

$u_1 = u - (1 - y^2)$; $v_1 = v$; $Re = 10$). Следует отметить, что данная методика позволяет без принципиальных затруднений ввести в расчет полуэмпирические турбулентные напряжения.

Автор выражает благодарность Н. Х. Ибрагимову и А. К. Янко за полезное обсуждение работы.

Поступила 5 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Солопенко В. М., Янко А. К. Приближенные уравнения течения вязкой жидкости в приложении к осесимметричному потоку.— «Изв. АН БССР», 1975, № 2.
2. Inger G. R. Strong blowing across a Couette-Poiseuille shear flow.— «Phys. Fluids», 1969, vol. 12, N 9, p. 1741—1746.
3. Stefan Loer. Examination of the stability of disturbed boundary-layer-flow by a numerical method. Lecture at IUTAM Symposium. Montrey, California, August, 1968.
4. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.
5. Ибрагимов И. Х. Групповые свойства некоторых дифференциальных уравнений. Новосибирск, «Наука», 1967.
6. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1974.
7. Тейлор Т. Д., Хиде Э. Расчет течения вязкой жидкости в канале при помощи метода расщепления.— In: Proc. 2nd Intern. Conf. Numer. Meth. Fluid Dynamics. Berlin, Springer-Verlag, 1971. Рус. пер. Численные методы в механике жидкости. М., «Мир», 1973.
8. Яненко Н. И. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, «Наука», 1967.
9. Эйдельман С. Д. Параболические системы. М., «Наука», 1964.
10. Янко А. К. Регулярные решения уравнений движения вязкой жидкости и расчет течения в плоской трубе.— «Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук», 1974, № 8, вып. 2.

УДК 518 : 517.9 : 532

РАСЧЕТ НЕСТАЦИОНАРНОГО ОБТЕКАНИЯ ЦИЛИНДРА, МГНОВЕННО ПРИВЕДЕННОГО В ДВИЖЕНИЕ

В. И. Кравченко, Ю. Д. Шевелев, В. В. Щенников

(Москва)

1. Первые результаты, относящиеся к решению задачи о нестационарном обтекании тела конечного размера, мгновенно приведенного в движение, получены в рамках теории пограничного слоя.

Блазиус [1] получил для начальной стадии течения два первых члена разложения решения в ряд по степеням t (t — время), причем найденное им решение справедливо при $Re \rightarrow \infty$.

В работе [2] приводится уточнение решения, найденного Блазиусом. В дальнейшем была предпринята попытка распространить решение Блазиуса на случай малых чисел Рейнольдса [3,4].

Более перспективным подходом к решению рассматриваемой задачи оказывается использование численных методов решения нестационарных уравнений Навье—Стокса [5 — 10]. В работе [10] приводится обзор литературы по рассматриваемому вопросу. В случае внезапно возникающего движения цилиндра одна из трудностей состоит в определении начальных условий.

Из теории пограничного слоя следует [11], что завихренность потока жидкости в начальный момент будет иметь бесконечно большую величину и сосредоточена в бесконечно тонкой области, окружающей поверхность цилиндра. По

этой причине прямое применение конечно-разностных аппроксимаций к исходным уравнениям не дает правильной картины начального течения около цилиндра [7]. Кроме того, в [12] показано, что для получения хорошего приближенного решения в этом случае надо брать очень малые шаги по времени.

Впервые корректная постановка задачи о начальной стадии течения около цилиндра, мгновенно приведенного в движение, по-видимому, предложена в работах [9, 10], однако специфика используемого здесь численного метода не позволяет оценить точность полученных результатов, а также исследовать течение при больших временах.

Предложенный в данной работе численный метод позволяет единым образом рассчитывать течение от момента импульсного старта и до установления включительно.

2. Пусть круговой цилиндр мгновенно приведен в движение со скоростью u перпендикулярно оси цилиндра. Предположим, что обтекание цилиндра симметрично. Исходные уравнения Навье-Стокса, описывающие течение вязкой несжимаемой жидкости около цилиндра в полярной системе координат (r, θ) и безразмерной форме имеют вид

$$(2.1) \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} = \frac{2}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right),$$

$$\omega = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right),$$

где ω — вихрь; ψ — функция тока; $\text{Re} = u2R/\nu$ — число Рейнольдса (R — радиус цилиндра, ν — кинематическая вязкость).

Граничные условия задачи имеют вид

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \psi = 0, \quad \partial \psi / \partial r = 0 & \text{ при } r = 1, \quad t \geq 0; \\ \omega \rightarrow 0, \quad \psi \rightarrow r \sin \theta & \text{ при } r \rightarrow \infty, \quad t > 0; \\ \omega \rightarrow 0, \quad \psi = 0 & \text{ при } r \rightarrow \infty, \quad t = 0; \\ \psi = 0, \quad \omega = 0 & \text{ при } \theta = 0, \pi, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

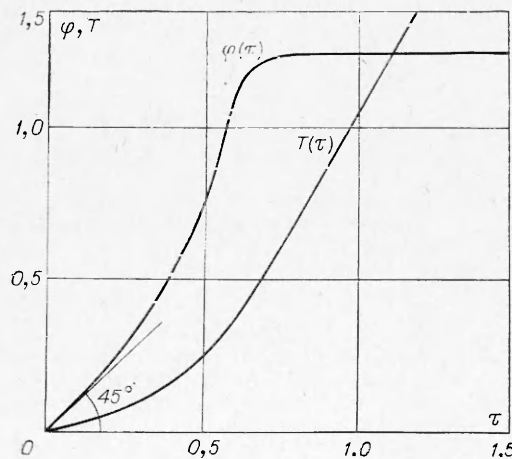
Преобразуем исходную систему уравнений (2.1) с учетом следующих физических соображений. Известно [11], что при мгновенно возникающем движении тела формирующийся на теле пограничный слой имеет толщину, которая меняется со временем, как $2\sqrt{2t/\text{Re}}$ (зависимость эта справедлива для малых t). Кроме того, по мере развития пограничного слоя (или слоя завихренности), когда определяющим механизмом переноса завихренности является конвекция и слой достаточно толст, изменение толщины пограничного слоя происходит по закону e^{ct} ($c = 1/2u$) [13].

С учетом вышеизложенного введем следующее преобразование независимых переменных:

(2.3) $r = e^{\alpha \pi k(\tau) \xi}, \quad \theta = \pi \eta,$

$$t = T(\tau),$$

где $k(\tau) = 2\sqrt{2/\text{Re}}\varphi(\tau)$; вид функций $\varphi(\tau)$ и $T(\tau)$ представлен на фиг. 1. Для того, чтобы исключить начальную сингулярность функции вихря, вводится при-



Фиг. 1

веденный вихрь W и приведенная функция тока Ψ по формулам.

$$(2.4) \quad \psi = k(\tau)\Psi(\eta, \xi, \tau), \quad \omega = W(\eta, \xi, \tau)/k(\tau).$$

Уравнения (2.1) с учетом (2.3), (2.4) принимают вид

$$(2.5) \quad P(\tau) \frac{\partial W}{\partial \tau} + \frac{k^2(\tau)}{2\alpha E^2} \frac{D(\Psi, W)}{D(\eta, \xi)} = \frac{2}{\text{Re}} \left(\frac{1}{2\alpha^2 E^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + Q(\tau) \xi \frac{\partial W}{\partial \xi} + \right. \\ \left. + Q(\tau) W + \frac{k^2(\tau)}{2E^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right), \\ E^2 W = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + k^2(\tau) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2},$$

где

$$P(\tau) = \frac{k^2(\tau)}{2\beta}; \quad \beta = \frac{dT}{d\tau}; \quad Q(\tau) = \frac{\text{Re}}{4} \frac{k(\tau)k'(\tau)}{\beta};$$

$$D(\Psi, W)/D(\eta, \xi) = (\partial\Psi/\partial\eta) \partial W/\partial\xi - (\partial\Psi/\partial\xi) \partial W/\partial\eta; \quad E = \pi e^{\alpha\pi h(\tau)\xi},$$

α — постоянный параметр. Коэффициенты P, Q — непрерывные функции τ . Преобразование $t = T(\tau)$ выбирается таким образом, чтобы обеспечить необходимое сгущение шкалы времени в окрестности $t = 0$.

Граничные условия (2.2) с учетом (2.3), (2.4) принимают вид

$$(2.6) \quad \Psi = 0, \quad \partial\Psi/\partial\xi = 0 \quad \text{при } \xi = 0, \tau \geq 0; \\ W = 0, \quad \partial\Psi/\partial\xi = \alpha\pi e^{\alpha\pi h(\tau)\xi_{\max}} \sin \pi\eta \quad \text{при } \xi = \xi_{\max}, \tau > 0; \\ W = 0, \quad \Psi = 0 \quad \text{при } \eta = 0, 1, \tau \geq 0,$$

где ξ_{\max} — достаточно большое значение ξ .

Уравнения (2.5) с граничными условиями (2.6) образуют замкнутую систему для определения W, Ψ при $\tau > 0$.

3. Можно показать, что при $\tau = 0$ система (2.5) принимает автономный вид

$$(3.1) \quad (1/2\alpha^2\pi^2) \partial^2 W/\partial\xi^2 + \xi \partial W/\partial\xi + W = 0, \\ W = (1/\alpha^2\pi^2) \partial^2 \Psi/\partial\xi^2$$

с граничными условиями

$$(3.2) \quad \Psi = 0, \quad \partial\Psi/\partial\xi = 0 \quad \text{при } \xi = 0; \\ W = 0, \quad \partial\Psi/\partial\xi = \alpha\pi \sin \pi\eta \quad \text{при } \xi = \xi_{\max}.$$

Решение первого из уравнений (3.1), удовлетворяющее условиям (3.2), можно представить в виде

$$W = C(\eta) e^{-(\alpha\pi\xi)^2}.$$

Для определения $C(\eta)$ проинтегрируем второе уравнение из (3.1) по ξ

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\xi} \right)_{\xi=\xi_{\max}} - \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\xi} \right)_{\xi=0} = (\alpha\pi)^2 C(\eta) \int_0^{\xi_{\max}} e^{-(\alpha\pi\xi)^2} d\xi.$$

С учетом (3.2) имеем

$$C(\eta) = \frac{2}{\alpha\pi^{3/2}} \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\xi} \right)_{\xi=\xi_{\max}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin \pi\eta.$$

Таким образом, выражение

$$(3.3) \quad W(\eta, \xi, 0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-(\alpha\pi\xi)^2} \sin \pi\eta$$

— необходимое начальное условие для вихря.

Соответствующее начальное условие для функции тока легко находится из решения второго уравнения (3.1) с учетом (3.3).

4. Пусть в области интегрирования определена ортогональная сетка с шагами разбиения $h_1 = \Delta\eta$, $h_2 = \Delta\xi$, $\Delta\tau$. Конечно-разностная схема используемого численного метода имеет вид

$$(4.1) \quad P_m \frac{3W_{ij}^{n-\frac{1}{2}m} - 4W_{ij}^{m-1} + W_{ij}^{m-2}}{2\Delta\tau} + \frac{1}{2} \frac{k_m^2}{\alpha E_{mj}^2} \left(\frac{W_{ij+1}^{rm} - W_{ij}^{rm}}{2h_2} + \frac{W_{ij}^{sm} - W_{ij-1}^{sm}}{2h_2} \right) \left(\frac{\Psi_{i+1j}^{n-1m} - \Psi_{i-1j}^{nm}}{2h_1} \right) - \frac{1}{2} \frac{k_m^2}{\alpha E_{mj}^2} \left(\frac{W_{i+1j}^{pm} - W_{ij}^{pm}}{2h_1} + \frac{W_{ij}^{qm} - W_{i-1j}^{qm}}{2h_1} \right) \left(\frac{\Psi_{ij+1}^{n-1m} - \Psi_{ij-1}^{n-1m}}{2h_2} \right) =$$

$$= \frac{2}{\text{Re}} \left(\frac{1}{2\alpha^2 E_{mj}^2} \frac{W_{ij+1}^{n-\frac{1}{2}m} - 2W_{ij}^{n-\frac{1}{2}m} + W_{ij-1}^{n-\frac{1}{2}m}}{h_2^2} + Q_m \xi_j \frac{W_{ij+1}^{n-\frac{1}{2}m} - W_{ij-1}^{n-\frac{1}{2}m}}{2h_2} + Q_m W_{ij}^{n-1m} - \frac{W_{ij}^{n-\frac{1}{2}m} - W_{ij}^{n-1m}}{\kappa_1} + \frac{k_m^2}{2E_{mj}^2} \frac{W_{i+1j}^{n-1m} - 2W_{ij}^{n-\frac{1}{2}m} + W_{i-1j}^{nm}}{h_1^2} \right);$$

$$\Psi_{ij+1}^{n-\frac{1}{2}m} - 2 \left(1 + \alpha^2 k_m^2 \frac{h_2^2}{h_1^2} \right) \Psi_{ij}^{n-\frac{1}{2}m} + \Psi_{ij-1}^{n-\frac{1}{2}m} = \alpha^2 h_2^2 E_{mj}^2 W_{ij}^{nm} - \alpha^2 k_m^2 \frac{h_2^2}{h_1^2} (\Psi_{i+1j}^{n-1m} + \Psi_{i-1j}^{nm}); \quad W_{ij}^{nm} = \kappa_2 W_{ij}^{n-\frac{1}{2}m} + (1 - \kappa_2) W_{ij}^{n-1m};$$

$$\Psi_{ij}^{nm} = \kappa_3 \Psi_{ij}^{n-\frac{1}{2}m} + (1 - \kappa_3) \Psi_{ij}^{n-1m},$$

где

$$W_{ij}^{nm} = W(ih_1, jh_2, m\Delta\tau); \quad \Psi_{ij}^{nm} = \Psi(ih_1, jh_2, m\Delta\tau);$$

$$P_m = P(m\Delta\tau); \quad Q_m = Q(m\Delta\tau); \quad E_{mj} = \rho e^{\alpha\pi k_m \xi_j};$$

$$\xi_j = jh_2; \quad k_m = k(m\Delta\tau),$$

(n — итерационный индекс; κ_1 — параметр регуляризации; κ_2, κ_3 — параметры релаксации). Выбор индексов r, s, p, q осуществляется в зависимости от знака

$$u_{ij} = -\frac{\Psi_{ij+1}^{n-1m} - \Psi_{ij-1}^{n-1m}}{2h_2}, \quad v_{ij} = \frac{\Psi_{i+1j}^{n-1m} - \Psi_{i-1j}^{nm}}{2h_1}$$

следующим образом:

$$s = n - 1/2, r = n - 1, q = n - 1/2, p = n - 1 \quad \text{при } u_{ij} \geq 0, v_{ij} \geq 0;$$

$$s = n - 1, r = n - 1/2, q = n - 1, p = n - 1/2 \quad \text{при } u_{ij} < 0, v_{ij} < 0;$$

$$s = n - 1/2, r = n - 1, q = n - 1, p = n - 1/2 \quad \text{при } u_{ij} < 0, v_{ij} \geq 0;$$

$$s = n - 1, r = n - 1/2, q = n - 1/2, p = n - 1 \quad \text{при } u_{ij} \geq 0, v_{ij} < 0.$$

Используемая разностная схема имеет второй порядок точности по пространственным координатам и времени.

Система уравнений (4.1) может быть представлена в виде

$$(4.2) \quad \begin{aligned} A_{ij}^{n-1m} W_{ij+1}^{n-\frac{1}{2}m} + B_{ij}^{n-1m} W_{ij}^{n-\frac{1}{2}m} + C_{ij}^{n-1m} W_{ij-1}^{n-\frac{1}{2}m} &= D_{ij}^{n-1m}; \\ \Psi_{ij+1}^{n-\frac{1}{2}m} + R_m \Psi_{ij}^{n-\frac{1}{2}m} + \Psi_{ij-1}^{n-\frac{1}{2}m} &= S_{ij}^{n-1m}; \\ W_{ij}^{nm} &= \kappa_2 W_{ij}^{n-\frac{1}{2}m} + (1 - \kappa_2) W_{ij}^{n-1m}; \\ \Psi_{ij}^{nm} &= \kappa_3 \Psi_{ij}^{n-\frac{1}{2}m} + (1 - \kappa_3) \Psi_{ij}^{n-1m}, \end{aligned}$$

где коэффициенты $A_{ij}^{n-1m}, B_{ij}^{n-1m}, C_{ij}^{n-1m}, D_{ij}^{n-1m}, S_{ij}^{n-1m}$ — функции от $W_{ij}^{m-1}, W_{ij}^{m-2}, W_{ij}^{n-1m}, \Psi_{ij}^{n-1m}$.

Таким образом, разностная схема (4.2) является вариантом реализации метода верхней блочной релаксации [14]. Решение первых двух уравнений (4.2) находится с помощью метода линейной факторизации [15].

Можно показать, что разностная схема (4.1) устойчива и монотонна. При $\tau = 0$ схема (4.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{W_{ij+1}^{n-\frac{1}{2}} - 2W_{ij}^{n-\frac{1}{2}} + W_{ij-1}^{n-\frac{1}{2}}}{h_2^2} + \xi_j \frac{W_{ij+1}^{n-\frac{1}{2}} - W_{ij-1}^{n-\frac{1}{2}}}{2h_2} + W_{ij}^{n-1} &= \\ &= \frac{W_{ij}^{n-\frac{1}{2}} - W_{ij}^{n-1}}{\kappa_1} \end{aligned}$$

или

$$(4.3) \quad aW_{ij+1}^{n-\frac{1}{2}} - bW_{ij}^{n-\frac{1}{2}} + cW_{ij-1}^{n-\frac{1}{2}} = -d,$$

где $a = \frac{\kappa_1}{h_2^2} + \xi_j \frac{\kappa_1}{2h_2}; \quad c = \frac{\kappa_1}{h_2^2} - \xi_j \frac{\kappa_1}{2h_2};$

$$b = \frac{2\kappa_1}{h_2^2} + 1; \quad d = (\kappa_1 + 1) W_{ij}^{n-1}.$$

Условие монотонности схемы накладывает следующие ограничения:

$$(4.4) \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0, \quad b \geq a + c,$$

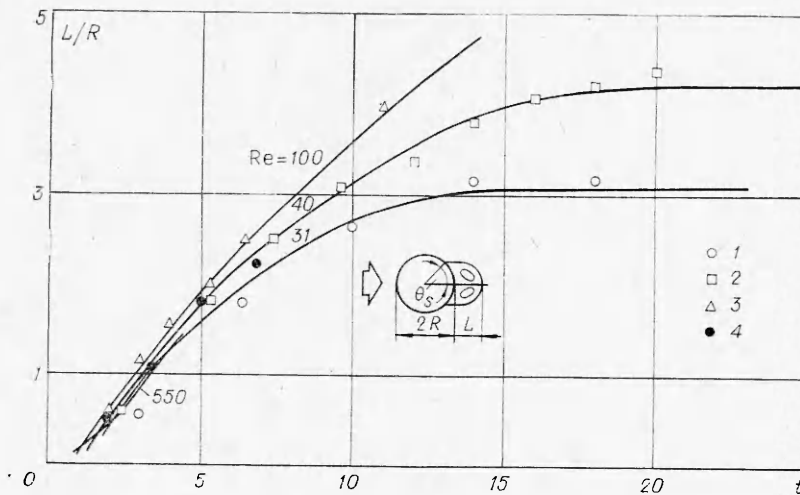
откуда следует

$$(4.5) \quad c = \frac{\kappa_1}{h_2^2} - \xi_j \frac{\kappa_1}{2h_2} > 0, \quad h_2 < \frac{2}{\xi_{\max}}.$$

При выполнении условий (4.4), (4.5) на основании теоремы о максимуме [15] неявная разностная схема (4.3) устойчива.

В качестве граничного условия для вихря на теле используем условие Вудса [16]

$$(4.6) \quad W_{i0}^{nm} = \frac{\partial \Psi_{i1}^{n-1m}}{(\alpha \pi h_2)^2} - \frac{W_{i1}^{n-1m}}{2} e^{2\alpha \pi k_m h_2} + O(h_2^2),$$



Фиг. 2

причем на каждой итерации производится корректирование граничного условия для завихренности на поверхности цилиндра по формуле (4.6). Численное сканирование расчетной области на каждом временном шаге t проводится до тех пор, пока не удовлетворяется условие сходимости

$$\max_{ij} \left\{ \left| \frac{\Delta \Psi_{ij}^{nm}}{\Psi_{ij}^{nm}} \right|, \left| \frac{\Delta W_{ij}^{nm}}{W_{ij}^{nm}} \right| \right\} \leq 10^{-4},$$

где $\Delta \Psi_{ij}^{nm} = \Psi_{ij}^{nm} - \Psi_{ij}^{n-1m}$; $\Delta W_{ij}^{nm} = W_{ij}^{nm} - W_{ij}^{n-1m}$.

5. С целью проверки точности используемого в данной работе численного метода было проведено сравнение расчетных данных при $t = 0$ с точным решением. Максимальное относительное отклонение численного решения от точного на сетке с шагами $h_1 = 0,033$, $h_2 = 0,2$ и $\xi_{\max} = 6$ составляет не более 0,01%. Проводилось варьирование ξ_{\max} для того, чтобы выяснить влияние на численное решение расположения внешней границы.

В данной работе с использованием предложенного численного метода проведены расчеты нестационарного обтекания цилиндра, который мгновенно приводится в движение с постоянной скоростью. Некоторые результаты расчетов представлены на фиг. 2–6.

В качестве расчетных вариантов выбраны: $Re = 31$; 40 ; 100 ; 550 . Результаты численных расчетов сравнивались с экспериментальными данными, приведенными в работе [17].

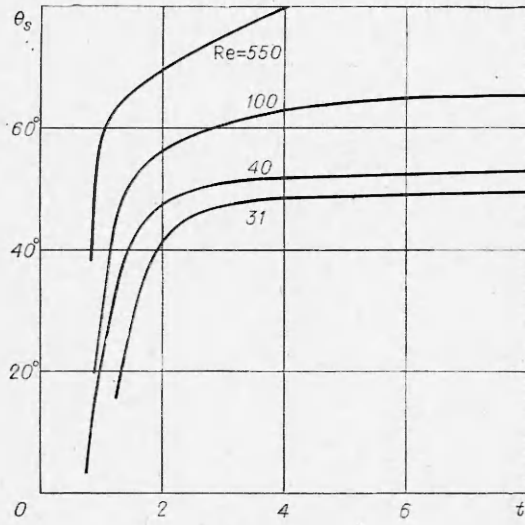
На фиг. 2 представлены результаты сравнения, причем для экспериментальных точек из [17] приняты следующие обозначения:

1 — $Re = 31$; 2 — $Re = 40$; 3 — $Re = 100$; 4 — $Re = 550$.

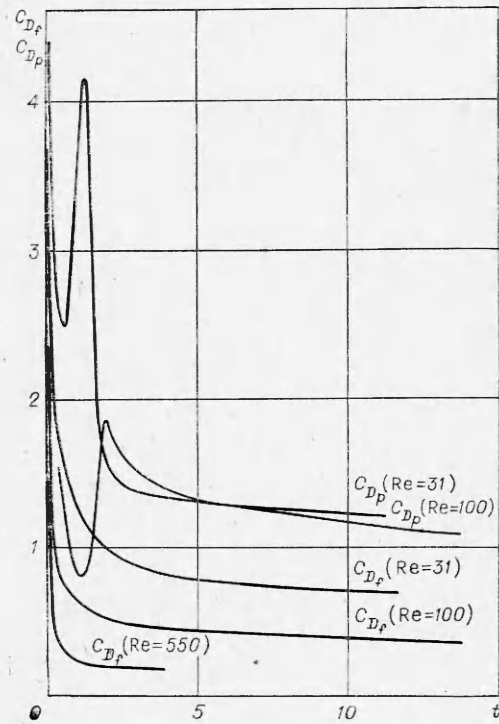
На фиг. 3 показан закон изменения угла отрыва θ_s со временем при мгновенном разгоне цилиндра для различных чисел Рейнольдса.

На фиг. 4 представлены зависимости коэффициентов сопротивления трения C_{Df} и сопротивления давления C_{Dp} от времени для различных Re .

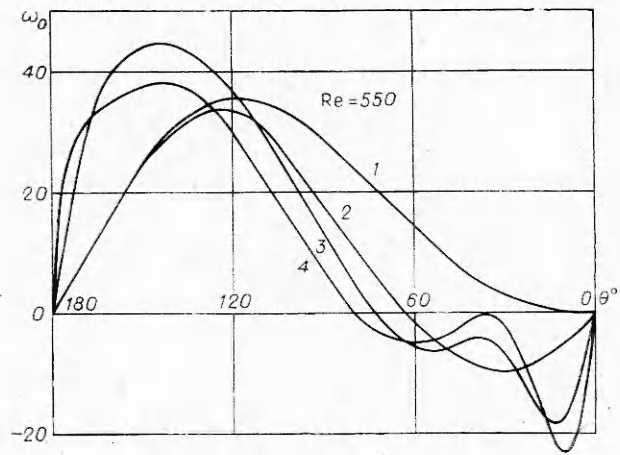
На фиг. 5 показано распределение вихря на поверхности цилиндра в различные моменты времени для $Re = 550$, где кривые 1–4 соответствуют $t = 0,75$; $1,25$; $2,61$; $4,01$.



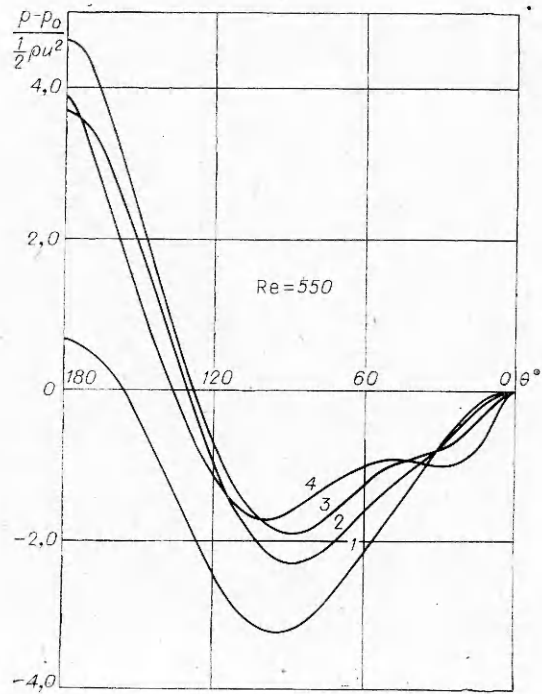
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

На фиг. 6 представлено распределение безразмерного давления $2(p - p_0)/\rho u^2$ (p_0 — давление в задней критической точке) на поверхности цилиндра в различные моменты времени при $Re = 550$. На фиг. 6 кривые 1—4 соответствуют $t = 1,25; 1,75; 2,25; 4,01$.

Для расчета нанесенных на фиг. 4,6 величин использовались следующие выражения:

$$\frac{2(p - p_0)}{\rho u^2} = - \frac{4}{\alpha k^2 Re} \int_0^{\pi} \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} d\eta;$$

$$C_{Df} = \frac{4\pi}{k Re} \int_0^1 W(0, \eta, \tau) \sin \pi \eta d\eta;$$

$$C_{Dp} = - \pi \int_0^1 p(0, \eta) \cos \pi \eta d\eta.$$

Более подробно графический и табличный материал, иллюстрирующий результаты численных расчетов нестационарного обтекания цилиндра, мгновенно приведенного в движение, приведен в работе [18].

Поступила 23 X 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Blasius H. Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. — «Z. Math. Phys.», 1908, Bd 56.
2. Goldstein S., Rosenhead L. Boundary Layer Growth. — «Proc. Cambridge Phil. Soc.», 1936, vol. 32, p. 392—401.
3. Wang C.—Y. The flow past a circular cylinder which is started impulsively from rest. — «J. Math. Phys.», 1967, vol. 46, p. 195—202.
4. Wang C.—Y. Separation and stall of an impulsively started elliptic cylinder. — «J. Appl. Mech.», 1967, vol. 34, p. 823—826.
5. Payne R. B. Calculations of unsteady viscous flow past a circular cylinder. — «J. Fluid Mech.», 1958, vol. 4, p. 81—86.
6. Kawaguti M., Jain P. Numerical study of a viscous fluid flow past a circular cylinder. — «J. Phys. Soc. Japan», 1966, vol. 21, p. 10.
7. Son J. S., Hanratty T. J. Numerical solution for the flow around a cylinder at Reynolds numbers of 40, 200 and 500. — «J. Fluid Mech.», 1969, vol. 35, pt 2, p. 369—386.
8. Thoman D. C., Szewczyk A. A. Time-dependent viscous flow over a circular cylinder. — «Phys. Fluids Suppl.», 1969, vol. 11.
9. Деннис С., Станифорт А. Численный метод для расчета начальной стадии течения вязкой жидкости около цилиндра. — В кн.: Численные методы в механике жидкостей. М., «Мир», 1973.
10. Collins W. M., Dennis S. C. R. Flow past an impulsively started circular cylinder. — «J. Fluid Mech.», 1973, vol. 60, pt 1, p. 105—127.
11. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969.
12. Ingham D. B. Note on the numerical solution for unsteady viscous flow past a circular cylinder. — «J. Fluid Mech.», 1968, vol. 31, p. 815—818.
13. Бетчелор Д. К. Введение в динамику жидкости. М., «Мир», 1973.
14. Wachspress E. L. Iterative solution of elliptic systems and applications to the neutron diffusion equations of reactor physics. N. Y. Prentice — Hall, Englewood Cliffs, 1966.
15. Годунов С. К., Рябенький В. С. Введение в теорию разностных схем. М., Физматгиз, 1962.
16. Woods L. Note on the numerical solution of a fourth order differential equation. — «Aeron. Quart.», 1954, N 5.
17. Taneda S. Visualization experiments on unsteady viscous flows around cylinders and plates. Prep. IUTAM Symp. on Unsteady Boundary Layers Laval. Univer. Queb. Canada, May, 1971.
18. Кравченко В. И., Шевелев Ю. Д., Щенников В. В. Численное исследование течения вязкой несжимаемой жидкости около цилиндра, мгновенно приведенного в движение. Препринт ИПМ АН СССР, 1974, № 37.