УДК 534.222

ЗАВИСИМОСТЬ ФОРМЫ ФРОНТА ДЕТОНАЦИОННОЙ ВОЛНЫ ОТ ЕЕ СКОРОСТИ ПРИ ДЕТОНАЦИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА

А. Р. Гушанов

Московский государственный инженерно-физический институт (Технический университет), 115409 Москва

gushanov@theor.mephi.ru

С помощью разложения в ряд по радиальной переменной осуществляется переход от системы уравнений в частных производных, описывающих стационарное течение за фронтом ударной волны детонационного комплекса при детонации цилиндрического заряда, к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Формулируются необходимые уравнения для нахождения производных от решений по параметрам и начальные условия для них. Наложение условия непрерывной продолжаемости решений приводит к уравнениям, позволяющим определить форму фронта ударной волны как функцию скорости волны.

В работе делается попытка построить последовательный способ нахождения формы фронта ударной волны детонационного комплекса при детонации цилиндрического заряда конечного диаметра в случае малого отклонения скорости детонации от скорости Чепмена — Жуге. Оказывается, что эту задачу можно решить, не затрагивая проблем, связанных с описанием течения вблизи края заряда. Такая задача рассматривалась и ранее (см., например, [1, 2]), но в процессе ее решения авторы ограничивались лишь нахождением кривизны фронта — первым коэффициентом разложения функции, описывающей форму фронта по степеням ее аргумента. Отличие предлагаемого подхода состоит в принципиальной возможности нахождения формы фронта со сколь угодно высокой точностью.

Запишем в цилиндрической системе координат систему уравнений, определяющую аксиально-симметричное стационарное течение при наличии химической реакции, характеризуемой единственной переменной λ (доля прореагировавшего вещества):

$$v\,\frac{\partial\rho}{\partial z}+u\,\frac{\partial\rho}{\partial r}+\rho\Big(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}\Big)=0,$$

$$v\,\frac{\partial v}{\partial z}+u\,\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial z}=0,$$

$$v\,\frac{\partial u}{\partial z}+u\,\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial r}=0, \qquad (1)$$

$$v\,\frac{\partial p}{\partial z}+u\,\frac{\partial p}{\partial r}-c^2\Big(v\,\frac{\partial\rho}{\partial z}+u\,\frac{\partial\rho}{\partial r}\Big)=-\frac{\partial E/\partial\lambda}{\partial E/\partial p}\,R\equiv K,$$

$$v\,\frac{\partial\lambda}{\partial z}+u\,\frac{\partial\lambda}{\partial r}=R,$$

где u — радиальная, а v — аксиальная компоненты вектора скорости; E — внутренняя энергия единицы массы; c — скорость звука при постоянном значении λ; R — скорость химической реакции, зависящая в общем случае от давления p, плотности ρ и переменной λ (для краткости аргументы этой функции опущены).

Перейдем в систему координат (l, r), определяемую соотношением $l = z - z_f(r)$, где $z_f(r)$ — функция, описывающая поверхность фронта в цилиндрических координатах. В координатах (l, r) криволинейный фронт является плоскостью $l = 0$, в связи с чем существенно упрощается запись граничных условий. В этих координатах система (1) сводится к виду

$$(v+ud)\frac{\partial\rho}{\partial l}+u\,\frac{\partial\rho}{\partial r}+\rho\Big(\frac{\partial v}{\partial l}+d\,\frac{\partial u}{\partial l}+\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}\Big)=0,$$

$$(v+ud)\frac{\partial v}{\partial l}+u\,\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial l}=0,$$

$$(v+ud)\frac{\partial u}{\partial l}+u\,\frac{\partial u}{\partial r}+d\,\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial l}+\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial r}=0, \qquad (2)$$

$$(v+ud)\frac{\partial p}{\partial l}+u\,\frac{\partial p}{\partial r}-c^2\Big((v+ud)\frac{\partial\rho}{\partial l}+u\,\frac{\partial\rho}{\partial r}\Big)=K,$$

$$(v+ud)\frac{\partial\lambda}{\partial l}+u\,\frac{\partial\lambda}{\partial r}=R,$$

где $d=-z_f'(r)$.

Имея целью найти форму фронта при заданной скорости детонационной волны, разложим по степеням r функцию $z_f(r)$:

$$z_f(r)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i r^{2i},$$

а также и остальные функции:

$$p(r,l)=\sum_{i=0}^{\infty}p_i(l)r^{2i},\quad \rho(r,l)=\sum_{i=0}^{\infty}\rho_i(l)r^{2i},$$

$$v(r,l)=\sum_{i=0}^{\infty}v_i(l)r^{2i},\quad \lambda(r,l)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_i(l)r^{2i},$$

$$u(r,l)=\sum_{i=0}^{\infty}u_i(l)r^{2i+1}.$$

(Наличие только четных степеней r в разложении p, ρ, v, λ и только нечетных степеней в разложении u следует из требования аналитичности этих функций на оси ($r=0$). Заметим также, что функции с нулевыми индексами являются значениями соответствующих величин на оси, кроме $u_0(l)$, равной $\partial u/\partial r$ при $r=0$.) Подставляя эти ряды в систему (2) и группируя коэффициенты при одинаковых степенях r, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $p_i(l)$, $\rho_i(l)$, $v_i(l)$, $u_i(l)$ и $\lambda_i(l)$:

$$\sum_{k+s=m}\Big[\Big(v_k-2\sum_{j+n=k}u_j n a_n\Big)\rho_s'+ +\rho_s\Big(v_k'-2\sum_{j+n=k}u_j' n a_n\Big)+2(m+1)\rho_s u_k\Big]=0,$$

$$\sum_{i+k+s=m}\rho_i\Big[\Big(v_k-2\sum_{j+n=k}u_j n a_n\Big)v_s'+ +2s u_k v_s\Big]+p_m'=0,$$

$$\sum_{i+k+s=m}\rho_i\Big[\Big(v_k-2\sum_{j+n=k}u_j n a_n\Big)u_s'+(2s+1)u_k u_s\Big]- -2\sum_{k+s=m}(k+1)a_{k+1}p_s'+2(m+1)p_{m+1}=0, \tag{3}$$

$$\sum_{k+s=m}\Big[\Big(v_k-2\sum_{j+n=k}u_j n a_n\Big)p_s'+2s u_k p_s\Big]- -\sum_{i+k+s=m}c_i^2\Big[\Big(v_k-2\sum_{j+n=k}u_j n a_n\Big)\rho_s'+2s u_k\rho_s\Big]=K_m,$$

$$\sum_{k+s=m}\Big[\Big(v_k-2\sum_{j+n=k}u_j n a_n\Big)\lambda_s'+2s u_k\lambda_s\Big]=R_m,$$

$$m=0,1,\dots\,.$$

Здесь штрих означает производную по переменной l; $R_m(l)$, $K_m(l)$ и $c_m^2(l)$ — коэффициенты разложения в ряд по степеням r функций

$$R(p,\rho,\lambda)= =R\Big(\sum_{i=0}^{\infty}p_i(l)r^{2i},\sum_{i=0}^{\infty}\rho_i(l)r^{2i},\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_i(l)r^{2i}\Big),$$

$$K(p,\rho,\lambda)= =K\Big(\sum_{i=0}^{\infty}p_i(l)r^{2i},\sum_{i=0}^{\infty}\rho_i(l)r^{2i},\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_i(l)r^{2i}\Big),$$

$$c^2(p,\rho,\lambda)= =c^2\Big(\sum_{i=0}^{\infty}p_i(l)r^{2i},\sum_{i=0}^{\infty}\rho_i(l)r^{2i},\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_i(l)r^{2i}\Big).$$

Рассмотрим зависимость решений этой системы от коэффициента a_k и скорости детонационной волны D как от параметров. Разрешая уравнения системы (3) относительно производных, можно заметить, что в общем случае решения этих уравнений продолжаемы только до точки $v_0=c_0$. Запишем, например, нормализованные (т. е. разрешенные относительно производных) уравнения при $m=0$:

$$v_0'=\frac{-2c_0^2\rho_0u_0+K_0}{\rho_0(c_0^2-v_0^2)},\quad p_0'=\frac{2v_0c_0^2\rho_0u_0-v_0K_0}{c_0^2-v_0^2},$$

$$\rho_0'=\frac{2v_0^2\rho_0u_0-K_0}{v_0(c_0^2-v_0^2)},$$

$$u_0'=\frac{1}{c_0^2-v_0^2}\Big[\frac{2a_1}{\rho_0}(2c_0^2\rho_0u_0-K_0)- -(c_0^2-v_0^2)\Big(\frac{2p_1}{\rho_0v_0}+\frac{u_0^2}{v_0}\Big)\Big],$$

$$\lambda_0' = \frac{R_0}{v_0}.$$

(При других значениях m уравнения выглядят аналогично.) Решения этих уравнений продолжаемы через точку $v_0 = c_0$ только в том случае, если одновременно с выражением $v_0^2 - c_0^2$ обращается в нуль и выражение $2c_0^2\rho_0 u_0 - K_0$. Условием непрерывной продолжаемости решений через эту точку (т. е. отсутствия особенности) и определяются значения a_k (форма фронта) как функции D.

Для нахождения зависимости $a_k(D)$ поступим следующим образом. Пусть нам известны коэффициенты a_k при некоторой скорости D ($a_k = 0$ при $D = D_{\text{C-J}}$, где $D_{\text{C-J}}$ — скорость идеальной детонации Чепмена — Жуге в безграничной среде, т. е. в случае плоского фронта). Найдем производные da_k/dD, d^2a_k/dD^2 и т. д., и тем самым определим зависимость $a_k(D)$. Для этого заметим, что производная

$$\frac{dp_m}{dD} = \frac{\partial p_m}{\partial D} + \sum_k \frac{\partial p_m}{\partial a_k}\frac{da_k}{dD} \tag{4}$$

(здесь вместо производных давления можно использовать также производные плотности или скорости) конечна в точке $M_0 \equiv v_0/c_0 = 1$, в то время как производные $\partial p_m/\partial D$ и $\partial p_m/\partial a_k$ при приближении к этой точке стремятся к бесконечности, что можно видеть, нормализовав дифференциальные уравнения для этих функций (см. ниже). Равенство (4) и позволяет найти da_k/dD. Найдем эти производные при $a_k = 0$ и $D = D_{\text{C-J}}$. Запишем

$$\frac{dp_0}{dD} = \frac{\partial p_0}{\partial D} + \frac{\partial p_0}{\partial a_1}\frac{da_1}{dD} + \frac{\partial p_0}{\partial a_2}\frac{da_2}{dD} + \ldots,$$

$$\frac{dp_1}{dD} = \frac{\partial p_1}{\partial D} + \frac{\partial p_1}{\partial a_1}\frac{da_1}{dD} + \frac{\partial p_1}{\partial a_2}\frac{da_2}{dD} + \ldots$$

и т. д. Как будет показано ниже, производные $\partial p_m/\partial a_k$ и другие отличны от нуля только при $m < k$, а $\partial p_m/\partial D$ — только при $m = 0$. Отсюда, рассматривая предел $M_0 \to 1$, получаем, что $da_k/dD = 0$ при $k > 1$ и

$$\frac{da_1}{dD} = -\lim_{M_0\to 1}\frac{\partial p_0/\partial D}{\partial p_0/\partial a_1}, \tag{5}$$

т. е. в линейном по D приближении от скорости детонационной волны зависит лишь первый коэффициент разложения $z_f(r)$ по степеням r (кривизна фронта). Рассмотрим следующее приближение — найдем d^2a_k/dD^2. По аналогии с предыдущим случаем запишем производные d^2p_m/dD^2, отбросив с учетом сказанного выше нулевые слагаемые:

$$\frac{d^2p_0}{dD^2} = \frac{\partial^2 p_0}{\partial D^2} + \frac{\partial^2 p_0}{\partial a_1^2}\Big(\frac{da_1}{dD}\Big)^2 + 2\,\frac{\partial^2 p_0}{\partial a_1\partial D}\,\frac{da_1}{dD} + {}$$
$$+ \frac{\partial p_0}{\partial a_1}\frac{d^2a_1}{dD^2} + \frac{\partial p_0}{\partial a_2}\frac{d^2a_2}{dD^2} + \frac{\partial p_0}{\partial a_3}\frac{d^2a_3}{dD^2} + \ldots,$$

$$\frac{d^2p_1}{dD^2} = \frac{\partial^2 p_1}{\partial D^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial a_1^2}\Big(\frac{da_1}{dD}\Big)^2 + 2\,\frac{\partial^2 p_1}{\partial a_1\partial D}\,\frac{da_1}{dD} + {}$$
$$+ \frac{\partial p_1}{\partial a_2}\frac{d^2a_2}{dD^2} + \frac{\partial p_1}{\partial a_3}\frac{d^2a_3}{dD^2} + \ldots,$$

$$\frac{d^2p_2}{dD^2} = \frac{\partial^2 p_2}{\partial D^2} + \frac{\partial^2 p_2}{\partial a_1^2}\Big(\frac{da_1}{dD}\Big)^2 + 2\,\frac{\partial^2 p_2}{\partial a_1\partial D}\,\frac{da_1}{dD} + {}$$
$$+ \frac{\partial p_2}{\partial a_3}\frac{d^2a_3}{dD^2} + \ldots$$

и т. д. Как будет показано ниже, производные $\partial^2p_m/\partial a_1^2$ и $\partial^2p_m/\partial a_1\partial D$ равны нулю при $m > 1$, а $\partial^2p_m/\partial D^2$ — при $m > 0$, поэтому, опять рассматривая предел $M_0 \to 1$, получаем, что $d^2a_k/dD^2 = 0$ при $k > 2$ и

$$\frac{d^2a_2}{dD^2} = -\lim_{M_0\to 1}\Big[\Big(\frac{\partial^2 p_1}{\partial a_1^2}\Big(\frac{da_1}{dD}\Big)^2 + {}$$
$$+ 2\,\frac{\partial^2 p_1}{\partial a_1\partial D}\,\frac{da_1}{dD}\Big)\Big/\frac{\partial p_1}{\partial a_2}\Big], \tag{6}$$

$$\frac{d^2a_1}{dD^2} = -\lim_{M_0\to 1}\Big[\Big(\frac{\partial^2 p_0}{\partial D^2} + \frac{\partial^2 p_0}{\partial a_1^2}\Big(\frac{da_1}{dD}\Big)^2 + {}$$
$$+ 2\,\frac{\partial^2 p_0}{\partial a_1\partial D}\,\frac{da_1}{dD} + \frac{\partial p_0}{\partial a_2}\frac{d^2a_2}{dD^2}\Big)\Big/\frac{\partial p_0}{\partial a_1}\Big]. \tag{7}$$

Таким образом, для вычисления da_1/dD достаточно уметь находить производные функций p_m по параметрам a_k и D (в данном случае — функции $\partial p_0/\partial a_1$ и $\partial p_0/\partial D$), а для вычисления d^2a_1/dD^2 и d^2a_1/dD^2 — еще и функции $\partial^2p_0/\partial D^2$, $\partial^2p_0/\partial a_1^2$, $\partial^2p_0/\partial a_1\partial D$, $\partial p_0/\partial a_2$, $\partial p_1/\partial a_2$, $\partial^2p_1/\partial a_1^2$ и $\partial^2p_1/\partial a_1\partial D$.

Действуя подобным образом, в принципе можно найти любую производную коэффициентов a_k по скорости детонации D, т. е. определить форму фронта с необходимой точностью.

Рассмотрим теперь процедуру вычисления указанных выше производных от функций p_m по параметрам a_k и D, фигурирующих в формулах (5)–(7). Для начала заметим, что нас интересуют производные при фиксированном значении M_0, а не при фиксированном значении l (уравнения для последних можно получить, варьируя уравнения системы (3) по параметрам a_k или D, см., например, [3]). Связь между этими производными выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial p_m(M_0,\boldsymbol{a},D)}{\partial a_k} = \frac{\partial p_m(l,\boldsymbol{a},D)}{\partial a_k} + \frac{\partial p_m(l,\boldsymbol{a},D)}{\partial l}\,\frac{\partial l(M_0,\boldsymbol{a},D)}{\partial a_k},$$

$$\frac{\partial l(M_0,\boldsymbol{a},D)}{\partial a_k} = -\frac{\partial M_0(l,\boldsymbol{a},D)}{\partial a_k}\Big/\frac{\partial M_0(l,\boldsymbol{a},D)}{\partial l}.$$

Здесь символом $\boldsymbol{a}$ обозначен набор коэффициентов a_k, $k = 1,\ldots,\infty$. Аналогичная связь для производных второго порядка имеет вид

$$\frac{\partial^2 p_m(M_0,\boldsymbol{a},D)}{\partial a_i\partial a_j} = \frac{\partial^2 p_m(l,\boldsymbol{a},D)}{\partial a_i\partial a_j} + \frac{\partial^2 p_m(l,\boldsymbol{a},D)}{\partial a_i\partial l}\,\frac{\partial l(M_0,\boldsymbol{a},D)}{\partial a_j} + \frac{\partial^2 p_m(l,\boldsymbol{a},D)}{\partial a_j\partial l}\,\frac{\partial l(M_0,\boldsymbol{a},D)}{\partial a_i} + \frac{\partial^2 p_m(l,\boldsymbol{a},D)}{\partial^2 l}\,\frac{\partial l(M_0,\boldsymbol{a},D)}{\partial a_i}\,\frac{\partial l(M_0,\boldsymbol{a},D)}{\partial a_j} + \frac{\partial p_k(l,\boldsymbol{a},D)}{\partial l}\,\frac{\partial^2 l(M_0,\boldsymbol{a},D)}{\partial a_i\partial a_j},$$

$$\frac{\partial^2 l(M_0,\boldsymbol{a},D)}{\partial a_i\partial a_j} = -\Big(\frac{\partial^2 M_0(l,\boldsymbol{a},D)}{\partial a_i\partial a_j} + \frac{\partial^2 M_0(l,\boldsymbol{a},D)}{\partial a_i\partial l}\,\frac{\partial l(M_0,\boldsymbol{a},D)}{\partial a_j} + \frac{\partial^2 M_0(l,\boldsymbol{a},D)}{\partial a_j\partial l}\,\frac{\partial l(M_0,\boldsymbol{a},D)}{\partial a_i} + \frac{\partial^2 M_0(l,\boldsymbol{a},D)}{\partial^2 l}\,\frac{\partial l(M_0,\boldsymbol{a},D)}{\partial a_j}\,\frac{\partial l(M_0,\boldsymbol{a},D)}{\partial a_i}\Big)\Big/\frac{\partial M_0(l,\boldsymbol{a},D)}{\partial l}.$$

Уравнения для нахождения производных по параметрам a_k или D от функций $p_m(l,\boldsymbol{a},D)$, как уже было сказано выше, можно найти, варьируя уравнения системы (3) по параметрам a_k или D. Запишем, например, систему уравнений для нахождения $\partial p_m/\partial a_k$ при $a_k = 0$ и $D = D_{\text{C-J}}$ (при этом $p_m(l) \equiv 0$, $\rho_m(l) \equiv 0$ и т. д. при $m \geqslant 1$, $u_m(l) \equiv 0$, а функции с нулевыми индексами являются соответствующими точными функциями в плоском случае, т. е. при детонации в безграничной среде):

$$\frac{\partial \rho'_m}{\partial a_k}\,v_0 + \rho'_0\,\frac{\partial v_m}{\partial a_k} + \frac{\partial \rho_m}{\partial a_k}\,v'_0 + \rho_0\,\frac{\partial v'_m}{\partial a_k} + 2(m+1)\rho_0\,\frac{\partial u_m}{\partial a_k} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial a_k}\,v_0v'_0 + \rho_0\,\frac{\partial v_m}{\partial a_k}\,v'_0 + \rho_0 v_0\,\frac{\partial v'_m}{\partial a_k} + \frac{\partial p'_m}{\partial a_k} = 0,$$

$$\rho_0 v_0\,\frac{\partial u'_m}{\partial a_k} - 2(m+1)\delta_{k,m+1}p'_0 + 2(m+1)\frac{\partial p_{m+1}}{\partial a_k} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial v_m}{\partial a_k}\,p'_0 + v_0\,\frac{\partial p'_m}{\partial a_k} - \frac{\partial c_m^2}{\partial a_k}\,v_0\rho'_0 - c_0^2\,\frac{\partial v_m}{\partial a_k}\,\rho'_0 - c_0^2 v_0\,\frac{\partial \rho'_m}{\partial a_k} = \frac{\partial K_m}{\partial a_k},$$

$$\frac{\partial v_m}{\partial a_k}\,\lambda'_0 + v_0\,\frac{\partial \lambda'_m}{\partial a_k} = \frac{\partial R_m}{\partial a_k},$$

где

$$\frac{\partial K_m}{\partial a_k} = \frac{\partial K}{\partial \rho}\,\frac{\partial \rho_m}{\partial a_k} + \frac{\partial K}{\partial p}\,\frac{\partial p_m}{\partial a_k} + \frac{\partial K}{\partial \lambda}\,\frac{\partial \lambda_m}{\partial a_k},$$

$$\frac{\partial R_m}{\partial a_k} = \frac{\partial R}{\partial \rho}\,\frac{\partial \rho_m}{\partial a_k} + \frac{\partial R}{\partial p}\,\frac{\partial p_m}{\partial a_k} + \frac{\partial R}{\partial \lambda}\,\frac{\partial \lambda_m}{\partial a_k},$$

$$\frac{\partial c_m^2}{\partial a_k} = \frac{\partial c^2}{\partial \rho}\,\frac{\partial \rho_m}{\partial a_k} + \frac{\partial c^2}{\partial p}\,\frac{\partial p_m}{\partial a_k} + \frac{\partial c^2}{\partial \lambda}\,\frac{\partial \lambda_m}{\partial a_k},$$

производные по ρ, p и λ берутся при $\rho = \rho_0(l)$, $p = p_0(l)$ и $\lambda = \lambda_0(l)$. Рассматривая эту систему с начальными условиями (см. приложение), можно сделать вывод, что производные $\partial p_m/\partial a_k$ и другие отличны от нуля только при $m < k$ (в силу того, что при $m \geqslant k$ начальные условия нулевые, а сами уравнения однородные). Таким же образом можно записать уравнения для $\partial p_m/\partial D$, рассмотрение которых позволяет сделать вывод, что $\partial p_m/\partial D = 0$ при $m \neq 0$, а $\partial u_m/\partial D = 0$ при любом значении m.

Приведем также систему, определяющую $\partial^2 p_m/\partial a_1^2$ при $a_k = 0$ и $D = D_{\text{C-J}}$ с учетом того, что отличны от нуля только производные $\partial p_0/\partial a_1$, $\partial \rho_0/\partial a_1$, $\partial v_0/\partial a_1$, $\partial u_0/\partial a_1$ и $\partial \lambda_0/\partial a_1$:

$$\frac{\partial^2 \rho_m'}{\partial a_1^2}\, v_0 + \rho_0'\, \frac{\partial^2 v_m}{\partial a_1^2} + \frac{\partial^2 \rho_m}{\partial a_1^2}\, v_0' + \rho_0\, \frac{\partial^2 v_m'}{\partial a_1^2} + 2(m+1)\rho_0\, \frac{\partial^2 u_m}{\partial a_1^2} + \delta_{m,0}\Big(2\, \frac{\partial v_0}{\partial a_1}\, \frac{\partial \rho_0'}{\partial a_1} + 2\, \frac{\partial v_0'}{\partial a_1}\, \frac{\partial \rho_0}{\partial a_1} + 4\, \frac{\partial u_0}{\partial a_1}\, \frac{\partial \rho_0}{\partial a_1}\Big) - 4\, \delta_{m,1}\Big(\rho_0'\, \frac{\partial u_0}{\partial a_1} + \rho_0\, \frac{\partial u_0'}{\partial a_1}\Big) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \rho_m}{\partial a_1^2}\, v_0 v_0' + \rho_0\, \frac{\partial^2 v_m}{\partial a_1^2}\, v_0' + \rho_0 v_0\, \frac{\partial^2 v_m'}{\partial a_1^2} + \frac{\partial^2 p_m'}{\partial a_1^2} + 2\delta_{m,0}\Big(\frac{\partial \rho_0}{\partial a_1}\, \frac{\partial v_0}{\partial a_1}\, v_0' + \frac{\partial \rho_0}{\partial a_1}\, \frac{\partial v_0'}{\partial a_1}\, v_0 + \rho_0\, \frac{\partial v_0}{\partial a_1}\, \frac{\partial v_0'}{\partial a_1}\Big) - 4\delta_{m,1}\rho_0\, \frac{\partial u_0}{\partial a_1}\, v_0' = 0,$$

$$v_0\, \frac{\partial^2 u_m'}{\partial a_1^2} + 2\delta_{m,0}\Big[\frac{\partial \rho_0}{\partial a_1}\, \frac{\partial u_0'}{\partial a_1}\, v_0 + \rho_0\, \frac{\partial v_0}{\partial a_1}\, \frac{\partial u_0'}{\partial a_1} + \rho_0\Big(\frac{\partial u_0}{\partial a_1}\Big)^2\Big] + 2(m+1)\frac{\partial^2 p_{m+1}}{\partial a_1^2} - 4\delta_{m,0}\, \frac{\partial p_0'}{\partial a_1} = 0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 v_m}{\partial a_1^2}\, p_0' + v_0\, \frac{\partial^2 p_m'}{\partial a_1^2} - \frac{\partial^2 c_m^2}{\partial a_1^2}\, v_0 \rho_0' - c_0^2\, \frac{\partial^2 v_m}{\partial a_1^2}\, \rho_0' - c_0^2 v_0\, \frac{\partial^2 \rho_m'}{\partial a_1^2} + 2\delta_{m,0}\Big(\frac{\partial v_0}{\partial a_1}\, \frac{\partial p_0'}{\partial a_1} - c_0^2\, \frac{\partial v_0}{\partial a_1}\, \frac{\partial \rho_0'}{\partial a_1}\Big) - 4\delta_{m,1}\frac{\partial u_0}{\partial a_1}(p_0' - c_0^2 \rho_0') = \frac{\partial^2 K_m}{\partial a_1^2},$$

$$\frac{\partial^2 v_m}{\partial a_1^2}\, \lambda_0' + v_0\, \frac{\partial^2 \lambda_m'}{\partial a_1^2} + 2\delta_{m,0}\, \frac{\partial v_0}{\partial a_1}\, \frac{\partial \lambda_0'}{\partial a_1} - 4\delta_{m,1}\, \frac{\partial u_0}{\partial a_1}\, \lambda_0' = \frac{\partial^2 R_m}{\partial a_1^2}.$$

Здесь

$$\frac{\partial^2 R_0}{\partial a_1^2} = \frac{\partial^2 R_0}{\partial p^2}\Big(\frac{\partial p_0}{\partial a_1}\Big)^2 + \frac{\partial^2 R_0}{\partial \rho^2}\Big(\frac{\partial \rho_0}{\partial a_1}\Big)^2 + \frac{\partial^2 R_0}{\partial \lambda^2}\Big(\frac{\partial \lambda_0}{\partial a_1}\Big)^2 + 2\, \frac{\partial^2 R_0}{\partial \rho \partial p}\, \frac{\partial \rho_0}{\partial a_1}\, \frac{\partial p_0}{\partial a_1} + 2\, \frac{\partial^2 R_0}{\partial \rho \partial \lambda}\, \frac{\partial \rho_0}{\partial a_1}\, \frac{\partial \lambda_0}{\partial a_1} + 2\, \frac{\partial^2 R_0}{\partial \lambda \partial p}\, \frac{\partial \lambda_0}{\partial a_1}\, \frac{\partial p_0}{\partial a_1} + \frac{\partial R}{\partial p}\, \frac{\partial^2 p_0}{\partial a_1^2} + \frac{\partial R}{\partial \rho}\, \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial a_1^2} + \frac{\partial R}{\partial \lambda}\, \frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial a_1^2},$$

$$\frac{\partial^2 R_m}{\partial a_1^2} = \frac{\partial R}{\partial p}\, \frac{\partial^2 p_m}{\partial a_1^2} + \frac{\partial R}{\partial \rho}\, \frac{\partial^2 \rho_m}{\partial a_1^2} + \frac{\partial R}{\partial \lambda}\, \frac{\partial^2 \lambda_m}{\partial a_1^2} \quad \text{при } m > 0,$$

аналогичным образом выглядят $\partial^2 K_m/\partial a_1^2$ и $\partial^2 c_m^2/\partial a_1^2$. Из рассмотрения этой системы с граничными условиями можно сделать вывод, что $\partial^2 p_m/\partial a_1^2 = 0$ при $m > 1$. Аналогично $\partial^2 p_m/\partial a_1 \partial D = 0$ при $m > 1$ и $\partial^2 p_m/\partial D^2 = 0$ при $m > 0$.

Уравнения (8), (9) и сформулированные в приложении начальные условия для них позволяют найти производные от решений по параметрам a_k и D, что, в свою очередь, позволяет найти форму фронта ударной волны в виде разложения коэффициентов a_k по скорости D. Подобная процедура может быть проделана для нахождения производной a_k по D любого порядка, хотя необходимо отметить, что сложность выкладок стремительно нарастает с увеличением порядка производных.

Таким образом, в работе решается задача о нахождении формы фронта детонационной волны как функции от ее скорости при детонации заряда конечного диаметра. Кроме того, что эта задача интересна сама по себе, она является необходимой составной частью решения более общей задачи о нахождении взаимосвязи основных величин, характеризующих детонацию цилиндрического заряда: скорости детонационной волны, радиуса заряда и формы фронта волны.

В заключение хотелось бы выразить искреннюю признательность Н. М. Кузнецову и В. Г. Грудницкому за ценные советы и обсуждение.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Представим значения плотности, давления и составляющих скорости за фронтом искривленной ударной волны в виде

$$\rho_f(r, D, \boldsymbol{a}) = \rho_{id}(D\cos\alpha),$$

$$p_f(r, D, \boldsymbol{a}) = p_{id}(D\cos\alpha),$$

$$v_f(r, D, \boldsymbol{a}) = D\cos\varphi\cos\alpha\sqrt{\mathrm{tg}^{\,2}\,\alpha + \rho_b^2/\rho_{id}^2},$$

$$u_f(r, D, \boldsymbol{a}) = D\sin\varphi\cos\alpha\sqrt{\mathrm{tg}^{\,2}\,\alpha + \rho_b^2/\rho_{id}^2},$$

$$\lambda(r, D, \boldsymbol{a}) = 0,$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\,(\mathrm{tg}\;\alpha(\rho_{id}/\rho_b)) - \alpha,$$

где α — угол между нормалью к фронту в данной точке и направлением распространения детонационной волны, $\mathrm{tg}\;\alpha = z_f'(r) = \sum_{i=1}^{\infty} 2ia_i r^{2i-1}$; ρ_{id} и p_{id} — плотность и давление за фронтом плоско0й ударной волны, распространяющейся со скоростью $D\cos\alpha$ в той же исходной среде, т. е. при тех же значениях ρ_b и p_b — плотности и давления перед ударной волной. Начальные условия для системы (3) имеют вид

$$p_m|_{l=0} = \frac{\partial^{2m} p_f}{(2m)!\partial r^{2m}}\Big|_{r=0},$$

$$\rho_m|_{l=0} = \frac{\partial^{2m} \rho_f}{(2m)!\partial r^{2m}}\Big|_{r=0},$$

$$v_m|_{l=0} = \frac{\partial^{2m} v_f}{(2m)!\partial r^{2m}}\Big|_{r=0},$$

$$u_{m|l=0} = \frac{\partial^{2m+1} u_f}{(2m+1)!\partial r^{2m+1}}\Big|_{r=0}.$$

Начальные условия для системы (8) выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial p_m}{\partial a_k}\Big|_{l=0} = \frac{\partial^{2m+1} p_f}{(2m)!\partial a_k \partial r^{2m}}\Big|_{a_i=0, r=0},$$

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial a_k}\Big|_{l=0} = \frac{\partial^{2m+1} \rho_f}{(2m)!\partial a_k \partial r^{2m}}\Big|_{a_i=0, r=0},$$

$$\frac{\partial v_m}{\partial a_k}\Big|_{l=0} = \frac{\partial^{2m+1} v_f}{(2m)!\partial a_k \partial r^{2m}}\Big|_{a_i=0, r=0},$$

$$\frac{\partial u_m}{\partial a_k}\Big|_{l=0} = \frac{\partial^{2m+2} u_f}{(2m+1)!\partial a_k \partial r^{2m+1}}\Big|_{a_i=0, r=0}.$$

Модифицируем их вид. Например, для давления и радиальной составляющей скорости запишем:

$$\frac{\partial p_m}{\partial a_k}\Big|_{l=0} = \frac{\partial^{2m}}{(2m)!\partial r^{2m}}\,\frac{\partial p_f}{\partial\,\mathrm{tg}\;\alpha}\,\frac{\partial\,\mathrm{tg}\;\alpha}{\partial a_k}\Big|_{a_i=0, r=0},$$

$$\frac{\partial u_m}{\partial a_k}\Big|_{l=0} = \frac{\partial^{2m+1}}{(2m+1)!\partial r^{2m+1}} \times$$
$$\times \frac{\partial u_f}{\partial\,\mathrm{tg}\;\alpha}\,\frac{\partial\,\mathrm{tg}\;\alpha}{\partial a_k}\Big|_{a_i=0, r=0}.$$

Так как p_f — четная функция $\mathrm{tg}\;\alpha$, а при $a_i = 0$ имеем $\alpha = 0$, то $(\partial p_m/\partial a_k)|_{l=0} = 0$. По тем же причинам $(\partial \rho_m/\partial a_k)|_{l=0} = 0$ и $(\partial v_m/\partial a_k)|_{l=0} = 0$. Скорость u_f — нечетная функция α, поэтому

$$\frac{\partial u_f}{\partial\,\mathrm{tg}\;\alpha}\,\frac{\partial\,\mathrm{tg}\;\alpha}{\partial a_k}\Big|_{a_i=0} \sim r^{2k-1},$$

т. е. отличны от нуля только $(\partial u_{k-1}/\partial a_k)|_{l=0}$. Аналогичным образом, поскольку

$$\frac{\partial^2 p}{\partial\,\mathrm{tg}\;\alpha^2}\,\frac{\partial\,\mathrm{tg}\;\alpha}{\partial a_i}\,\frac{\partial\,\mathrm{tg}\;\alpha}{\partial a_j}\Big|_{a_k=0} \sim r^{2i-1} r^{2j-1},$$

отличны от нуля только $(\partial p_{i+j-1}/\partial a_i \partial a_j)|_{l=0}$, $(\partial \rho_{i+j-1}/\partial a_i \partial a_j)|_{l=0}$ и $(\partial v_{i+j-1}/\partial a_i \partial a_j|_{l=0}$. С помощью подобных рассуждений можно показать, что из производных $\partial/\partial D$ отличны от нуля только $\partial p_0/\partial D$, $\partial \rho_0/\partial D$, $\partial v_0/\partial D$, $\partial^2 p_0/\partial D^2$, $\partial^2 \rho_0/\partial D^2$, $\partial^2 v_0/\partial D^2$ и $\partial^2 u_0/\partial D \partial a_1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Wood W. W., Kirkwood J. G.** Diameter effect in condensed explosives. The relation between velocity and radius of curvature of the detonation wave // J. Chem. Phys. 1954. V. 22, N 11. P. 1920–1924.
2. **Bdzill J. B.** Steady-state two-dimensional detonation // J. Fluid Mech. 1981. V. 108. P. 195–226.
3. **Понтрягин Л. С.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1970.

Поступила в редакцию 24/III 2000 г.