

плавучести на характеристики факела. Другая состоит в том, что кинетический механизм окисления азота не выяснен полностью. Так, например, еще нет полной уверенности в том, что в пламени отсутствуют области со сверхравновесной концентрацией атомарного кислорода, в которых окисление азота значительно ускоряется. Задача дальнейших исследований — проведение детальных и аккуратных оценок концентрации окислов азота с учетом влияния сил плавучести и пульсаций концентрации на процесс окисления азота, которые смогут выявить степень отличия состава от равновесного.

*Поступила в редакцию
11/V 1979*

ЛИТЕРАТУРА

1. R. W. Bilger, R. E. Beck. Fifteenth Symp. (Internat.) on Combustion. The Combustion Institute, 1975.
2. T. Takagi, M. Ogasawara et al. Fifteenth Symp. (Internat.) on Combustion. The Combustion Institute, 1975.
3. G. A. Lavoie, A. F. Shlager. Combust. Sci. Technol., 1974, 8, 215.
4. Ю. Я. Бурико, В. Р. Кузнецов. ФГВ, 1978, 14, 3.
5. И. Я. Сигал. Защита воздушного бассейна при сжигании топлива. М., Недра, 1977.
6. М. Г. Кталхерман и др. ФГВ, 1974, 10, 5.
7. А. Д. Рекип. Теплоэнергетика, 1977, 2.
8. G. H. Markstein. Combust. and Flame, 1976, 27, 1.
9. S. R. Gollahdli. Combust. Sci. and Technol., 1977, 15, 147.
10. R. W. Bilger. Progr. Energy. Combust. Sci., 1976, 1, 1.
11. Я. Б. Зельдович, П. Я. Садовников, Д. А. Франк-Каменецкий. Окисление азота при горении. М., Изд-во АН СССР, 1947.

ХАРАКТЕРНЫЕ РЕЖИМЫ ЭКЗОТЕРМИЧЕСКОГО РЕАГИРОВАНИЯ В СИСТЕМЕ ПОРИСТОЕ ТЕЛО — ГАЗ

*Н. Е. Коловертных, С. И. Худяев, А. С. Штейнберг
(Ленинград)*

Классическая теория теплового взрыва, изложенная в работах Н. Н. Семенова, Д. А. Франк-Каменецкого, О. М. Тодеса, А. Г. Мержана и других исследователей, позволяет для экзотермических реакций с известной кинетикой вычислять величину периода индукции и положение предела самовоспламенения. Она была применена к решению многочисленных задач, связанных с определением характеристик гомогенных конденсированных и газовых систем. В классической теории предполагается, что система полностью гомогенизирована, т. е. массоперенос продуктов (исходных, промежуточных или конечных) либо отсутствует, либо слабо влияет на макрокинетику процесса.

В процессе исследования и аппаратурно-технологического оформления ряда химических процессов приходится встречаться со склонными к тепловому взрыву объектами, скорость реакции в которых определяется не только уровнем температуры, но и интенсивностью диффузии реагентов. Примером может служить гетерогенная система, в которой газ, проникая в пористую насыпку, взаимодействует с ее материалом, образуя твердый конечный продукт. В [1] проанализированы макрокинетические особенности изотермического реагирования в таких системах: конечная глубина проникновения фронта реакции в пористый слой при

дробном порядке реакции и т. п. Совместное рассмотрение процессов нестационарного тепло- и массопереноса в пористой системе вплоть до теплового самовоспламенения представляет интерес не только для задач химической технологии, но также для ряда смежных областей: самовозгорание натуральных топлив (угля, торфа), искусственных материалов, металлических порошков и т. п. [2]. Сложности строгого теоретического анализа этих процессов очевидны.

В настоящей работе исследуются характерные режимы процесса в пористой системе, когда в процессе диффузионного подвода газообразного реагента в ней происходит экзотермическая реакция с образованием твердого продукта. Динамическое поведение данной системы определяется уравнениями теплового и материального баланса, которые по аналогии с классической теорией теплового взрыва записаны в безразмерных переменных:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} &= (i - \eta) \exp \frac{\Theta}{1 + \beta \Theta} + \frac{1}{\delta_*} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial \tau} &= \gamma (1 - \eta) \exp \frac{\Theta}{1 + \beta \Theta} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2}.\end{aligned}\quad (1)$$

Начальные и граничные условия

$$\begin{aligned}\tau = 0, \quad \eta = 1, \quad \Theta = 0, \\ \xi = 0, \quad \partial \eta / \partial \xi = 0, \quad \partial \Theta / \partial \xi = 0, \\ \xi = 1, \quad \partial \eta / \partial \xi = -\text{Vi}_D \eta, \quad \partial \Theta / \partial \xi = -\text{Vi}_T \Theta.\end{aligned}\quad (2)$$

Система (1) записана для реакции 1-го порядка, это обычная модель в задачах теплового взрыва с выгоранием и выбрана в целях наглядности изложения¹.

Влияние порядка реакции на характерные режимы процесса в данной работе не рассматривается. Задача несимметрична: отсутствует тепло- и массоперенос на границе $\xi = 0$. Это связано с наличием газонепроницаемой подложки, на которой по принятой технологии находится пористый материал в виде тонкого слоя. Толщина слоя b много меньше его протяженности, т. е. в математическом плане слой бесконечен. Результаты предлагаемого анализа справедливы и для пластины толщиной $2b$ в симметричной постановке (граница $\xi = 0$ в последнем случае соответствует осевому сечению пластины). Безразмерные переменные в выражениях (1) и (2) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\Theta &= \frac{E}{RT_0^2} (T - T_0), \quad \gamma = \frac{RT_0^2 c_p \rho}{E Q c_0}, \quad \xi = \frac{x}{b}, \\ \eta &= \frac{c_0 - c}{c_0}, \quad i = \frac{Q E c_0 k_0 \exp(-E/RT_0)}{c_p \rho R T_0^2}, \\ m &= \frac{b^2 E Q c_0 k_0 \exp(-E/RT_0)}{D R T_0^2 c_p \rho}, \quad \delta_* = \frac{E Q b^2 c_0 k_0 \exp(-E/RT_0)}{\lambda R T_0^2}, \\ \beta &= \frac{RT_0}{E}, \quad \text{Vi}_D = \frac{\beta_* b}{D}, \quad \text{Vi}_T = \frac{\alpha b}{\lambda}.\end{aligned}$$

Здесь и дальше приняты следующие обозначения: T — температура в

¹ Авторы понимают, что принятые упрощения — первый порядок реакций, отсутствие газофазных продуктов превращения и чисто молекулярный перенос — сужают общность выводов. Однако многообразие режимов возможного осуществления процесса, даже в этой, по-видимому, наиболее простой постановке столь велико, что такой подход оправдан, по крайней мере, на первой стадии анализа.

пористом теле; T_0 — температура реакционного газа в пространстве над пористым телом; c_0 — концентрация реакционного газа в пространстве над пористым телом; c — концентрация реакционного газа в пористом теле; α — коэффициент теплоотдачи системы поверхность пористого тела — газ; β_* — коэффициент массоотдачи системы поверхность пористого тела — газ; E — энергия активации реакции образования готового продукта; Q — тепловой эффект реакции; k_0 — предэкспонент в аррениусовской зависимости для скорости реакции; b — толщина пористого тела; R — универсальная газовая постоянная; D — эффективный коэффициент диффузии в образце; λ — эффективная теплопроводность образца; c_p — эффективная теплоемкость образца; ρ — насыпная плотность образца; λ_T, λ_D — собственные числа задачи осреднения; t — время. Физический смысл этих величин станет очевиден, если расписать их в характерных временах процессов:

$$t_x = 1/k_0 \exp(-E/RT_0) — \text{время химической реакции,}$$

$$t_T = b^2 c_p \rho / \lambda — \text{время тепловой релаксации,}$$

$$t_d = b^2 / D — \text{время диффузионной релаксации. Тогда}$$

$$\tau = t/\gamma t_x, \delta_* = t_T/\gamma t_x, m = t_x/\gamma t_x, \delta_*/m = t_T/t_d.$$

Упростим систему (1), (2) с помощью приближенного весового осреднения по пространственной координате ξ (аналогично [2, 3]). В качестве весовых множителей выберем первые собственные функции для уравнения

$$d^2v/d\xi^2 + \lambda v = 0 \quad (3)$$

с краевыми условиями соответственно:

$$dv/d\xi + \text{Bi}_T v = 0, \xi = 1, \quad dv/d\xi = 0, \xi = 0, \quad (4)$$

$$dv/d\xi + \text{Bi}_D v = 0, \xi = 1, \quad dv/d\xi = 0, \xi = 0. \quad (5)$$

Обозначим через v_T и v_D собственные функции задач (3), (4) и (3)—(5), а соответствующие собственные значения — через λ_T и λ_D и будем предполагать нормировку

$$\int_0^1 v_T d\xi = \int_0^1 v_D d\xi = 1. \quad (6)$$

При выполнении (6) v_T и v_D положительны при $0 < \xi < 1$, и формулы

$$\langle \psi \rangle_T = \int_0^1 \psi(\xi) v_T(\xi) d\xi, \quad \langle \psi \rangle_D = \int_0^1 \psi(\xi) v_D(\xi) d\xi \quad (7)$$

определяют средние значения для произвольной функции $\psi(\xi)$.

Осредним первое уравнение (1) с весом v_T , а второе с весом v_D , принимая допущение [3]

$$\langle F(\Theta, \eta) \rangle_T \approx \langle F(\Theta, \eta) \rangle_D \approx F(\langle \Theta \rangle_T, \langle \eta \rangle_D). \quad (8)$$

Опуская для краткости знаки осреднения, придем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\Theta}{d\tau} = (1 - \eta) \exp \frac{\Theta}{1 + \beta\Theta} - \frac{\Theta}{\delta} \equiv F(\Theta, \eta), \quad (9)$$

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \gamma \left[(1 - \eta) \exp \frac{\Theta}{1 + \beta\Theta} - \frac{S}{\delta} \eta \right] \equiv G(\Theta, \eta), \quad (10)$$

$$\Theta(0) = 0, \quad \eta(0) = 1.$$

Здесь приняты обозначения:

$$\delta = \delta_*/\lambda_T, \quad S = \lambda_D \delta_*/\lambda_T m \gamma = \lambda_D t_T/\lambda_T \gamma t_d. \quad (11)$$

Приближение (8) очевидно при малых Vi_T и Vi_D , когда пространственное распределение фактически отсутствует. Однако опыт применения такого осреднения в задачах воспламенения показывает правомерность (8) фактически при произвольных Vi_T и $Vi_D > 0$.

При этом система (9) описывает не только качественное поведение реакционной системы (1), (2), но и правильно отражает ее количественные характеристики. К аналогичным результатам приводит нульмерное приближение Л. А. Вулиса [4], однако количественное сопоставление оказывается в пользу осреднения.

Качественное исследование фазовой плоскости системы (9) выполнено в работе [5]. В зависимости от параметров оказывается возможным существование 35 различных фазовых портретов, причем динамическое поведение системы существенно зависит от параметра γ , хотя стационарные состояния от γ не зависят. Однако в [5] почти отсутствуют количественные соотношения, выражающие переходы от одного режима к другому, и это не позволяет эффективно использовать ее результаты. В настоящей работе рассматривается выделение основных характерных режимов системы, связанных с появлением неединственности стационарных состояний, с потерей устойчивости и т. д. При этом ради некоторых упрощений будем считать $\beta = 0$.

Стационарные точки

При любых параметрах δ и S система (9) имеет стационарные точки, определяемые уравнениями

$$\Theta/\delta = (1 - \eta) \exp \Theta, \quad S\eta/\delta = (1 - \eta) \exp \Theta, \quad (12)$$

откуда

$$\eta = \Theta/S. \quad (13)$$

Поскольку $\eta \leq 1$, то из (13) следует $\Theta < S$. Из (12) и (13) относительно Θ получаем

$$\delta = \frac{\Theta l^{-\Theta}}{1 - \Theta/S} \equiv g(\Theta). \quad (14)$$

Для функции $g(\Theta)$ имеем

$$g'(\Theta) = S \exp(-\Theta)/(S - \Theta)^2 \cdot [\Theta - (\Theta - 1)(S - \Theta)]. \quad (15)$$

Из уравнения $g'(\Theta) = 0$, т. е.

$$\Theta - (\Theta - 1)(S - \Theta) = 0 \quad (16)$$

при $S > 4$ определяются два экстремума Θ_+ и Θ_- функции $g(\Theta)$:

$$\Theta_+ = S/2 \cdot (1 + \sqrt{1 - 4/S}), \quad \Theta_- = S/2 \cdot (1 - \sqrt{1 - 4/S}), \quad (17)$$

причем в интервале (Θ_+, Θ_-) функция $g(\Theta)$ убывает. При $S \leq 4$ $g(\Theta)$ всюду монотонно возрастает. Соответственно этому (14) при $S \leq 4$ имеет единственное решение $\Theta(S, \delta)$ при любом $\delta > 0$, а при $S > 4$ в интервале $\delta_+ < \delta < \delta_-$ (14) имеет три корня. Экстремальные значения δ_+ и δ_- равны соответственно $g(\Theta_+)$ и $g(\Theta_-)$. С учетом свойств корней (16) из (14) следует, что

$$\delta_+ = \Theta_+^2 l^{-\Theta_+}, \quad \delta_- = \Theta_-^2 l^{-\Theta_-}. \quad (18)$$

В плоскости параметров δS (рис. 1, I) эти кривые ограничивают область неединственности решения. В области II решение единственно.

² Известно, что приближение Франк-Каменецкого $\beta=0$ оправдано при $\beta\Theta^2 \ll 1$, поэтому нижеследующие рассмотрения в области высокотемпературных режимов носят скорее качественный характер. В рамках упрощений за счет осреднения поправка на $\beta \neq 0$ вряд ли имеет смысл.

По аналогии с результатами Франк-Каменецкого о ретерогенном воспламенении и потухании [1], естественно ожидать, что значения δ_- и δ_+ определяют соответственно критические условия воспламенения и потухания ($\delta > \delta_+$ — область воспламенения, $\delta < \delta_+$ — область потухания). Это так и будет в том случае, когда в области II «верхнее» и «нижнее» решения уравнения (14) устойчивы, промежуточное неустойчиво (как в [1]) и единственное стационарное решение устойчиво. Однако в вопросе об устойчивости имеются существенные отличия от [1].

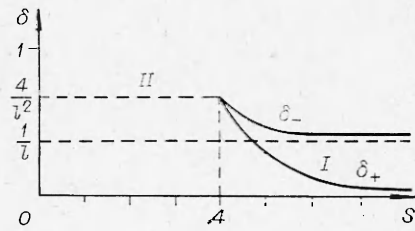


Рис. 1. Зависимость $\delta(S)$, определяющая области единственности и неединственности решения.

Устойчивость решений

Если (Θ, η) — стационарная точка системы (9), то ее устойчивость определяется знаками определителя Δ и следа Σ матрицы линеаризованной системы

$$\Delta = \frac{\partial F}{\partial \Theta} \frac{\partial G}{\partial \eta} - \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial G}{\partial \Theta} = \frac{\gamma S}{(S - \Theta) \delta^2} [\Theta - (\Theta - 1)(S - \Theta)] = \frac{\gamma(S - \Theta) l^{\Theta} g'(\Theta)}{\delta^2}, \quad (19)$$

$$\Sigma = \frac{\partial F}{\partial \Theta} + \frac{\partial G}{\partial \eta} = \frac{1}{\delta(S - \Theta)} [(\Theta - 1)(S - \Theta) - \gamma S^2]. \quad (20)$$

Из (19) видно, что стационарная точка (Θ, η) , для которой Θ попадает на участок убывания $g(\Theta) = (\Delta < 0)$, т. е. $\Theta \in (\Theta_-, \Theta_+)$, имеет седловой характер и является неустойчивой. Точно так же из (20) вытекает, что все стационарные точки с $\Theta \leq 1$ устойчивы, так как $\Delta > 0$, $\Sigma < 0$. Устойчивость стационарных состояний, отвечающих возрастающим участкам $g(\Theta)$, при $1 < \Theta < S$ требует тщательного анализа. Как видно из (19), (20), этот анализ сводится к совместному решению уравнения (14) и неравенств

$$\Theta - (\Theta - 1)(S - \Theta) > 0, \quad (21)$$

$$\gamma S^2 - (\Theta - 1)(S - \Theta) > 0. \quad (22)$$

Отметим, что в задаче [1] условие (22) отсутствует, а из (21) вытекает, что устойчивы все стационарные точки, отвечающие возрастающим участкам $g(\Theta)$, и неустойчив убывающий участок. Естественно поставить вопрос: когда условие (22) не вносит дополнительных ограничений? Это, очевидно, имеет место при

$$\gamma > \frac{1}{S^2} \max_{\Theta} (\Theta - 1)(S - \Theta). \quad (23)$$

Здесь максимум берется по всем $\Theta \in (1, S)$, которые при $S > 4$ не принадлежат интервалу (Θ_-, Θ_+) . Из (23) получаем, что абсолютный максимум достигается при $\Theta = (1 + S)/2$ и равен $(S - 1)^2/4$. Однако при $S > 4$ точка $\Theta = (1 + S)/2$ может оказаться в интервале (Θ_-, Θ_+) . Действительно, при $S > \sqrt{5} + 2$ $\Theta_+ > (1 + S)/2$, поэтому максимум (23) достигается при $\Theta = \Theta_+$.

Итак, кривая

$$\gamma_+(S) = \begin{cases} \frac{1}{4} \left(\frac{S-1}{S} \right)^2, & 1 < S \leq \sqrt{5} + 2, \\ \frac{1}{2S} (1 + \sqrt{1 - 4/S}), & S > \sqrt{5} + 2 \end{cases}$$

выделяет в плоскости (γ, S) область $\gamma < \gamma_+(S)$, где нарушается устойчивость в некоторой области на растущей ветви $g(\Theta)$. Если еще определить кривую

$$\gamma_-(S) = \frac{1}{S^2} \max_{1 < \Theta < \Theta_-} (\Theta - 1)(S - \Theta) = \frac{1}{2S} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{S}} \right)$$

при $S > 4$, то при $\gamma_-(S) < \gamma < \gamma_+(S)$ нарушение устойчивости происходит в некоторой области $\Theta > \Theta_+$, а при $\gamma < \gamma_-(S)$ устойчивость теряется так же и при $\Theta < \Theta_-$ в некоторой области, примыкающей к Θ_- . При $S < 4$, $\gamma < \gamma_+(S)$ теряется устойчивость и для единственной стационарной точки в некоторой области, примыкающей к $\Theta = (S+1)/2$. Кривые γ_+ и γ_- показаны на рис. 2. В точке $S = \sqrt{5} + 2$ на кривой $\gamma_+(S)$ имеется излом. Максимальное значение γ_+ достигается, как легко видеть, при $S = 4,5$ и равно $4/27$.

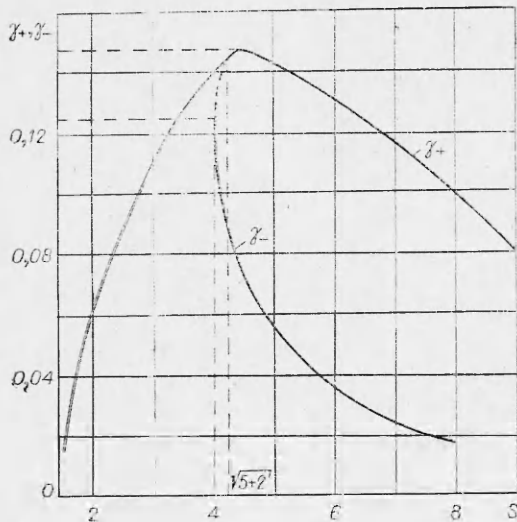


Рис. 2. Графики функций $\gamma_+(S)$ и $\gamma_-(S)$, выделяющие в плоскости области потери устойчивости на растущих ветвях функции $g(\Theta)$.

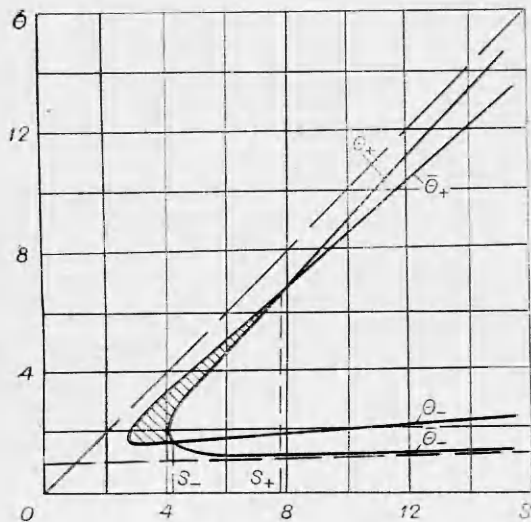


Рис. 3. Графики функций Θ_+ , Θ_- , выделяющие в плоскости (Θ, S) различные характерные режимы процесса.

Таким образом, при $\gamma > 4/27 = 0,148$ единственным неустойчивым состоянием, как у Франк-Каменецкого, является промежуточное состояние при $S > 4$, отвечающее убывающему участку $g(\Theta)$, т. е. $\Theta \in (\Theta_-, \Theta_+)$. В этом случае дополнительное условие (22) не вносит ограничений и значения δ_{\pm} из (18) определяют при $S > 4$ критические условия воспламенения и потухания. Нетрудно увидеть, что при $S \rightarrow \infty$ $\delta_- \rightarrow 1/l$, $\delta_+ \rightarrow 0$. При $S < 4$ кри-

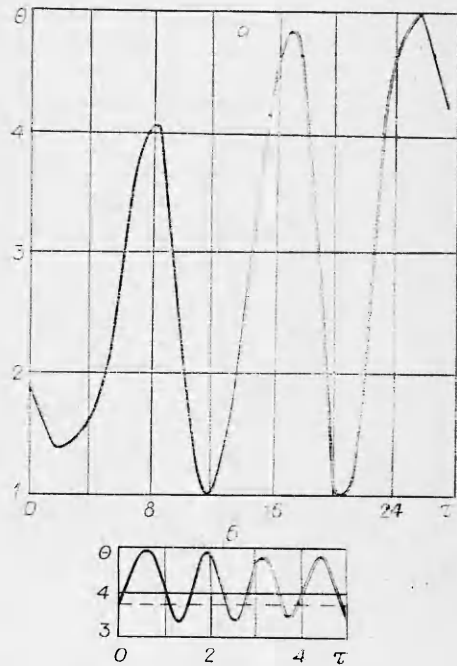


Рис. 4. Режим автоколебаний, когда стационарная точка находится в области единственного стационарного состояния (а) и в области трех решений (б).

тические условия отсутствуют. Система имеет единственное устойчивое стационарное состояние.

При $\gamma < 0,148$ с помощью (21) и (22) нетрудно определить, в какой области на плоскости (Θ, S) происходит потеря устойчивости. Как уже отмечалось, неравенство (21) выполняется при всех Θ при $S < 4$, а при $S > 4$ — вне интервала (Θ_-, Θ_+) . Точно так же неравенство (22) выполняется всюду при $S < 1/(1-2\sqrt{\gamma})$, а при $S > 1/(1-2\sqrt{\gamma})$ — вне интервала $(\bar{\Theta}_-, \bar{\Theta}_+)$, где

$$\bar{\Theta}_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 + S \pm \sqrt{[S(1-2\sqrt{\gamma})-1][S(1+2\sqrt{\gamma})-1]} \right).$$

Область неустойчивости можно найти как объединение областей, определяемых неравенствами (21) и (22).

Проиллюстрируем сказанное на примере $\gamma_- = 0,1$ (рис. 3). Помимо области неустойчивости между кривыми $\Theta_+(S)$ и $\Theta_-(S)$ появляется дополнительная область (заштрихована), в которой значения Θ и $\eta = \Theta/S$ определяют неустойчивую точку равновесия при соответствующем $\delta = \Theta l^{-\theta}/(1-\Theta/S)$ и $\gamma = 0,1$. Как показано в [5], в заштрихованной области неустойчивых стационарных состояний возникает устойчивый предельный цикл, т. е. система входит в режим автоколебаний. При $S > 4$, $\Theta > \Theta_+(S)$ предельный цикл охватывает только эту стационарную точку, т. е. возникает высокотемпературный режим автоколебаний, а при $S > 4$, $\Theta < \Theta_-(S)$ предельный цикл окружают все три стационарные точки. В этом случае амплитуда автоколебаний достаточно велика, достигаются разогревы $\Theta > \Theta_+(S)$ и $\Theta < \Theta_-(S)$.

Для иллюстрации на ЭВМ просчитаны два варианта из области автоколебаний:

1) $\beta = 0$, $\gamma = 0,1$, $S = 3,5$, $\delta = 0,6314$, $\Theta_n = 1,9$, $\eta_n = 1,6$; область единственного стационарного состояния ($\Theta_{ст} = 2$);

2) $\beta = 0$, $\gamma = 0,1$, $S = 5$, $\delta = 0,3548$, $\Theta_n = 3,7$, $\eta_n = 0,7$, $\Theta_{ст} = 3,8$. Этот вариант соответствует области трех решений, когда верхний режим неустойчив, а нижний — устойчив. На рис. 4 представлены соответствующие кривые для этих режимов.

Квазистационарное приближение

Выше рассмотрены характерные режимы поведения системы при сравнительно больших значениях параметра γ . Рассмотрим режимы при $\gamma \ll 1$. Положим в системе (9) $\gamma\tau = \tau_*$. Тогда

$$\begin{aligned} \gamma\Theta' &= (1-\eta) \exp \Theta - \Theta/\delta, \\ \eta' &= (1-\eta) \exp \Theta - S/\delta \cdot \eta \end{aligned} \quad (24)$$

при $\Theta(0) = 0$, $\eta(0) = 1$. При $\gamma \ll 1$ можно пренебречь членом $\gamma\Theta'$ в соответствии с теоремой Тихонова [6] об уравнениях с малым параметром.

Из уравнения

$$\delta(1-\eta) = \Theta l^{-\theta}$$

находим $\Theta(\eta)$, выбирая нижнюю устойчивую ветвь решения $\Theta(\eta) \leq 1$. При $\delta \leq 1/l = \max[\Theta l^{-\theta}]$ функция $\Theta(\eta)$ определена при всех $0 \leq \eta \leq 1$ (рис. 5, 3, 2). При $\delta > (1/l)$ это решение определено при $1 \geq \eta \geq 1 - 1/\delta l$ (рис. 5, 1). Подставляя $\Theta(\eta)$ в уравнение для η' системы (24), имеем

$$\eta' = 1/\delta[\Theta(\eta) - S\eta], \quad \eta(0) = 1. \quad (25)$$

При $S[1 - (1/\delta l)] \leq 1$ решение (25) всегда устанавливается и $\Theta(\eta(\tau)) \leq 1$. При $S(1 - 1/\delta l) > 1$ уравнение (25) теряет смысл по до-

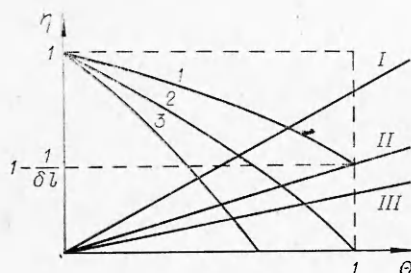


Рис. 5. Фазовая диаграмма для квазистационарного приближения.

стижении $\eta = 1 - 1/\delta l$, т. е. далее развивается нестационарный процесс. Критические условия перехода на этот режим: $S(1 - 1/\delta l) = 1$, откуда

$$\delta_* = 1/l \cdot S/(S - 1).$$

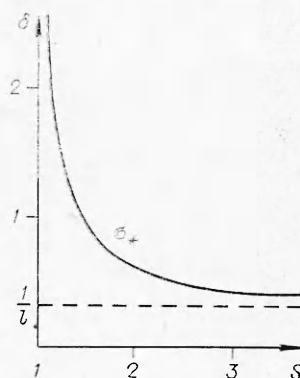


Рис. 6. Зависимость $\delta_*(S)$, определяющая критические условия перехода к нестационарному режиму в системе.

Графическое изображение этой зависимости представлено на рис. 6. Время выхода на стационарный режим при $\delta > \delta_*$:

$$\tau_* = -\delta \int_1^{1 - \frac{1}{\delta l}} \frac{d\eta}{S\eta - \Theta(\eta)} = \int_0^1 \frac{(1 - \Theta) t^{-\Theta} d\Theta}{S \left(1 - \frac{\Theta l^{-\Theta}}{\delta}\right) - \Theta}.$$

При $S \leq 1$, как и при $\delta \leq 1/l$, решение (25) всегда устанавливается, причем $\Theta_{ст} \leq 1$.

Таким образом, исследование стационарных состояний системы (9) приводит к выявлению следующих основных характерных режимов:

1) $0 < S \leq 1$ — область единственного устойчивого стационарного состояния с $\Theta < S \leq 1$ при всех γ и δ ;
 2) $\gamma \ll 1$, $\delta < \delta_*(S)$ (см. рис. 6) — область квазистационарных режимов;

3) $S > 1$, $\gamma > \gamma_+(S)$ — область режимов Франк-Каменецкого, в которой δ_+ из (18) определяет при $S > 4$ критические условия воспламенения и потухания. В частности, при $\gamma > \max \gamma_+(S) \approx 0,148$ дополнительное условие (22) не вносит ограничений.

При $\gamma < 0,148$ в некотором интервале $S \in (S_0, S_+)$, где S_0 и S_+ — корни уравнения $\gamma_+(S) = \gamma$ (причем $S_0 = (1 - 2\sqrt{\gamma})^{-1}$ при $\gamma < (7 - 3\sqrt{5})/2$), выполняется условие $\gamma < \gamma_+(S)$. Для $\gamma < 0,125$ приходится учитывать неравенства $\gamma > \gamma_-(S)$ при $S \in (S_-, S_+)$ и $\gamma < \gamma_-(S)$ при $S \in (4, S_-)$, где $S_- \geq 4$ — корень уравнения $\gamma_-(S) = \gamma$. (Точки S_- и S_+ определяют также точки пересечения кривых Θ_+ и $\bar{\Theta}_+$ (см. рис. 3).)

Каждая из указанных ниже областей реализуется в некотором интервале изменения δ , который нетрудно найти по диаграмме рис. 3 и уравнению (14):

$\gamma < 0,14$, $S_0 < S < 4$ — область автоколебаний вокруг единственной стационарной точки;

при $0,125 < \gamma < 0,14$, $4 < S < S_+$ и $\gamma < 0,125$, $S_- < S < S_+$ — область трех стационарных точек с неустойчивой верхней по температуре точкой, область автоколебаний вокруг верхней стационарной точки;

$\gamma < 0,125$, $4 < S < S_-$ — область трех неустойчивых стационарных точек, область автоколебаний, охватывающих все три стационарные точки.

Поступила в редакцию
19/VII 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. А. Франк-Каменецкий. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М., Наука, 1967.
2. В. В. Барзыкин, В. Т. Гоптковская и др. НМТФ, 1964, 3.
3. А. И. Вольперт, С. И. Худяев. Анализ в классах разрывных функций и уравнений математической физики. М., Наука, 1975.
4. Л. А. Вулис. Тепловой режим горения. М., ГЭИ, 1954.
5. D. A. Vaganov, N. G. Samoilenko, V. G. Abramov. Chem. Eng. Sci., 1978, 33, 8.
6. А. Н. Тихонов. Математический сборник. Т. 31, № 3, 1952.

О ВОЗБУЖДЕНИИ ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ В «ГОРЯЧЕЙ ТОЧКЕ»

Р. С. Буркина, В. П. Вилюнов

(Томск)

Понятие «горячей точки» широко используется при решении проблемы чувствительности взрывчатых веществ к внешним нетепловым возмущениям [1]. В рамках макрокинетического подхода тепловая часть проблемы чувствительности формулируется как задача об очаговом тепловом взрыве, которому посвящено большое количество работ приближенно-аналитического [2—5] и вычислительного [4, 6, 7] характера. Наиболее полный численный анализ задачи очагового взрыва при моделировании энерговыделения в виде Π -образного распределения начальной температуры «горячей точки» дан в [7].

В [8] показано, что приближенные теории критического условия очагового взрыва [2—5] неудовлетворительны: они не дают даже правильной качественной картины зависимости δ_* от температурного напора Θ_0 (здесь δ_* — критическое значение параметра Франк-Каменецкого, Θ_0 — температурный напор). В [9] предложено новое аналитическое решение, базирующееся на предположении, что кривизна температурных профилей подобна как в реакционноспособном теле, так и в инертном. В соответствии с этим член, учитывающий теплопередачу, заменялся на аналогичное выражение из решения задачи для инертного тела, что позволило свести уравнение в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению. В результате удалось найти критический размер очага δ_* в функции от Θ_0 , удовлетворительно согласующийся с расчетами [8]. Ключом анализа в работах [2—5, 9] служат упрощения (не всегда достаточно обоснованные) математической формулировки задачи, в связи с чем, по-видимому, не был замечен асимптотический характер решения.

В настоящей работе поле температур в очаге и окружающей его среде, время воспламенения и критический размер очага в зависимости от условий протекания процесса найдены с помощью асимптотического анализа.

Постановка задачи. Температурные изменения в очаге (с Π -образным энерговыделением и аррениусовской кинетикой) и в окружающей его среде можно описать уравнением теплопроводности

$$c\rho\partial T/\partial t = \lambda\Delta T + Qz\rho \exp(-E/RT) \quad (1)$$

с начальными и граничными условиями:

$$T(x, 0) = \begin{cases} T_0, & 0 < x < r, \\ T_n, & x \geq r, \end{cases} \quad (2)$$

$$\partial T(0, t)/\partial x = \partial T(\infty, t)/\partial x = 0, \quad (3)$$