УДК 519.632.4

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

С. Д. Алгазин

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, 119526 Москва
E-mail: algazinsd@mail.ru

Описывается методика численного решения уравнения однофазной нестационарной фильтрации газа в пористой среде. Проводится линеаризация классического уравнения Лейбензона. Для решения полученного линейного уравнения построен эффективный численный алгоритм без насыщения по пространственным переменным и времени.

Ключевые слова: однофазная фильтрация газа, пористая среда, уравнение Лейбензона, численный алгоритм без насыщения.

Введение. Решению задачи о фильтрации газа в пористой среде посвящено большое количество работ. В настоящее время для решения этой проблемы имеются зарубежные пакеты программ (например, Eclipse), которые представляют собой "черные ящики" и поэтому не поддаются анализу. Среди отечественных работ следует отметить работы [1, 2]. В [2] указаны трудности, возникающие при моделировании двухфазных течений, а именно нефизические решения. По-видимому, такие решения являются следствием плохой аппроксимации исходных уравнений. Применяемые в настоящее время отечественные пакеты прикладных программ основаны на постановке задачи, изложенной в работе [3], и методах конечных разностей для решения построенных в той же работе нелинейных дифференциальных уравнений.

Следует отметить, что уравнения однофазной и двухфазной фильтрации являются уравнениями разного типа (уравнение однофазной фильтрации газа — параболическое, а уравнения двухфазной фильтрации газа и воды — параболические по давлению и гиперболические по насыщенности). Поэтому эти уравнения нельзя решать, используя одну методику. В настоящей работе рассматривается задача двумерной фильтрации газа в пористой среде для совершенного газа, которая сводится к решению классического двумерного уравнения Лейбензона.

В проблеме моделирования однофазной фильтрации газа в пористой среде можно выделить три задачи: 1) дискретизация по пространственным переменным; 2) дискретизация по времени; 3) моделирование скважин (точечных источников). Решив эти задачи, нужно выбрать метод решения полученных нелинейных алгебраических уравнений. Для построения дискретизации по пространственным переменным применим метод без насыщения Бабенко [4]. Поскольку уравнение Лейбензона параболическое, следует ожидать, что решениями этого уравнения будут гладкие функции. Точные теоремы о гладкости решений уравнения Лейбензона автору настоящей работы неизвестны, но при использовании излагаемого ниже подхода это не существенно. Суть метода Бабенко состоит в построении

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09-08-00011-а).

алгоритма, который самостоятельно настраивается на гладкость решения, и при этом аппроксимация уравнения тем лучше, чем большей гладкостью обладает искомое решение. Эта цель достигается аппроксимацией решения многочленами (см. [5] и п. **2** данной работы). Для дискретизации по времени применяется алгоритм, предлагаемый в настоящей работе, который, так же как пространственная дискретизация, не имеет насыщения (см. [6] и п. **3**). Моделирование скважин (точечных источников) описано в п. **4**.

Ранее для решения нестационарной задачи применялся метод прямых [7], т. е. задача сводилась к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решалась по стандартной программе методом Гира [8]. В вычислительных экспериментах, выполненных с использованием этого метода, не были получены достоверные результаты. При увеличении числа узлов сетки метод не работал. В настоящем исследовании для дискретизации по времени применяется численный алгоритм без насыщения [6], который позволяет построить решение по времени одновременно на всем характерном интервале.

1. Постановка задачи фильтрации газа в пористой среде. Искомое уравнение неразрывности при отсутствии источников имеет вид

$$\frac{\partial\,(m\rho)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}) = 0, \tag{1.1}$$

где $m = V_{\text{п}}/V$ — пористость (для реальных пластов $m = 0{,}15 \div 0{,}22$); $\boldsymbol{v}$ — скорость фильтрации. Это уравнение получается из закона сохранения массы

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_{\text{п}}} \rho\, d\tau = \frac{d}{dt}\int\limits_{V} \rho m\, d\tau = 0, \tag{1.2}$$

где $V_{\text{п}}$, V — объем пор и полный объем, причем оба объема подвижные. С использованием формулы дифференцирования по подвижному объему из (1.2) получаем [9]

$$\frac{\partial\,(m\rho)}{\partial t} = \operatorname{div}(m\rho\boldsymbol{w}), \qquad \boldsymbol{v} = m\boldsymbol{w},$$

где $\boldsymbol{w}$ — скорость жидкости. Из последнего соотношения следует уравнение (1.1).

Закон Дарси

$$\boldsymbol{v} = -\frac{\tilde{k}}{\mu}\operatorname{grad} p \tag{1.3}$$

справедлив при медленном движении жидкости в изотропной пористой среде, т. е. при малых значениях числа Рейнольдса Re ($\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{cr}$). В (1.3) μ — динамическая вязкость; $\tilde{k}$ — коэффициент проницаемости, измеряемый в дарси (1 д $= 10^{-8}/0{,}981$ см^2). Для реальных пористых сред $\tilde{k} = 100 \div 1000$ мд. Проницаемость — геометрическая характеристика пористой среды, определяемая размерами частиц, их формой и видом упаковки.

Уравнение состояния для баротропного газа имеет вид

$$\rho = \frac{M}{RT}\,\frac{p}{z(p)},$$

где M — относительная молекулярная масса газа; R — универсальная газовая постоянная; T — абсолютная температура; зависимость $z(p)$ определяется экспериментально (для совершенного газа $z(p) = 1$).

Уравнение (1.1) справедливо в случае, когда в пласте отсутствуют источники газа (скважины). В общем случае уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial\,(m\rho)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}) = f(z,t), \qquad z \in G, \tag{1.4}$$

где $f(z,t)$ — заданная функция; G — двумерная область с гладкой границей $\partial G \in C^\infty$.

Пусть $z = \varphi(\zeta)$, $\zeta = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ — конформное отображение единичного круга на область G. Запишем уравнение (1.4) в новых переменных. Заметим, что согласно [9]

$$ds^2 = (dr^2 + r^2\,d\theta^2)|\varphi'(\zeta)|^2 \quad \Rightarrow \quad g_{11} = |\varphi'(\zeta)|^2, \quad g_{22} = r^2|\varphi'(\zeta)|^2, \quad \sqrt{g} = |\varphi'(\zeta)|^2 r,$$

$$\operatorname{grad} p\,\Big|_r = \frac{1}{|\varphi'(\zeta)|}\,\frac{\partial p}{\partial r}, \qquad \operatorname{grad} p\,\Big|_\theta = \frac{1}{|\varphi'(\zeta)|r}\,\frac{\partial p}{\partial \theta}.$$

С учетом этих соотношений уравнение (1.4) приводится к виду

$$\frac{\partial\,(m\rho)}{\partial t} = |\varphi'(\zeta)|^{-2}L(w) + f(\zeta, t), \qquad \zeta = r\,\mathrm{e}^{i\theta}, \quad 0 \leqslant r \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi, \quad |\zeta| \leqslant 1; \tag{1.5}$$

$$L(w) = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\tilde{k}(r,\theta)\,\frac{\partial w}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\Big(\tilde{k}(r,\theta)\,\frac{\partial w}{\partial \theta}\Big). \tag{1.6}$$

Здесь $m = m(r, \theta)$; $p = p(r, \theta, t)$; $\tilde{k} = \tilde{k}(r, \theta, p) = k_{\text{пр}}(r, \theta)\psi(p)$; $\rho = \rho(p)$; $\mu = \mu(p)$; $w(p) = \displaystyle\int \frac{\rho(p)\psi(p)}{\mu(p)}\,dp$; $f(\zeta, t) = f(r, \theta, t)$ — масса газа, выделяющегося в единицу времени в единице объема в пласте. Если ввести мощность пласта $h = h(x, y)$ (т. е. высоту пласта в точке $(x, y) \in G$ рассматриваемой области), то вид уравнения (1.5) не изменится при замене m на mh и k на kh. В этом случае размерность функции f та же, что у массы газа, выделяющегося из пласта в единицу времени и с единицы площади.

Таким образом, уравнения (1.5), (1.6) — искомая постановка задачи фильтрации. К уравнению (1.5) нужно добавить граничное условие

$$\frac{\partial p}{\partial n}\Big|_{\partial G} = 0, \tag{1.7}$$

которое означает отсутствие потока газа через границу области ∂G (см. (1.3)). Заметим, что функция w также удовлетворяет этому граничному условию.

Ниже рассматривается случай, когда $\psi(p) \equiv 1$, $\mu(p) \equiv \text{const}$, $\rho(p) = Mp/(RT)$ — уравнение состояния совершенного газа, $M = 16$ г/моль (для метана); $R = 8{,}314$ Дж/(К $\cdot$ моль), $T = 273$ К.

Поскольку давление в пласте представляет собой медленно убывающую функцию, положим $P = P_0 - \alpha$ и будем пренебрегать величинами с α^2. В результате получаем линейное уравнение теплопроводности с переменными коэффициентами

$$\begin{gathered} \frac{\partial\,(m\alpha)}{\partial t} = \frac{|\varphi'(\zeta)|^{-2}P_0}{\mu}\,L(\alpha) - \frac{RT}{M}\,f(\zeta, t), \\ \zeta = r\,\mathrm{e}^{i\theta}, \qquad 0 \leqslant r \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant \theta < 2\pi, \qquad |\zeta| \leqslant 1; \end{gathered} \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial n}\Big|_{\partial G} = 0; \tag{1.9}$$

$$\alpha\Big|_{t=0} = 0. \tag{1.10}$$

2. Дискретизация задачи по пространственным переменным. Для дискретизации задачи (1.8)–(1.10) проведем сначала дискретизацию оператора $L(w)$. Рассмотрим спектральную задачу

$$L(w) + \lambda w = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial r}\Big|_{r=1} = 0. \tag{2.1}$$

Заметим, что

$$-\int\limits_{|\zeta| \leqslant 1} L(w)w\,d\zeta = \int\limits_{|\zeta| \leqslant 1} \Big[k_{\text{пр}}\Big(\frac{\partial w}{\partial r}\Big)^2 + \frac{k_{\text{пр}}}{r^2}\Big(\frac{\partial w}{\partial \theta}\Big)^2\Big]\,d\zeta. \tag{2.2}$$

Таким образом, краевая задача (2.1) эквивалентна следующей экстремальной задаче:

$$J(w) = \int\limits_{|\zeta|\leqslant 1} \Big[k_{\text{пр}}\Big(\frac{\partial w}{\partial r}\Big)^2 + \frac{k_{\text{пр}}}{r^2}\Big(\frac{\partial w}{\partial \theta}\Big)^2 - \lambda w^2\Big]\,d\zeta \to \min\,. \tag{2.3}$$

Действительно, вариация δJ функционала J есть главная линейная часть приращения $J(w+h) - J(w)$, где h — произвольная гладкая функция. Нетрудно показать, что

$$\delta J = 2\int\limits_{|\zeta|\leqslant 1}\Big(k_{\text{пр}} w_r h_r + \frac{k_{\text{пр}}}{r^2}\,w_\theta h_\theta - \lambda w h\Big)\,d\zeta =$$

$$= 2\Big[k_{\text{пр}} r w_r h\Big|_{r=1} - \int\limits_{|\zeta|\leqslant 1}\Big(\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\,(r k_{\text{пр}} w_r) + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\,(k_{\text{пр}} w_\theta) + \lambda w\Big) h\,d\zeta\Big] = 0.$$

Поскольку h — произвольная функция, из последнего равенства следуют соотношения (2.1). Итак, при поиске минимума функционала (2.3) функция w не должна заранее удовлетворять краевому условию Неймана, т. е. это условие является естественным. Для дискретизации функционала (2.3) используем квадратурную формулу

$$\int\limits_{|\zeta|\leqslant 1} f(\zeta)\,d\sigma = \sum_{\nu,l} c_{\nu l} f_{\nu l} + \delta(f), \qquad f_{\nu l} = f(r_\nu\,\mathrm{e}^{i\theta_l}), \tag{2.4}$$

где

$$r_\nu = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{(2\nu-1)\pi}{2m}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, m, \quad \theta_l = \frac{2\pi l}{N}, \quad l = 0, 1, \ldots, 2n, \quad N = 2n+1,$$

$d\sigma$ — элемент площади; $c_{\nu l}$ — весовые коэффициенты; $\delta(f)$ — погрешность. Формула (2.4) получается в результате замены подынтегральной функции на интерполяционную формулу для функции двух переменных в круге:

$$(P_M f)(r,\theta) = \sum_{l=0}^{2n}\sum_{\nu=1}^{m} f_{\nu l} L_{\nu l}(r,\theta), \qquad f_{\nu l} = f(r_\nu, \theta_l). \tag{2.5}$$

Здесь

$$L_{\nu l}(r,\theta) = \frac{T_m(2r-1)}{N T'_m(2r_\nu - 1)(r - r_\nu)}\,D_n(\theta - \theta_l),$$

$$D_n(\theta) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k\theta, \qquad T_m(x) = \cos\,(m\arccos x),$$

M — число точек, используемых в интерполяционной формуле.

Интерполяционная формула (2.5) обладает необходимыми свойствами, а именно точна на многочленах от двух переменных степени $\omega = \min\,(n, m-1)$. Обозначим через P_ω множество этих многочленов, а через E_ω — наилучшее приближение функции $f \in C[D]$ (D — единичный круг) многочленом из P_ω. Тогда будет определен проектор

$$P_M\colon\ \ C[D] \to L^M, \qquad L^M = L(L_1, \ldots, L_M)$$

и справедливо классическое неравенство

$$|f(r,\theta) - (P_M f)(r,\theta)| \leqslant (1 + |P_M|_\infty) E_\omega(f), \tag{2.6}$$

где $|P_M|_\infty$ — норма проектора P_M. Неравенство (2.6) показывает, что, так же как в одномерном случае, соответствующая интерполяционная формула не имеет насыщения. Норма проектора P_M удовлетворяет соотношению $|P_M|_\infty = O(\ln^2 M)$, причем эту оценку нетрудно уточнить. Вводя некоторые предположения о гладкости класса интерполируемых функций, можно оценить скорость убывания наилучшего приближения E_ω при $M \to \infty$ и получить конкретные оценки погрешности интерполяционной формулы (2.6). Пусть

$$f(r,\theta) = (P_M f)(r,\theta) + \rho_M(r,\theta; f),$$

где $\rho_M(r,\theta; f)$ — погрешность интерполяционной формулы (2.6). Тогда справедлива теорема Бабенко [4. С. 238–239].

Теорема. *Рассмотрим класс функций $H^M_\infty(K; D) \subset C(D)$, удовлетворяющих в круге D условиям*

$$\Big|\frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k\, \partial y^l}\Big| \leqslant K, \qquad k + l \leqslant \mu.$$

Тогда если $f \in H^M_\infty(K; D)$, то

$$|\rho_M(\,\cdot\,; f)|_\infty \leqslant c_\mu K M^{-\mu/2} \log^2 M, \tag{2.7}$$

где c_μ — константа, зависящая от μ.

Таким образом, из формулы (2.7) следует, что при одном и том же числе узлов интерполяции M скорость убывания погрешности интерполяционной формулы (2.5) возрастает с ростом μ, т. е. с увеличением гладкости интерполируемой функции f. Это означает, что полученная интерполяционная формула не имеет насыщения.

С использованием интерполяционной формулы (2.5) нетрудно получить квадратурную формулу для вычисления определенных интегралов в случае, когда областью интегрирования является круг. Действительно, заменяя подынтегральную функцию выражением (2.5), получаем квадратурную формулу (2.4). Для коэффициентов $c_{\nu l}$ имеем выражение

$$c_{\nu l} = \int\limits_D L_{\nu l}(r,\theta)\, d\sigma,$$

и они не зависят от l. Введем в рассмотрение блочно-диагональную матрицу

$$C = \operatorname{diag}(c_1, c_2, \dots, c_m),$$

где c_ν $(\nu = 1, 2, \dots, m)$ — диагональные матрицы размером $N \times N$ с одинаковыми числами на диагонали. Для погрешности квадратурной формулы имеем следующую оценку:

$$|\delta(f)| \leqslant 2\pi E_\omega(f).$$

Заметим, что при достаточно большом числе узлов интерполяции все значения $c_{\nu l}$ положительны.

Для коэффициентов квадратурной формулы (2.4) имеем выражение

$$c_{\nu l} = \frac{2\pi}{N}\Big[\frac{(-1)^{m+1} - 1}{(m^2-1)m(-1)^{\nu-1}} \sin\theta_\nu + \frac{r_\nu}{m}\Big(1 + 2\sum_{l=2,4,\dots}^{m-1} \frac{\cos l\theta_\nu}{1 - l^2}\Big)\Big],$$

где

$$r_\nu = \frac{1 + \cos\theta_\nu}{2}, \qquad \theta_\nu = \frac{(2\nu - 1)\pi}{2m}.$$

При этом

$$\frac{\partial w}{\partial r}\Big|_{\zeta=\zeta_{\nu l}} = \sum_{\mu=1}^{m} D_{\nu\mu}^{(r)} w_{\mu l}, \qquad \frac{\partial w}{\partial \theta}\Big|_{\zeta=\zeta_{\nu l}} = \sum_{p=1}^{N} \tilde{B}_{lp} w_{\nu p}.$$

Матрицы $\tilde{B}$ и $D^{(r)}$ получаются дифференцированием интерполяционной формулы (2.5). По r применяется интерполяционная формула, удовлетворяющая при $r = 1$ краевому условию Неймана:

$$P_m(x; f) = \sum_{j=1}^{m} \Big(\frac{T_m(x)}{m(-1)^{j-1}(x - x_j)/\sin\theta_j} - A_j T_m(x) \Big) f_j,$$

$$x_j = \cos\theta_j, \qquad \theta_j = (2j-1)\pi/(2m), \qquad j = 1, 2, \ldots, m, \qquad x = 2r - 1.$$

Коэффициент A_j выберем таким образом, чтобы выполнялось краевое условие $f'(1) = 0$.

Используя квадратурную формулу (2.4), преобразуем функционал (2.3) в квадратичную форму

$$J(w) = \sum_{\nu,l} c_{\nu l} \Big[k_{\nu l} \Big(\frac{\partial w}{\partial r} \Big)^2_{\zeta=\zeta_{\nu l}} + \frac{k_{\nu l}}{r_\nu^2} \Big(\frac{\partial w}{\partial \theta} \Big)^2_{\zeta=\zeta_{\nu l}} + \lambda w_{\nu l}^2 \Big]. \tag{2.8}$$

Дифференцируя (2.8) по $w_{\tilde{\mu}\tilde{l}}$, получаем

$$\sum_{p=1}^{n} B^*_{\tilde{\nu}\tilde{l},p} w_{\tilde{\nu}p} + \sum_{\mu=1}^{m} A^*_{\tilde{\nu}\tilde{l},\mu} w_{\mu\tilde{l}} = \lambda c_{\tilde{\nu}} w_{\tilde{\nu}\tilde{l}},$$

где

$$B^*_{\tilde{\nu}\tilde{l},p} = \frac{c_{\tilde{\nu}}}{r_{\tilde{\nu}}^2} \sum_{l=1}^{N} k_{\tilde{\nu}\tilde{l}} \tilde{B}_{lp} \tilde{B}_{l\tilde{l}}, \qquad A^*_{\tilde{\nu}\tilde{l},\mu} = \sum_{\nu=1}^{m} c_\nu k_{\tilde{\nu}\tilde{l}} D_{\nu\mu}^{(r)} D_{\nu\tilde{\nu}}^{(r)}, \qquad k_{\tilde{\nu}\tilde{l}} = k_{\text{пр}}(r_{\tilde{\nu}}, \theta_{\tilde{l}}).$$

Полученное выражение является дискретным аналогом задачи на собственные значения

$$\operatorname{div}(k_{\text{пр}} \operatorname{grad} w) + \lambda w = 0, \qquad r < 1,$$

$$\frac{\partial w}{\partial r}\Big|_{r=1} = 0.$$

Оценка погрешности выполненной дискретизации может быть получена по схеме, приведенной в [10].

3. Дискретизация задачи по времени. По времени t выберем сетку, состоящую из k узлов:

$$t_\nu = \frac{1}{2}(z_\nu + 1), \qquad z_\nu = \cos\chi_\nu, \qquad \chi_\nu = \frac{(2\nu-1)\pi}{2k}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, k,$$

и используем интерполяцию многочленом

$$q(t) = \sum_{\nu=1}^{k} \frac{T_k(t) t q_\nu}{k(-1)^{\nu-1} t_\nu (z - z_\nu)/\sin\chi_\nu}. \tag{3.1}$$

Величины, входящие в формулу (3.1), определены выше. Значения первой производной от $\alpha(\zeta, t)$ по t в левой части соотношений (1.8) получим дифференцированием интерполяционной формулы (3.1).

Пусть A — матрица дискретного оператора $|\varphi'(\zeta)|^{-2}L(\alpha)$. Тогда, введя обозначение $\alpha_{\mu\nu} = \alpha(\zeta_\mu, t_\nu)$, $\mu = 1, 2, \ldots, N_t$, $\nu = 1, 2, \ldots, k$, находим

$$\frac{\partial\alpha(\zeta_\mu, t)}{\partial t} + \sum_{p=1}^{N_t} A_{\mu p}\alpha(\zeta_p, t) = F(\zeta_\mu, t).$$

Пусть B — матрица численного дифференцирования по t на интервале $[0, 1]$. Тогда

$$\sum_{q=1}^{k} B_{\nu q}\alpha_{\mu q} + \sum_{p=1}^{N_t} A_{\mu p}\alpha_{p\nu} = f_{\mu\nu}.$$

Пронумеровав узлы сетки одним индексом по строкам (т. е. быстрее всех меняется первый индекс $I \to (\mu, \nu) = (\nu - 1)N_t + \mu$), получаем дискретную задачу

$$(B \otimes I_{N_t} + I_k \otimes A)\alpha = f, \tag{3.2}$$

где B — матрица дифференцирования по t размером $k \times k$; A — матрица дискретного оператора $|\varphi'(\zeta)|^{-2}L(u)$ размером $N_t \times N_t$; I_{N_t}, I_k — единичные матрицы. Представим матрицу A в виде (см. [10])

$$A = \sum_p \lambda_p h_p \quad (h_p^2 = h_p,\ h_p h_l = 0,\ p \ne l) \quad \Rightarrow \quad \sum_p h_p = I_m \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad B \otimes \sum_p h_p + I_k \otimes \Big(\sum_p \lambda_p h_p\Big) = \sum_p (B + \lambda_p I_k) \otimes h_p \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (B \otimes I_{N_t} + I_k \otimes A)^{-1} = \sum_p (B + \lambda_p I_k)^{-1} \otimes h_p. \tag{3.3}$$

Заметим, что оператор $|\varphi'(\zeta)|^{-2}L(\alpha)$ является вырожденным, т. е. имеет нулевое собственное значение. В этом случае необходимо обращать матрицу численного дифференцирования, которая также является вырожденной. Однако обратная матрица (результат интегрирования) существует. Рассмотрим эту процедуру более подробно.

Получим формулы для численного интегрирования функции, удовлетворяющей краевому условию $u\big|_{t=0} = 0$ на отрезке $[0, 1]$. По времени t выберем сетку, состоящую из m узлов:

$$r_\nu = \frac{1}{2}\,(x_\nu + 1), \qquad x_\nu = \cos\theta_\nu, \qquad \theta_\nu = \frac{(2\nu - 1)\pi}{2m}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, m, \qquad x = 2r - 1,$$

и применим интерполяцию многочленом

$$u(r) = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{T_m(x) r u_\nu}{m(-1)^{\nu-1} r_\nu (x - x_\nu)/\sin\theta_\nu}.$$

Заметим, что

$$\sum_{\nu=1}^{m} \frac{T_m(x) u_\nu}{m(-1)^{\nu-1}(x - x_\nu)/\sin\theta_\nu} = \frac{2}{m} {\sum_{l=0}^{m-1}}' \cos l\theta_\nu T_l(x) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad u(r) = \frac{2}{m} \sum_{\nu=1}^{m} \Big({\sum_{l=0}^{m-1}}' \cos l\theta_\nu T_l(x)\, \frac{r}{r_\nu} \Big) u_\nu.$$

Для вычисления $\int\limits_0^r u(r)\,dx$ нужно вычислить интеграл $I_l(r) = \int\limits_0^r T_l(x) r\,dr$, $x = 2r - 1$:

$$I_0(r) = \frac{r^2}{2}, \quad I_1(r) = \frac{2}{3}r^3 - \frac{r^2}{2}, \quad I_2(r) = 2r^4 - \frac{8}{3}r^3 + \frac{1}{2}r^2,$$

$$4I_l(r) = \frac{x^2 T_l(x)}{l+2} + \frac{x T_l(x)}{l+1} - \frac{x T_{l-1}(x)}{l+2} - \frac{l T_{l-1}(x)}{l^2-1} - \frac{T_{l-2}(x)}{l^2-4} + \frac{(-1)^l}{l^2-4} - \frac{(-1)^l}{l^2-1}, \quad l \geqslant 3.$$

Матрица численного интегрирования имеет вид

$$I_{\mu\nu}^{(r)} = \frac{2}{m} {\sum_{l=0}^{m-1}}' \frac{\cos l\theta_\nu I_l(r_\mu)}{r_\mu} \quad \Rightarrow \quad \int\limits_0^{r_\mu} u(r)\,dr = \sum_{\nu=1}^{m} I_{\mu\nu}^{(r)} u_\nu.$$

Таким образом, решение дискретной задачи (3.2) можно получить, умножая матрицу (3.3) на вектор правой части (3.2). Заметим, что для построения матрицы, обратной матрице (3.2), достаточно обратить N_t матриц размером $k \times k$, где k — число узлов интерполяции по времени. Отметим также, что выше не использовались специальные свойства матрицы A, т. е. A может являться матрицей двумерной, трехмерной и любой другой задачи. Необходимо только, чтобы матрица имела полную систему собственных векторов и собственные значения были действительны.

4. Моделирование скважин (точечных источников). Как известно, задача об установившейся плановой напорной фильтрации жидкости к скважине из однородного ограниченного пласта [11] сводится к нахождению решения уравнения Лапласа в двусвязной области, внешней границей которой является контур области фильтрации, а внутренней — контур скважины [12].

Так как размеры области фильтрации значительно больше размеров скважины, при решении указанной задачи методом сеток нецелесообразно аппроксимировать область фильтрации сеточной областью, так чтобы учесть размеры и форму скважины, поскольку для этого потребовалось бы чрезвычайно большое число узлов сетки. Поэтому при решении таких задач, когда на контуре скважины задан расход (граничное условие второго рода), обычно не учитываются размеры скважины, которая считается точечным источником с мощностью, равной расходу реальной скважины. Полученная задача аппроксимируется на сетке. При этом возникают проблема выбора способа аппроксимации точечного источника на сетке и вопрос о близости сеточного решения к решению предельной задачи. Этот вопрос не является тривиальным вследствие наличия у решения логарифмической особенности, что не позволяет использовать для оценки точности общие результаты теории разностных схем. Ситуация существенно осложняется, если на контуре скважины задано давление (граничное условие первого рода). В этом случае контур скважины нельзя стягивать в точку [13].

Если при решении указанной задачи методом сеток считать скважину точечной, возникнет необходимость построения специальных аппроксимаций уравнения в окрестности скважины-точки. Вопрос о близости сеточного решения к решению исходной задачи не менее сложен, чем в первой задаче. Аналогичная ситуация имеет место и в случае несовершенной скважины, т. е. в случае, когда на контуре скважины задано граничное условие третьего рода [14–17] (см. также [18, 19]).

В настоящей работе применяется другая методика моделирования скважин.

Пусть φ_n — полная нормированная система собственных функций оператора $|\varphi'(\zeta)|^{-2}L(w)$ в рассматриваемой области G. Тогда

$$\delta(x_0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)\varphi_n(x_0).$$

Сходимость этого ряда понимается как слабая. Таким образом, точечный источник замещается источниками и стоками во всех узлах сетки.

5. Вычислительные эксперименты. Ниже приводятся результаты расчетов для круглого пласта с одиночной скважиной в центре на сетке размером $3 \times 7 \times 5$. В круге выбиралась сетка, состоящая из 21 узла (три окружности по семь точек). По времени выбиралось пять узлов. Общее число узлов для решения этой нестационарной задачи равно 105. Проводилась проверка точности представления δ-функции. Для этого вычислялся интеграл от δ-функции по области $\displaystyle\int_G \delta(0,x)\,dx$. Получено значение интеграла, равное 0,9964. Затем вычислялась свертка δ-функции с пробной функцией:

$$f(r,\theta) = r^3\cos\theta\sin^2\theta + 1, \qquad \int_G \delta(0,x)f(x)\,dx = 1{,}000, \qquad x = r\,\mathrm{e}^{i\theta}.$$

Полученное значение свертки, равное 1,000, совпадает с точным. Решение (на сетке, состоящей из 21 узла (3×7)) представлено в виде слоев по времени в обратном порядке (пятый слой является верхним). Ниже проводится сравнение этого решения с аналитическим решением.

В работе [20. С. 362] приведено аналитическое решение для цилиндра $0 \leqslant r \leqslant a$. В момент $t = 0$ на поверхности $r = r'$ действует единичный мгновенный цилиндрический источник. При $r = a$ граничное условие имеет вид

$$\varkappa\frac{\partial v}{\partial r} + hv = 0, \qquad \varkappa \geqslant 0, \quad h \geqslant 0, \tag{5.1}$$

где

$$v = \frac{1}{\pi a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\varkappa\alpha_n^2 t}\,\frac{J_0(r\alpha_n)J_0(r'\alpha_n)}{J_0^2(a\alpha_n) + J_1^2(a\alpha_n)},$$

где α_n — положительные корни уравнения $\varkappa\alpha J_1(a\alpha) - hJ_0(a\alpha) = 0$. Если $h = 0$, то к правой части (5.1) нужно прибавить слагаемое $1/(\pi a^2)$.

В данном случае $\varkappa = 1$, $h = 0$, $a = 1$, и при $r = r' = 0{,}15 \cdot 10^{-4}$ действует источник постоянной интенсивности q. Тогда из (5.1) следует

$$v = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}\,\frac{q}{\varkappa\alpha_n^2}\sum_{n=1}^{\infty}(1 - \mathrm{e}^{-\varkappa\alpha_n^2 t})\,\frac{J_0(r\alpha_n)J_0(r'\alpha_n)}{J_0^2(\alpha_n)}, \tag{5.2}$$

где α_n — положительный корень функции Бесселя J_1. Соотношение (5.2) является решением краевой задачи

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varkappa\nabla^2 v + q, \qquad \frac{\partial v}{\partial r}\Big|_{r=1} = 0, \quad v\big|_{t=0} = 0.$$

В результате расчетов получены близкие значения аналитического и численного решений (различие в третьем знаке после запятой).

Таким образом, аналитическое решение практически совпадает с приведенным выше численным решением. Это свидетельствует о возможности моделирования точечных источников способом, описанным в п. **4**.

Заключение. Предложен метод линеаризации для решения классического уравнения Лейбензона, описывающего фильтрацию газа в пористой среде. Полученное в результате линеаризации линейное уравнение теплопроводности с переменными коэффициентами решается с использованием предложенного в данной работе алгоритма, который реагирует на гладкость решения рассматриваемой задачи. Идея создания таких методик принадлежит К. И. Бабенко. Предложен метод моделирования точечных источников (скважин), эффективность которого подтверждается тестовыми расчетами.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Повещенко Ю. А., Попов Ю. П.** Пакет программ для решения тепловых задач. М., 1978. (Препр. / АН СССР. Ин-т проблем механики; № 65).
2. **Закиров Э. С.** Трехмерные многофазные задачи прогнозирования, анализа и регулирования разработки месторождений нефти и газа. М.: Грааль, 2001.
3. **Сеттари Э.** Математическое моделирование пластовых систем / Э. Сеттари, Х. Азис. М.: Недра, 1982.
4. **Бабенко К. И.** Основы численного анализа. Изд. 2-е, испр. и доп. / Под ред. А. Д. Брюно. М.; Ижевск: Науч.-издат. центр "Регулярная и хаотическая динамика", 2002.
5. **Алгазин С. Д.** Численные алгоритмы классической матфизики. 22. Двумерное уравнение теплопроводности. Новая программа. М., 2008. (Препр. / РАН. Ин-т проблем механики; № 883).
6. **Алгазин С. Д.** Численный алгоритм без насыщения для решения нестационарных задач // Инж.-физ. журн. 2009. Т. 82, № 5. С. 950–960.
7. **Алгазин С. Д.** Численные алгоритмы классической матфизики. 15. Программа АМАЛИЯ — двумерная однофазная фильтрация газа в пористой среде. Версия 1. М., 2007. (Препр. / РАН. Ин-т проблем механики; № 828).
8. **Gear C. V.** Algoritm 407. DIFSUB for solution of ordinary differential equations [D2] // Comm. ACM. 1971. V. 14, N 3. P. 185–190.
9. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. М.: Наука, 1970. Т. 1.
10. **Алгазин С. Д.** Численные алгоритмы без насыщения в классических задачах математической физики. М.: Науч. мир, 2002.
11. **Nordsiek A.** On numerical integration of ordinary differential equations // Math. Comp. 1962. V. 16, N 77. P. 22–49.
12. **Чарный И. А.** Подземная гидрогазодинамика. М.: Гостоптехиздат, 1963.
13. **Андреев В. Б., Кряквина С. А.** Сеточные аппроксимации задачи о скважине // Численные методы решения задач многофазной несжимаемой жидкости. Новосибирск: Вычисл. центр СО АН СССР, 1975. С. 51–59.
14. **Самарский А. А.** О влиянии закрепления на собственные частоты замкнутых объемов // Докл. АН СССР. 1948. Т. 63, № 6. С. 631–638.
15. **Андреев В. Б., Кряквина С. А.** О функции источника сеточного оператора Лапласа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1972. Т. 12, № 2. С. 364–373.
16. **Андреев В. Б., Кряквина С. А.** О фундаментальном решении однопараметрического семейства разностных аппроксимаций оператора Лапласа на плоскости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1973. Т. 13, № 2. С. 325–337.

17. **Андреев В. Б., Кряквина С. А.** Аппроксимация задачи о несовершенной скважине // Исследования по теории разностных схем для эллиптических и параболических уравнений. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1973. С. 123–132.
18. **Peaceman D. W.** Interpolation of well-block pressures in numerical reservoir simulation // SPE J. 1978. V. 253, N 2. P. 183–194.
19. **Aavatsmark I., Klausen R. A.** Well index in reservoir simulation for slanted and slightly curved wells in 3D grids // SPE J. 2003. V. 278, N 1. P. 41–48.
20. **Карслоу Г.** Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер. М.: Наука, 1964.

Поступила в редакцию 25/III 2010 г.,
в окончательном варианте — 2/VII 2010 г.