-1} + O(\sqrt{m-1}), \quad (20)$$

соответствующая очень пологим шейкам. Для шеек, показанных на рис. 1,  $\lambda \sim 100$ , и, следовательно, согласно (20)  $m-1 \sim 10^{-4}$ . Экспериментам на стационарную ползучесть (в том числе в режимах сверхпластичности) обычно соответствуют значения  $0 < m < 1$ , поэтому, для того чтобы идентифицировать  $m$  по текущему профилю боковой поверхности растягиваемого образца, необходимо найти другие слабозвозмущенные равновесные формы, описываемые уравнением (15). Систематический поиск частных решений дифференциального уравнения может быть осуществлен на основе изучения структуры его симметрий.

**Другие решения.** Общие результаты групповой классификации линейных параболических уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными получены Л. В. Овсянниковым и изложены в работе [11]. Уравнение (15) связано с уравнением теплопроводности

$$\bar{\eta}_{,\bar{t}} - \bar{\eta}_{,\bar{x}\bar{x}} = 0, \quad (21)$$

к которому оно приводится преобразованиями эквивалентности

$$\bar{\eta} = e^{\varkappa_1 t} \eta_0, \quad \bar{x} = \varkappa_2^{-1/2} e^{-t} x, \quad \bar{t} = e^{-2t} / 2, \quad (22)$$

сохраняющими структуру алгебры точечных симметрий уравнения (15) [11, 12]. Оптимальная система конечномерных подалгебр бесконечномерной алгебры Ли, допускаемой уравнением (21), построена в [13]. Каждая из таких подалгебр соответствует частному решению уравнения (21), которое преобразованиями (22) связано с некоторой, необязательно локализованной, эволюционирующей равновесной формой свободной границы. Структура алгебры Ли уравнения (21) не зависит от произвольного параметра этого уравнения, которым является параметр чувствительности к скорости деформации  $m$ ; иными словами, задача групповой классификации уравнения (21) относительно произвольного параметра  $m$  имеет тривиальное решение. Для классификации и идентификации нелинейно-вязких соотношений необходимо найти все локализованные ограниченные решения в бесконечном

множестве решений, инвариантных в соответствующих подалгебрах оптимальной системы, и условия их существования в зависимости от параметра  $m$ . Уравнение (15) встречается в квантовой механике, в работе [12] приведены некоторые локализованные решения уравнений (15), (21).

Автор выражает благодарность Э. Л. Аэро, Д. А. Индейцеву и В. В. Киселеву за полезные обсуждения работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Пресняков А. А.** Сверхпластичность металлических материалов / А. А. Пресняков, Р. К. Аубакирова. Алма-Ата: Наука КазССР, 1982.
2. **Padmanabhan К. А.** Superplastic flow: phenomenology and mechanics / К. А. Padmanabhan, R. A. Vasin, F. U. Enikeev. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2001.
3. **Чумаченко Е. Н.** Сверхпластичность: материалы, теория, технологии / Е. Н. Чумаченко, О. М. Смирнов, М. А. Цепин. М.: Эдиториал УРСС, 2005.
4. **Wray Р. J.** Tensile plastic instability at an elevated temperature and its dependence upon strain rate // J. Appl. Phys. 1970. V. 41, N 8. P. 3347–3352.
5. **Келлер И. Э., Трусов П. В., Шишкина О. В., Давыдов Д. В.** Подход к аттестации определяющих соотношений сверхпластичности, основанный на устойчивости // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 6. С. 170–177.
6. **Ильюшин А. А.** Деформация вязкопластичного тела // Учен. зап. Моск. гос. ун-та. 1940. Вып. 39. С. 3–81.
7. **Додд Р.** Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Л. Моррис. М.: Мир, 1988.
8. **Порубов А. В.** Генерация уединенных волн деформации в нелинейных твердых телах: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. СПб., 2006.
9. **Найфэ А. Х.** Методы возмущений. М.: Мир, 1974.
10. **Справочник по специальным функциям** / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979.
11. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
12. **Полянин А. Д.** Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001.
13. **Кузьмина А. А.** Оптимальная система конечномерных подалгебр алгебры Ли, допускаемой уравнением теплопроводности // Сиб. журн. индустр. математики. 2004. Т. 7, № 2. С. 88–98.

*Поступила в редакцию 8/XII 2008 г.,  
в окончательном варианте — 27/II 2009 г.*