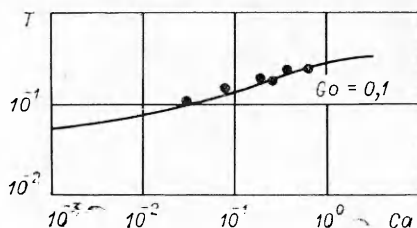
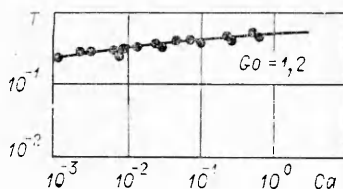


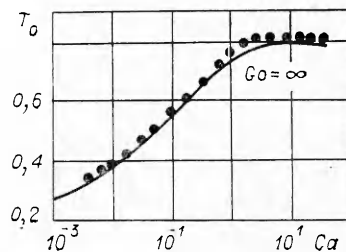
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Введем безразмерную расходную толщину $T = h_{\infty}(\rho g/\mu U)^{1/2}$, в результате

$$[T Go (2/Ca)^{1/2} + 1]^2 = S^2 - \frac{Go^2}{Ca} \left(S^4 \ln S - \frac{3}{4} S^4 + S^2 - \frac{1}{4} \right).$$

На фиг. 3—5 приведено сравнение теоретических и экспериментальных результатов, заимствованных из [3, 5], которое показывает их хорошее согласие во всем диапазоне скоростей извлечения, полученных в эксперименте.

Поступила 24 II 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. Дерягин Б. В. Теория нанесения вязкой жидкости на вытаскиваемое из нее волокно или проволоку. — ПМТФ, 1963, № 3.
2. White D. A., Tallmadge J. A. A theory of withdrawal of cylinders from liquid baths. — AIChE Journ., 1966, vol. 12, N 2.
3. White D. A., Tallmadge J. A. A gravity corrected theory cylinder withdrawal. — AIChE Journ., 1967, vol. 13, N 4.
4. White D. A., Tallmadge J. A. Static menisci on the outside of cylinders. — J. Fluid Mech., 1965, vol. 23, N 2.
5. Spiers R. P., Subbaraman C. V., Wilkinson W. L. Free coating of a newtonian liquid onto a vertical surface. — Chem. Engng Sci., 1974, vol. 29, N 3.

УДК 532.52

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ВЯЗКИХ СТРУЙ

В. Н. Коровкин, Ю. А. Соковинин

(Новополоцк, Ленинград)

Известны автомодельные решения [1—3] задачи о распространении ламинарной плоской (свободной и полуограниченной) струи — источника в затопленном пространстве. Полученные в этих работах зависимости имеют существенный недостаток: возникает особенность при $x \rightarrow 0$. Это означает, что с помощью полученных формул можно правильно описать течение только при больших значениях x . При разыскании неавтомодельного решения для струи, истекающей из щели конечного размера, был установлен вид функции тока и найдены в аналитическом виде первые три члена разложения (динамическая задача) [4]. Неавтомодельные тепловые задачи рассмотрены в [5, 6],

где продолжены исследования [4]. Однако в [4—6] остался открытым вопрос об определении постоянных интегрирования и области сходимости полученных рядов.

В данной работе найдено решение задачи о распространении ламинарной плоской (свободной и полуограниченной) струи в затопленном пространстве при различных вариантах граничных условий температуры окружающей среды или поверхности для любых чисел Прандтля.

1. Для стационарного плоского течения вязкой несжимаемой жидкости уравнения ламинарного пограничного слоя при постоянном давлении во внешнем потоке имеют вид [3]

$$(1.1) \quad \begin{aligned} u\partial u/\partial x + v\partial u/\partial y &= \nu\partial^2 u/\partial y^2, \\ \partial u/\partial x + \partial v/\partial y &= 0, \quad u\partial\Delta T/\partial x + v\partial\Delta T/\partial y = a\partial^2\Delta T/\partial y^2. \end{aligned}$$

Перейдем к формулировке граничных условий. Для свободной плоской струи они запишутся следующим образом:

$$(1.2) \quad v = \partial u/\partial y = 0 \text{ при } y = 0, \quad u \rightarrow 0 \text{ при } y \rightarrow \infty;$$

$$(1.3) \quad \partial\theta/\partial y|_{y=0} = 0, \quad \theta(x, +\infty) = 0, \quad \theta = \Delta T;$$

$$(1.4) \quad \theta(x, +\infty) = 1, \quad \theta(x, -\infty) = 0, \quad \theta = (T - T_2)/(T_1 - T_2).$$

Для плоской полуограниченной струи имеем

$$(1.5) \quad v = u = 0 \text{ при } y = 0, \quad u \rightarrow 0 \text{ при } y \rightarrow \infty;$$

$$(1.6) \quad \theta(x, 0) = 0, \quad \theta(x, \infty) = 0, \quad \theta = \Delta T;$$

$$(1.7) \quad \partial\theta/\partial y|_{y=0} = 0, \quad \theta(x, \infty) = 0, \quad \theta = \Delta T;$$

$$(1.8) \quad \theta(x, 0) = 1, \quad \theta(x, \infty) = 0, \quad \theta = (T - T_\infty)/(T_w - T_\infty);$$

$$(1.9) \quad \partial\theta/\partial y|_{y=0} = -1, \quad \theta(x, \infty) = 0, \quad \theta = k(T - T_\infty)/q_w.$$

При нахождении нетривиального решения системы (1.1) при нулевых граничных условиях необходимо задание интегральных условий, которые получаются путем интегрирования уравнения движения и тепла с учетом уравнения неразрывности и граничных условий [1—3]:

$$(1.10) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \rho u^2 dy = K_0, \quad \int_0^{\infty} u^2 \left(\int_0^y u dy \right) dy = E_0;$$

$$(1.11) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \rho u \Delta T dy = Q_0, \quad \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} u \Delta T \left(\int_0^y u dy \right) dy = -a \int_0^{\infty} u \frac{\partial \Delta T}{\partial y} dy.$$

Здесь u, v — составляющие вектора скорости; $\Delta T = T - T_\infty$ — избыточная температура; x, y — продольная и поперечная координаты; ν, a, k — коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности и теплопроводности; ρ — плотность; q — поток тепла; T_∞, T_w — температура покоящейся среды и стенки; T_1, T_2 — температура вне струи при $y = +\infty$ и $y = -\infty$ соответственно.

2. Ранее полученные решения системы уравнений (1.1) основаны были на следующих преобразованиях подобия:

$$\begin{aligned} \psi(x, \eta) &= \nu^{\beta+1} f_0(\eta) x^{\beta+1}, \quad \theta(x, \eta) = d_0(\eta) x^\beta, \\ x &= x, \quad \eta = (x\nu)^\beta y, \end{aligned}$$

которые приводят к ограничениям, указанным выше. Рассмотрим более общее преобразование подобия:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \psi(x, \eta) &= \nu^{\beta+1} f(\eta) p(x), \quad \theta(x, \eta) = d(\eta) \varepsilon(x), \\ x &= x, \quad \eta = \nu^\beta \sigma(x) y. \end{aligned}$$

В результате применения (2.1) к уравнениям (1.1) получим

$$(2.2) \quad \begin{aligned} f_{\eta\eta\eta} p \sigma^3 + f f_{\eta\eta} p \sigma^2 p_x - f_\eta^2 p \sigma (p \sigma)_x &= 0, \\ \frac{1}{p\Gamma} d_{\eta\eta} \sigma^2 \varepsilon + f d_\eta \sigma \varepsilon p_x - f_\eta d p \sigma \varepsilon_x &= 0. \end{aligned}$$

Решение уравнений (2.2) запишется в виде

$$(2.3) \quad p = X^{\beta+1}, \sigma = X^\beta, \varepsilon = X^\delta, X = x(1 + \gamma/((\beta + 1)x)).$$

При этом вид полученных функций $f(\eta)$, $d(\eta)$, удовлетворяющих соответствующим граничным и интегральным условиям, совпадает с известными решениями для свободной ($\beta = -2/3$, $\delta = -1/3$, $\delta = 0$) [1, 3] и полуограниченной струй ($\beta = -3/4$, $\delta = -(3Pr + 1)/8Pr$, $\delta = -1/4$, $\delta = 0$, $\delta = 3/4$) [1, 2, 7]. Далее находим

$$(2.4) \quad u = v^{2\beta+1} f' X^{2\beta+1}, \theta = dX^\delta, v = -v^{\beta+1}[(\beta + 1)f + \beta f' \eta] X^\beta.$$

Можно видеть, что при больших x формулы (2.4) переходят в выражения [1—3]. Не выписывая известных решений для плоских струй-источников, отметим только, что отличие решений (2.4) от [1—3] также в переменной η :

$$\eta = (xv)^\beta (1 + \gamma/(\beta + 1)x)^\beta y.$$

3. Следуя [4—6], приближенное решение задачи ищем в виде разложений:

$$(3.1) \quad \psi = v^{\beta+1} \sum_{i=0}^{\infty} f_i(\eta) x^{\lambda_i}, \quad \theta = \sum_{i=0}^{\infty} d_i(\eta) x^{\delta-i}, \\ \eta = (xv)^\beta y, \quad \lambda_i = \beta + 1 - i.$$

Подставляя (3.1) в уравнения системы (1.1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , будем иметь бесконечную систему дифференциальных уравнений для определения неизвестных функций:

$$(3.2) \quad f_0''' + (\beta + 1) f_0 f_0'' - (2\beta + 1) f_0'^2 = 0, \\ \frac{1}{Pr} d_0'' + (\beta + 1) f_0 d_0' - \delta f_0' d_0 = 0, \\ f_i''' + (\beta + 1) f_0 f_i'' - (4\beta + 2 - i) f_0' f_i' + \lambda_i f_0'' f_i = N_i, \\ \frac{1}{Pr} d_i'' + (\beta + 1) f_0 d_i' - (\delta - i) f_0' d_i = M_i, \\ N_i = \sum_{j=1}^{i-1} \{ [2\beta + 1 - (i - j)] f_j' f_{i-j}' - (\beta + 1 - j) f_j f_{i-j}'' \}, \\ M_i = \delta f_i' d_0 - \lambda_i f_i d_0' + \sum_{j=1}^{i-1} \{ [\delta - (i - j)] f_j' d_{i-j}' - (\beta + 1 - j) f_j d_{i-j}'' \}.$$

Здесь штрих означает дифференцирование по η . Первые два уравнения (3.2) имеют известные решения [1—3, 7]. Для получения членов более высокого порядка обратимся к третьему уравнению (3.2), в котором целесообразно перейти к новым переменным [4]:

$$f_i = f_0' \int \frac{y_i}{f_0'} d\eta, \quad w_i = zy_i, \quad t = z^3.$$

После ряда преобразований, которые здесь опущены, оно сводится к уравнению Лежандра ($\beta = -2/3$)

$$(3.3) \quad (1 - z^2) y_i'' - 2zy_i' + 6iy_i = \frac{N_i}{\alpha^2 (1 - z^2)}$$

и к гипергеометрическому ($\beta = -3/4$)

$$(3.4) \quad t(1 - t) w_i'' + \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3} t \right) w_i' + \frac{2 + 8i}{3} w_i = \frac{144N_i}{9\alpha^2 (1 - t)}.$$

Причем здесь использовано автомодельное решение [2, 3]:

$$f_0 = 6\alpha z, \quad z = \operatorname{th} \alpha \eta, \quad \alpha = (K_0/48\rho)^{1/3},$$

$$f_0 = \alpha z^2, \quad \eta = \frac{12}{\alpha} \int \frac{dz}{1-z^3}, \quad \alpha = (40E_0)^{1/4}.$$

Решение уравнений (3.3), (3.4) может быть представлено в виде суммы решений соответствующего однородного дифференциального уравнения и частного интеграла φ_i . Учитывая граничные условия (1.2), (1.5), получаем соответственно

$$f_i = c_i (1-z^2) \int \frac{P_k(z)}{(1-z^2)^2} dz + \varphi_i;$$

$$f_i = c_i z (1-z^3) \int \frac{F(a+2/3, b+2/3, 5/3, z^3)}{(1-z^3)^2} dz + \varphi_i,$$

$$ab = -2(1+4i)/3, \quad a+b = 1/3.$$

Здесь $P_k(z)$ — полиномы Лежандра первого рода [8], ограниченные в интервале $-1 \leq z \leq 1$ при условии $6i = k(k+1)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $i = 1, 2, \dots$ (следовательно, $i = 1, k = 2$ [4]; $i = 7, k = 6$ и т. д.); $F(a+2/3, b+2/3, 5/3, z^3)$ — гипергеометрическая функция, которая в случае выполнения равенства

$$(3.5) \quad 5/6 - (\sqrt{25+96i})/6 = -k$$

может быть выражена через полиномы [8]. Первым значением i , согласно (3.5), является $i = 1, k = 1$ [4], вторым $i = 29, k = 8$ и т. д. Заметим, что постоянная интегрирования c_i проходит через интегральное условие, которое в переменной η имеет вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(2f_0' f_i' + \sum_{j=1}^{i-1} f_j f_{i-j}' \right) d\eta = 0,$$

$$\int_0^{\infty} \left(f_i f_0'^2 + \sum_{j=0}^{i-1} f_j \sum_{k=0}^{i-j} f_k f_{i-j-k}' \right) d\eta = 0.$$

Это говорит о том, что неопределимые константы будут появляться и дальше в рядах (3.1). Частный интеграл для рассматриваемого уравнения можно представить в виде

$$\varphi_{i+1} = \frac{\gamma}{(i+1)(\beta+1)} [\beta f_i' \eta + (\beta+1-i) f_i], \quad c_1 = \gamma.$$

Суммируя полученное, имеем возможность записать асимптотические выражения для ψ и u :

$$(3.6) \quad \psi = \nu^{\beta+1} \left\{ f_0 x^{\beta+1} + \frac{\gamma}{\beta+1} \sum_{i=0}^n \frac{1}{i+1} (\beta f_i' \eta + \lambda_i f_i) x^{\beta-i} + \dots \right\},$$

$$u = \nu^{2\beta+1} \left\{ f_0 x^{2\beta+1} + \frac{\gamma}{\beta+1} \sum_{i=0}^n \frac{1}{i+1} (\beta f_i'' \eta + (\lambda_i + \beta) f_i') x^{2\beta-i} + \dots \right\}.$$

Здесь $n = 6$ для свободной и $n = 28$ для полуограниченной струй. Аналогичным путем строится решение и для температуры:

$$(3.7) \quad \theta = d_0 x^\delta + \frac{\gamma}{\beta+1} \sum_{i=0}^n \frac{1}{i+1} (\beta d_i' \eta + (\delta-i) d_i) x^{\delta-i-1} + \dots$$

В принципе возможна аппроксимация ψ, u, θ членами более высокого порядка ($i \geq 7, i \geq 29$), но при этом появляются новые неопределимые константы, а полученные формулы приобретают весьма громоздкий вид.

Продолжая анализ, заметим, что результаты (3.6), (3.7), представляющие приближенное неавтономное решение задачи, следуют и непосредственно из формул (2.4), если их записать в форме

$$u = v^{2\beta+1} f'_0(\eta (X/x)^\beta) X^{2\beta+1}, \quad \theta = d_0(\eta (X/x)^\beta) X^\delta$$

и разложить в ряды

$$u(t) = u(0) + tu'(0) + \frac{t^2}{2!} u''(0) + \dots$$

по переменной $t = \gamma/(\beta + 1)x$

$$(3.8) \quad u = v^{2\beta+1} \left\{ f'_0 x^{2\beta+1} + \frac{\gamma}{\beta+1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1} (\beta f''_i \eta + (\lambda_i + \beta) f'_i) x^{2\beta-i} \right\},$$

$$\theta = d_0 x^\delta + \frac{\gamma}{\beta+1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1} (\beta d'_i \eta + (\delta - i) d_i) x^{\delta-1-i}.$$

Полученные результаты (3.8) позволяют заключить, что появляющиеся в рядах ($i \geq 7$, $i \geq 29$), согласно (3.6), (3.7), новые неопределимые константы не имеют уже смысла априорно данного значения γ и, видимо, являются общим недостатком схемы асимптотического пограничного слоя. Кроме того, можно видеть, что ряды (3.6), (3.7) сходятся к точным формулам (2.4) при всех

$$|\gamma/(\beta + 1)x| < 1.$$

Для окончательного завершения решения задачи (1.1)—(1.11) остается определить постоянную интегрирования γ , которая проходит через граничные и интегральные условия. Она характеризуется секундным массовым расходом через начальное сечение струи m_0 :

$$(3.9) \quad \gamma = m_0^3/(108\rho^2\nu K_0), \quad \gamma = m_0^4/(160\rho^4\nu E_0).$$

Развивая дальше анализ, заметим, что соотношения (2.3), (2.4) и (3.9) являются автомодельными решениями [1—3], но сдвинутыми по оси x . Физически это означает, что струя вытекает из фиктивного источника, расположенного внутри сопла на таком расстоянии от выходного сечения, чтобы расход жидкости на срезе сопла, задаваемый автомодельным решением, совпадал с реальным расходом.

4. Обратимся вновь к рассмотренному выше решению для температурного поля. Уравнение энергии исследовалось при задании интегрального условия избыточного теплосодержания, что заменяет задание детальных условий истечения из насадка. Но реальные струи (вытекающие из щели конечного размера) могут обладать различной формой начального профиля скорости (температуры). Поэтому интереснее, видимо, рассматривать распределение температуры в некотором сечении струи. Решение уравнения энергии в такой постановке позволило бы, в частности, качественно и количественно описать процесс деформации начального профиля температуры, определить влияние Pr и т. д.

В этом случае дополнительно к уравнениям (1.1), граничным (1.2), (1.3), (1.5)—(1.7) и интегральным условиям (для скоростного поля) задаем равенство

$$(4.1) \quad \Delta T(x, y)|_{x=x_0} = \Delta T(x_0, y) = T_0.$$

При этом автомодельность, вообще говоря, не существует и необходимо решать задачу о собственных значениях и собственных функциях. Решение третьего уравнения системы (1.1) будем искать в виде

$$(4.2) \quad \Delta T(x, \eta) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i X^{\alpha_i} \theta_i(\eta).$$

Используя полученные выше результаты (2.4), для определения $\theta_i(\eta)$ имеем уравнение

$$(4.3) \quad \frac{1}{Pr} \theta_i'' + (\beta + 1) f \theta_i' - \alpha_i f' \theta_i = 0,$$

которое при задании граничных условий (1.3) с помощью замены $t = \text{th}^2 \alpha \eta$ сводится к гипергеометрическому:

$$(4.4) \quad t(1-t)\theta_i'' + \left[\frac{1}{2} + \left(Pr - \frac{3}{2} \right) t \right] \theta_i' - \frac{3}{2} Pr \alpha_i \theta_i = 0, \\ \theta_i(1) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} t^{1/2} \theta_i' = 0.$$

Решение уравнения (4.4) можно записать в виде

$$(4.5) \quad \theta_i = c_1 F(a, b, 1/2, t) + c_2 \sqrt{t} F(a + 1/2, b + 1/2, 3/2, t), \\ a + b = 1/2 - Pr, \quad ab = 3\alpha_i Pr/2.$$

Второе граничное условие (4.4) показывает, что первый интеграл выражения (4.5) и есть требуемое решение, которое удовлетворяет первому граничному условию (4.4) при $a = i + 1/2$. Тогда

$$(4.6) \quad \alpha_i = -(2i + 1)(Pr + i)/3Pr.$$

Имея в виду формулы (4.2), (4.5) и (4.6), находим

$$(4.7) \quad \Delta T = \sum_{i=0}^{\infty} C_i (X/X_0)^{\alpha_i} (1-t)^{Pr} F(-i, i + Pr + 1/2, 1/2, t).$$

Далее, учитывая свойство ортогональности полиномов Якоби [9], определяем постоянную C_i :

$$(4.8) \quad C_i = \frac{(2i + Pr + 1/2) \Gamma(i + Pr + 1/2) \Gamma(i + 1/2)}{\pi \Gamma(i + 1) \Gamma(Pr + i + 1)} \int_0^1 T_0 t^{-1/2} F(-i, i + Pr + 1/2, 1/2, t) dt.$$

При выводе (4.8) использовано соотношение между гипергеометрической функцией и полиномами Якоби [9]:

$$P_i^{\alpha, \beta}(\xi) = \frac{(i + \alpha)!}{\alpha! i!} F\left(-i, i + \alpha + \beta + 1, \alpha + 1, \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \xi\right).$$

Теорию, изложенную выше, можно обобщить и на случай полуограниченной струи при задании граничных условий (1.6) — «подобные» граничные условия для скорости и температуры, (1.7) — нетеплопроводная стенка.

В переменных (2.1) уравнение (4.3) сводится к гипергеометрическому:

$$t(1-t)\theta_i'' + \left[\frac{2}{3} + \left(Pr - \frac{5}{3} \right) t \right] \theta_i' - \frac{8}{3} \alpha_i Pr \theta_i = 0;$$

$$1) \theta_i(0) = 0, \quad \theta_i(1) = 0; \quad 2) \lim_{t \rightarrow 0} t^{2/3} \theta_i' = 0, \quad \theta_i(1) = 0.$$

Здесь штрих означает дифференцирование по $t = z^3$. Запишем искомые результаты:

$$(4.9) \quad 1) \Delta T = \sum_{i=0}^{\infty} C_i (X/X_0)^{\alpha_i} t^{1/3} (1-t)^{Pr} F(-i, i + Pr + 4/3, 4/3, t);$$

$$2) \Delta T = \sum_{i=0}^{\infty} C_i (X/X_0)^{\alpha_i} (1-t)^{Pr} F(-i, i + Pr + 2/3, 2/3, t);$$

$$1) \alpha_i = -\frac{(i+1)(1+3Pr+3i)}{8Pr}, \quad 2) \alpha_i = -\frac{(3i+2)(Pr+i)}{8Pr}.$$

Коэффициенты C_i определяются из условия ортогональности полиномов Якоби:

$$1) C_i = A_i \int_0^1 T_0 F(-i, i + Pr + 4/3, 4/3, t) dt;$$

$$2) C_i = B_i \int_0^1 T_0 t^{-1/3} F(-i, i + Pr + 2/3, 2/3, t) dt;$$

$$A_i = \frac{(2i + Pr + 4/3) \Gamma(i + Pr + 4/3) \Gamma(i + 4/3)}{[\Gamma(4/3)]^2 \Gamma(i + 1) \Gamma(i + Pr + 1)};$$

$$B_i = \frac{(2i + Pr + 2/3) \Gamma(i + Pr + 2/3) \Gamma(i + 2/3)}{[\Gamma(2/3)]^2 \Gamma(i + 1) \Gamma(i + Pr + 1)}.$$

Выражение T_0 дается формулой (4.1). Отметим, что основным членом ряда (4.2), как видно из полученных результатов (4.7), (4.9), являются выражения, которые с точностью до константы совпадают с решениями (2.4), найденными выше при задании в качестве начального условия интегрального соотношения (1.10), (1.11) (для температурного поля). Последующие члены ряда (4.2) позволяют учесть влияние начального профиля температуры T_0 , причем на дальнейшую асимптотику существенное влияние оказывает уже Pr . Интересно, что константа c_1 в автомодельном решении

[6] не определяется интегральным условием (при $\beta = -3/4$, $\delta = -(3Pr + 1)/8Pr$), на это указывалось и в [1], за исключением случая $Pr = 1$, когда существует общий (не связанный с предположением об автомодельности) инвариант. Если вместо интегрального условия ставится соотношение (4.1), то задача, как видно из полученных результатов, доводится до конца.

На фигуре (u_0 — скорость струи в начальном сечении, d — диаметр сопла, $Re = u_0 d / 2\nu$ — число Рейнольдса, $x_* = 2x/dRe$ — безразмерная осевая координата [10]) представлено изменение максимальной скорости вдоль оси плоской свободной струи. Кривая 3 — расчет по формулам (2.4), точки — численное решение [10]. Сравнение распределения u/u_0 , подсчитанное по аналитическим выражениям ($\gamma_0 = 4\nu\gamma/u_0 d^2 = 0,0867$) с численными результатами [10], показало их хорошее совпадение, за исключением области, близкой к 0, где формулы (2.4) дают завышенные, хотя и не противоречивые значения. На фигуре также сопоставлены автомодельное (кривая 1) и приближенное неавтомодельное [4] (три члена разложения (3.6)) (кривая 2) аналитические решения.

В заключение заметим, что все найденные ранее приближенные неавтомодельные решения получаются как частный случай из результатов данной работы.

Поступила 24 II 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. Вулс Л. А., Кашкаров В. П. Теория струй вязкой жидкости. М.: Наука, 1965.
2. Акатпов Н. И. Распространение плоской ламинарной струи несжимаемой жидкости вдоль твердой стенки. — Тр. ЛПИ, 1953, № 5.
3. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969.
4. Коробко В. П., Фалькович С. В. Некоторые неавтомодельные задачи теории струйных течений. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1970, № 2.
5. Коробко В. П., Коровкин В. П. Развитие плоской ламинарной газовой струи в безграничном пространстве. — Изв. АН БССР. Сер. физико-энерг., 1978, № 3.

6. Коробко В. И., Коровкин В. П. Теплообмен в полуограниченных плоских ламинарных газовых струях. — Изв. АН БССР. Сер. физико-энерг., 1980, № 1.
7. Gorla R. S. R. Combined natural and forced convection in a laminar wall jet along a vertical plate with uniform surface heat flux. — Appl. Scient. Res., 1976, vol. 31, N 6.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1965.
9. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1966.
10. Белоглазов Б. П., Гиневский А. С. Расчет ламинарных спутных струй с точным удовлетворением условия постоянства избыточного импульса. — Учен. зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, № 4.

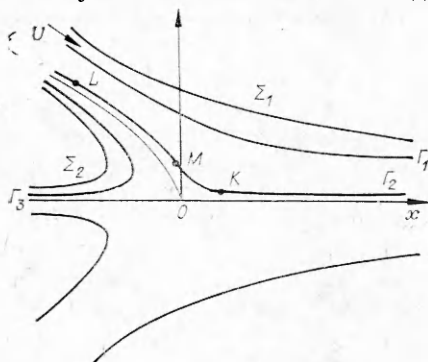
УДК 532.522+532.526

О СОУДАРИИ ПЛОСКИХ МНОГОСЛОЙНЫХ СТРУЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

М. В. Рубцов
(Новосибирск)

Для нахождения отличий реального течения при высокоскоростном соударении металлических пластин от известного [1, 2] невязкого течения в [3] рассмотрена задача о симметричном соударении плоских струй вязкой жидкости со свободной границей. Задача решается приближенно в предположении существования пограничного слоя поправок к невязкому течению вблизи свободных границ при достаточно большом числе Рейнольдса. Решение находится в первом приближении из упрощенного уравнения на поправку $w(\varphi, \psi)$ к скорости $u_0(\varphi, \psi)$ невязкого течения вдоль линии тока. Упрощенное уравнение получается из уравнений Навье — Стокса оценкой членов по порядку величин. Представляет интерес рассмотреть этим методом задачу о соударении струй, когда каждая из них состоит из нескольких слоев жидкости с разной вязкостью и одинаковой плотностью.

1. Пусть имеется стационарное движение несжимаемой вязкой жидкости в области, изображенной на фиг. 1. Две струи одинаковой толщины h движутся из бесконечности с одинаковой скоростью U под углом γ к оси симметрии.



Фиг. 1

Направим ось x декартовых координат (x, y) по оси симметрии и рассмотрим одну половину области течения. Набегающая струя состоит из N слоев одинаковой плотности ρ и различных вязкости μ_l и толщины δ_l , $l = 1, 2, \dots, N$, $\sum_{l=1}^N \delta_l = h$. Область течения ограничена осью x и двумя свободными границами Σ_1 и Σ_2 . В области течения находятся $N-1$ границ раздела жидкостей $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{N-1}$. Составляющие скорости вдоль x, y обозначим через u, v . Нормируя x, y на h, u , v на U , давление p на ρU^2 , запишем уравнения Навье — Стокса в виде

$$(1.1) \quad \begin{aligned} u_l \frac{\partial u_l}{\partial x} + v_l \frac{\partial u_l}{\partial y} &= - \frac{\partial p_l}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}_l} \Delta u_l, \\ u_l \frac{\partial v_l}{\partial x} + v_l \frac{\partial v_l}{\partial y} &= - \frac{\partial p_l}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}_l} \Delta v_l, \\ \frac{\partial u_l}{\partial x} + \frac{\partial v_l}{\partial y} &= 0, \quad \text{Re}_l = \frac{\rho U h}{\mu_l}, \quad l = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Граничные условия на границах Σ_1, Σ_2 записаны в [3]:

$$(1.2) \quad \mathbf{V}|_{\Sigma} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}|_{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}|_{\Sigma} \cdot \mathbf{n} = 0,$$