

УДК 533.6.013.42

МЕТОДИКА РАСЧЕТА АЭРОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ МНОГОБАЛОЧНЫХ СООРУЖЕНИЙ

С. Д. Саленко

Новосибирский государственный технический университет, 630092 Новосибирск

Рассмотрены математические модели и методики, описывающие поперечные колебания сооружений в ветровом потоке. Предложена методика, позволяющая определять амплитуды колебаний многобалочных сооружений при ветровом резонансе. Колебания системы с распределенными параметрами описываются слабонелинейным дифференциальным уравнением. Амплитуды предельных циклов колебаний определяются с использованием энергетического подхода. Для описания пульсационной составляющей аэродинамических сил введен определяемый экспериментально коэффициент, характеризующий энергетический вклад этих сил за один период колебаний. По структуре полученные расчетные формулы аналогичны формулам в Европейских нормах по расчету сооружений на воздействие ветра, но более универсальны и полнее отражают физику процесса.

В настоящее время выделяют следующие основные типы аэроупругих колебаний: флаттер, ветровой резонанс, галопирование, бафтинг [1–3]. Математические модели и методики для описания поперечных колебаний сооружений в ветровом потоке строились в основном для однобалочных конструкций.

В современном мостостроении при установке пролетных строений в проектное положение широко применяется метод продольной надвижки. При этом для облегчения консоли на авангардной части строения снимаются плиты перекрытия, в результате чего она представляет собой конструкцию из нескольких коробчатых балок, отстоящих друг от друга на расстояние 3–6 высот и соединенных поперечными связями в виде ферм (рис. 1). Из практики строительства таких мостов [4] и экспериментов, проведенных с моделями пролетных строений в аэродинамической трубе [5], известно, что участок пролетного строения без ортотропных плит генерирует значительные пульсационные аэродинамические нагрузки. Расчеты форм и частот колебаний системы балок, связанных между собой перемычками, показали, что для данного класса сооружений практический интерес представляют изгибные колебания в вертикальной плоскости поперек потока. Другие формы колебаний могут возникнуть только при нереально больших скоростях ветра.

Из результатов экспериментов в аэродинамической трубе с моделями двух- и трехбалочных пролетных строений следует, что для многобалочных конструкций, в отличие от одиночных балок, существует две или три резонансных скорости ветра, при которых наблюдаются интенсивные колебания сооружения поперек потока [5]. Наличие нескольких критических чисел Струхали обусловлено возможностью существования различных типов обтекания многобалочной конструкции, причем колебания на различных режимах существенно отличаются по характеру возбуждения (жесткое или мягкое), ширине области захвата и амплитуде. В рамках существующей классификации эти колебания ближе всего к ветровому резонансу, хотя по крайней мере один из резонансных режимов связан с аэродинамической интерференцией балок.

Можно выделить несколько основных подходов, применяемых для описания поперечных колебаний сооружений в потоке. В простейшей постановке система рассматривается



Рис. 1. Трехбалочная консоль пролетного строения

как линейный осциллятор, аэродинамическая сила принимается изменяющейся по гармоническому закону [1, 6]. Аэродинамическую силу часто представляют в виде двух составляющих, синфазных с перемещением и скоростью тела [2, 7], иногда эти два подхода объединяют [8]. Для описания поперечных колебаний применяют не только детерминированные, но и статистические подходы [9]. Распространена методика, основанная на сходстве поведения рассматриваемой колебательной системы и осциллятора Ван-дер-Поля [10, 11]. Такие методики для одиночных балок позволяют воспроизвести амплитуду колебаний, ширину резонансной области, гистерезисные явления. Однако, с одной стороны, в них используется сложный математический аппарат и они неудобны для инженерных расчетов, с другой — являясь полуэмпирическими, они не позволяют прогнозировать поведение новых сооружений, так как требуют большого числа экспериментальных данных.

Целью данной работы является разработка методики, позволяющей определять резонансные скорости и амплитуды предельных циклов аэроупругих колебаний многобалочных сооружений при минимальном объеме входных экспериментальных данных.

Рассматриваемые сооружения представляют собой многоопорные балки переменной по длине массы и жесткости (рис. 2). Для описания изгибных колебаний в вертикальной плоскости примем следующие допущения: трением в опорах будем пренебрегать и считать их абсолютно жесткими; балку считаем длинной, т. е. выполняется соотношение $l/h \gg 1$ (l — длина балки, h — ее характерный размер (высота поперечного сечения)); перерезывающими силами пренебрегаем, так как $l/h \gg 1$.

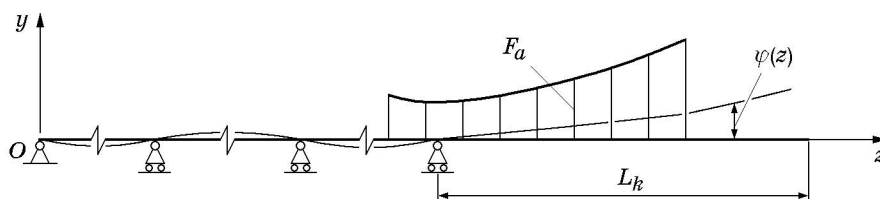


Рис. 2. Расчетная схема консоли пролетного строения

Дифференциальное уравнение поперечных колебаний балки при ветровом резонансе получим, введя в уравнение свободных колебаний члены, характеризующие аэродинамические силы и внутреннее рассеяние энергии в процессе колебаний:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EI(z) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + m(z) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F_a(z, t) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\Phi \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \right], \quad (1)$$

где $w(z, t)$ — функция деформации прогиба; $m(z)$ — погонная масса; $EI(z)$ — изгибная жесткость; F_a — пульсационная составляющая погонной аэродинамической нагрузки.

В общем случае F_a зависит от местной амплитуды колебаний, чисел Рейнольдса и Струхала, интерференции соседних участков, концевых эффектов. Предположим, что при установившихся колебаниях F_a является периодической функцией с периодом, равным периоду колебаний балки.

Для описания внутреннего рассеяния энергии в процессе колебаний введем функционал $\Phi(\partial^2 w / \partial z^2)$, характеризующий несовершенную упругость колебательной системы и представляющий собой момент сил неупругого сопротивления [12].

Из результатов испытаний моделей пролетных строений следует, что логарифмический декремент колебаний без потока составляет 0,01–0,02, тот же порядок имеет инкремент колебаний при их развитии в потоке. Поэтому можно считать, что в уравнении (1) члены F_a и $\partial^2[\Phi(\partial^2 w / \partial z^2)] / \partial z^2$ имеют более высокий порядок малости, чем члены левой части, и его можно рассматривать как слабонелинейное.

Учитывая малость членов правой части уравнения (1), можно считать, что при установившемся режиме колебания балки происходят по гармоническому закону с частотой, практически равной частоте собственных колебаний. Тогда можно принять, что $w(z, t) \approx a\varphi(z) \sin \omega t$, где a — амплитуда установившихся колебаний; $\varphi(z)$ — собственная форма колебаний; ω — собственная частота колебаний.

Для определения амплитуд предельных циклов автоколебаний воспользуемся принципом энергетического баланса, согласно которому рассеяние энергии колеблющейся системы за цикл ΔW равно работе внешних сил ΔA : $\Delta W = \Delta A$.

Интегрируя по периоду и длине балки выражение для элементарной работы внешних аэродинамических сил на элементарном участке, получим

$$\Delta A = \int_0^{L_q} \int_0^{2\pi} F_a \omega a \varphi(z) \cos \omega t \, dt \, dz. \quad (2)$$

Поскольку F_a — периодическая функция в случае установившихся колебаний, ее можно разложить в ряд Фурье: $F_a = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin(n\omega t + \psi_n)$, где $q_n = q_n(t, a, \dots)$ — амплитуды пульсаций распределенной аэродинамической нагрузки на n -й частоте; ψ_n — сдвиг фаз между n -й гармоникой и перемещением балки. Будем рассматривать колебания по первому тону, хотя аналогичные рассуждения применимы к любым тонам. Учитывая, что результирующая работа гармоник с $n > 1$ по периоду равна нулю, из (2) получим

$$\Delta A = a\pi \int_{L_q} q_1 \varphi(z) \sin \psi_1 \, dz = a\pi \int_{L_q} c'_{y1} \frac{\rho V^2}{2} b \varphi(z) \sin \psi_1 \, dz, \quad (3)$$

где c'_{y1} — амплитуда пульсационной составляющей коэффициента подъемной силы; b — суммарная ширина балок по направлению потока; ρ , V — плотность и скорость набегающего потока.

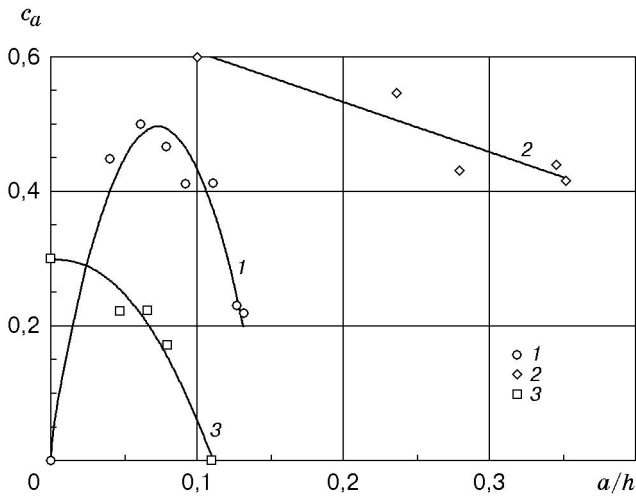


Рис. 3. Зависимость коэффициента c_a от относительной амплитуды:
 1 — $Sh = 0,127$; 2 — $Sh = 0,087$; 3 — $Sh = 0,084$

Если предположить, что в (3) $\psi_1 \approx 90^\circ$ (что имеет место при обычном резонансе), то получится тот же результат, что и для гармонической внешней силы, не зависящей от характера колебаний. Однако в случае рассматриваемых аэроупругих колебаний внешняя аэродинамическая сила связана с характером колебаний. Как показывают эксперименты с призмами прямоугольного сечения [13], сдвиг фаз ψ_1 изменяется в широком диапазоне, причем величину ψ_1 трудно определять экспериментально и неудобно систематизировать и аппроксимировать из-за сложной зависимости ее от формы сечения призм, амплитуды колебаний и числа Струхала Sh .

Представляется целесообразным не разделять величины c'_{y1} и $\sin \psi_1$, а ввести коэффициент $c_a = c'_{y1} \sin \psi_1$, который является функционалом, характеризующим работу аэродинамических сил за один период для рассматриваемого тона. В общем случае коэффициент c_a может быть как положительным (возбуждение колебаний), так и отрицательным (демпфирование колебаний). Коэффициент c_a определяется экспериментальным путем. Зависимость коэффициента c_a от относительной амплитуды колебаний для трех резонансных областей (трех значений числа Sh) трехбалочной секционной модели приведена на рис. 3. На секционной модели амплитуда колебаний по ее длине постоянна по продольной координате. Для реальных сооружений местная амплитуда зависит от продольной координаты z . При этом из-за интерференции соседних участков с различной амплитудой колебаний возникает проблема определения местного значения коэффициента c_a . По аналогии с гипотезой плоских сечений для крыла будем считать, что местное значение коэффициента c_a зависит только от местной относительной амплитуды колебаний: $c_a = c_a(a\varphi(z)/h)$. Так как экспериментальные зависимости $c_a = c_a(a/h)$ аппроксимируются на участке $a/h \geq 0$, а при расчетах местная амплитуда может быть любого знака, $\varphi(z)$ в (3) следует брать по модулю.

Кроме того, введем в (3) коэффициент $R(z, a/h)$, учитывающий корреляцию пульсаций аэродинамической силы по длине строения. Коэффициент $R(z, a/h)$ будем аппроксимировать формулой, полученной на основе экспериментальных данных [8, 13]: $R(z, a) = 1 + \exp(-15\bar{a}^2)[\exp(-(\bar{z}/5)^2) - 1]$, где \bar{a} , \bar{z} — амплитуда колебаний и продольная координата, обезразмеренные по высоте балки h .

С учетом сказанного выше из (3) получаем следующее выражение:

$$\Delta A(a_{\max}) = a_{\max} \pi \frac{\rho V^2}{2} b \int_{L_q} c_a R(z, a) |\varphi(z)| dz, \quad (4)$$

где a_{\max} — максимальная амплитуда колебаний.

Величину внутреннего рассеяния энергии за один период ΔW определим по известной методике [12]:

$$\Delta W(a_{\max}) = \delta \omega^2 a_{\max}^2 \left[\sum_j \int_{L_j} m(z) \varphi^2(z) dz + \sum_i m_i \varphi_i^2(z) \right], \quad (5)$$

где δ — логарифмический декремент колебаний; m_i — массы сосредоточенных грузов; φ_i — амплитудное значение прогиба в месте i -й сосредоточенной массы.

Так как по предположению $\Delta A = \Delta W$, то, приравнявая (4) и (5), получим выражение для определения максимальной амплитуды установившихся колебаний

$$a_{\max} = \pi \frac{\rho V^2}{2} b \int_{L_q} c_a R(z, a) |\varphi(z)| dz / \left[\delta(a) \omega^2 \left(\sum_j \int_{L_j} m(z) \varphi^2(z) dz + \sum_i m_i \varphi_i^2(z) \right) \right]. \quad (6)$$

Формула (6) аналогична приведенной в работе [14] и Европейских нормах расчета сооружений [15]:

$$\frac{y_0}{d} = \bar{K} K \frac{c_{lat}}{Sc Sh^2}, \quad (7)$$

где c_{lat} — коэффициент возбуждающей силы; \bar{K} — коэффициент, характеризующий форму колебаний; K — коэффициент корреляции:

$$\bar{K} = \sum_j \int_{L_j} |\varphi(z)| dz / \left(4\pi \sum_j \int_{L_j} \varphi^2(z) dz \right), \quad K = \int_{L_q} |\varphi(z)| dz / \sum_j \int_{L_j} |\varphi(z)| dz;$$

y_0 — максимальное перемещение сооружения (амплитуда колебаний); d — характерный размер; Sc — число Скрутона; Sh — число Струхалья.

Действительно, при отсутствии сосредоточенных масс из (6) получаем

$$\begin{aligned} \bar{a} = \frac{a}{h} &= \pi \frac{\rho V^2}{2} b \int_{L_q} c_a R(z, a) |\varphi(z)| dz / \left(h \delta \omega^2 \sum_j \int_{L_j} m(z) \varphi^2(z) dz \right) = \\ &= \pi \rho V^2 b \int_{L_q} c_a R(z, a) |\varphi(z)| dz / \left(2h \delta 4\pi^2 f^2 \sum_j \int_{L_j} m(z) \varphi^2(z) dz \right) = \\ &= \left[\rho h^2 \sum_j \int_{L_j} \varphi^2(z) dz / \left(2\delta \sum_j \int_{L_j} m(z) \varphi^2(z) dz \right) \right] \frac{V^2}{f^2 h^2} \left[\sum_j \int_{L_j} |\varphi(z)| dz / \right. \\ &\left. / \left(4\pi \sum_j \int_{L_j} \varphi^2(z) dz \right) \right] \left[b \int_{L_q} c_a R(z, a) |\varphi(z)| dz / \left(h \sum_j \int_{L_j} |\varphi(z)| dz \right) \right] = \bar{K} \frac{1}{Sc Sh^2} \frac{b}{h} \tilde{c}_a, \quad (8) \end{aligned}$$

где $\tilde{c}_a = \int_{L_q} c_a R(z, a) |\varphi(z)| dz$ — обобщенный (эквивалентный) коэффициент c_a для балки в целом.

В (8) содержится отношение b/h , которое отсутствует в (7). Формула (7) получена для цилиндра с характерным размером d , входящим как в выражение для коэффициента возбуждающей силы, так и в число Струхалья. Однако в случае призматического тела характерные размеры для указанных двух величин удобнее принимать различными. Для c_a

это суммарная ширина сечения b (так как она определяет площадь, на которую действуют возбуждающие колебания пульсации давления), для Sh — высота сечения h (так как она в основном определяет частоту схода вихрей). При таком подходе экспериментальные зависимости для различных форм поперечных сечений удобнее обобщать и систематизировать.

Кроме того, в (7) содержится c_{lat} — амплитуда пульсационной составляющей коэффициента подъемной силы. Упрощенность такого подхода (система как линейный осциллятор) обсуждалась выше.

Следует отметить, что в Европейских нормах по расчету сооружений коэффициент c_{lat} и число Скрутона (или логарифмический декремент колебаний δ) полагаются не зависящими от амплитуды колебаний, что обычно не выполняется.

Пусть c_0 — коэффициент при нулевой степени в разложении c_a в ряд Маклорена $c_a = \sum_n c_i \bar{a}^n$ (при малых амплитудах $c_a \approx c_0 + (c_a)'_{\bar{a}} \bar{a}$). Из анализа вариантов решения уравнения (6) следует, что возможны следующие случаи:

— если $c_0 > 0$ (кривая 3 на рис. 3), то установившиеся самовозбуждающиеся колебания будут наблюдаться при любом δ ;

— если $c_0 = 0$ (кривая 1 на рис. 3) и логарифмический декремент колебаний при нулевой амплитуде δ_0 больше некоторой критической величины:

$$\delta_0 > \delta_{кр} = (c_a)'_{\bar{a}} \pi \frac{\rho V^2}{2} b \int_{L_q} R(z, a) |\varphi(z)| dz / \left[\omega^2 \left(\sum_j \int_{L_j} m(z) \varphi^2(z) dz + \sum_i m_i \varphi_i^2(z) \right) \right],$$

то колебания не будут возникать (или будут затухать при конечных возмущениях), что подтверждается как экспериментальными, так и расчетными данными;

— если в данном сечении балок на секционной модели имеется жесткое возбуждение колебаний (кривая 2 на рис. 3), то и на консольной балке колебания будут либо выходить на конечную амплитуду только при некотором начальном толчке, либо затухать при большом логарифмическом декременте колебаний, величина которого определяется расчетами по формуле (6) методом последовательных приближений.

Расчетные зависимости амплитуды колебаний от вылета (длины консольного участка) L_k для реального пролетного строения моста представлены на рис. 4. Видно, что максимальные амплитуды колебаний реализуются не на максимальном вылете (как это часто предполагается), а при некотором промежуточном его значении. Натурные измере-

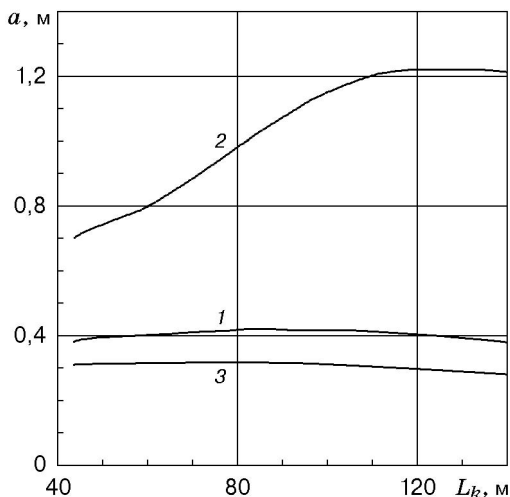


Рис. 4. Амплитуды колебаний консоли пролетного строения:

1 — $Sh = 0,127$; 2 — $Sh = 0,087$; 3 — $Sh = 0,084$

ния для подобных конструкций отсутствуют, за исключением наблюдавшихся визуально колебаний с амплитудой 0,3–0,5 м при вылете трехбалочной консоли 80 м [4].

Предложенная методика проверена экспериментально в аэродинамической трубе на модели, динамические характеристики которой подобны характеристикам пролетного строения моста. Амплитуды колебаний, рассчитанные с использованием коэффициентов c_a , полученных на секционной модели, хорошо соответствуют измеренным значениям (погрешность не более 5–10 %).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Симиу Э., Сканлан Р.** Воздействие ветра на здания и сооружения. М.: Стройиздат, 1984.
2. **Фомин Г. М.** Исследование автоколебаний упругих конструкций при срыве потока: Дис. ... д-ра техн. наук. М., 1974.
3. **Казакевич М. И.** Аэродинамика мостов. М.: Транспорт, 1987.
4. **Саленко С. Д., Кураев А. А., Обуховский А. Д. и др.** Гасители аэроупругих колебаний консоли пролетного строения // Стр-во и реконструкция ж.-д. и автодорож. мостов. 1996. № 1. С. 53–58.
5. **Salenko S. D., Obukhovsky A. D.** Aeroelastic oscillation especiality of multibeam consols // Proc. of the ICMAR'96, Novosibirsk, 2–6 Sept. 1996. Novosibirsk: Inst. Theoret. Appl. Mech., 1996. P. 205–209.
6. **Фершинг Г. В.** Основы аэроупругости. М.: Машиностроение, 1984.
7. **Scruton C., Flint A. R.** Wind-excited oscillations of structures // Proc. Inst. Civ. Engng (London). 1964. V. 27. P. 673–702.
8. **Vickery B. J., Basu R. I.** Across-wind vibrations of structures of circular cross-section. Pt 1. Development of a mathematical model for two-dimensional conditions // J. Wind Engng Industr. Aerodyn. 1983. V. 12, N 1. P. 49–73.
9. **Блевинс Р. В., Бертон Т. Е.** Гидродинамические силы, обусловленные срывом вихрей // Теорет. основы инж. расчетов. 1976. № 1. С. 125–134.
10. **Scop R. A., Griffin O. M.** On a theory for the vortex-excited oscillations of flexible cylindrical structures // J. Sound Vibration. 1974. V. 41. P. 263–274.
11. **Landl R.** A mathematical model for the vortex-excited vibrations of bluff bodies // J. Sound Vibration. 1975. V. 42. P. 219–234.
12. **Писаренко Г. С.** Обобщенная нелинейная модель учета рассеяния энергии при колебаниях. Киев: Наук. думка, 1985.
13. **Bearman P. W., Obasaju E. D.** An experimental study of pressure fluctuations on fixed and oscillating square-section cylinders // J. Fluid Mech. 1982. V. 119. P. 297–321.
14. **Ruscheweyh H., Hortmans M., Schnakenberg C.** Vortex-excited vibrations and galloping of slender elements // Proc. of the East Europ. conf. on wind engng (EECWE'94), Warsaw, Poland, 4–8 July 1994. Warsaw, 1994. V. 1, pt 2. P. 189–194.
15. **Eurocode 1:** Basis design and action on structures. Pt 2–4: Wind action. Brussels: Europ. Comm. Standard: Centr. Secretariat, 1994.

*Поступила в редакцию 29/I 2001 г.,
в окончательном варианте — 26/III 2001 г.*