

УДК 519.63:534.13

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ МОНОДИСПЕРСНОЙ ГАЗОВЗВЕСИ В НЕЛИНЕЙНОМ ВОЛНОВОМ ПОЛЕ

А. Л. Тукмаков

Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН, 420111 Казань
E-mail: tukmakov@mail.knc.ru

Изложена методика численного исследования динамики монодисперсной газовзвеси в нелинейном волновом поле акустического резонатора, для описания которой используется модель двухтемпературной двухскоростной среды без учета фазовых переходов, столкновений частиц и возможной коагуляции. Считается, что вязкостью обладает только несущая среда, описываемая системой уравнений Навье — Стокса для сжимаемого газа. Дисперсная фаза описывается уравнениями сохранения массы, компонент вектора импульса и внутренней энергии. Для получения монотонного решения система уравнений, описывающая движение несущей среды и дисперсной фазы в обобщенных подвижных координатах, решается с использованием явного метода Мак-Кормака с расщеплением по пространственным направлениям и консервативной схемы коррекции. Метод может быть применен при исследовании нелинейных колебаний двухфазной смеси в окрестности первых трех собственных частот в плоском канале.

Ключевые слова: акустический резонатор, газовзвесь, уравнения Навье — Стокса, явная схема Мак-Кормака, нелинейные и разрывные колебания, узлы и пучности стоячей волны скорости.

Введение. Интерес к исследованию влияния волновых полей на взвешенные в газе частицы обусловлен возможностью управления их пространственным распределением за счет выбора параметров акустического воздействия. Известно, что частицы, находящиеся в акустическом поле, движутся под влиянием нескольких факторов, к числу которых относятся периодическое изменение вязкости колеблющейся среды, асимметрия движения несущей среды в фазах сжатия и разрежения, акустические течения [1, 2]. Наиболее существенное влияние акустического поля на движение частицы имеет место при возникновении на резонансных частотах газового столба волн разрывного типа. В закрытом канале эти частоты определяются по формуле $f_{nm} = nc/(2mL)$, где c — скорость звука; L — длина канала; числовые параметры n , m определяют порядок резонанса. При незначительной объемной или массовой доле твердой фазы динамику газовзвеси в нелинейных волновых полях допустимо моделировать на основе решения уравнений движения одиночной частицы в несущей среде, не учитывая межфазный обмен импульсом и энергией. С увеличением массовой доли твердой фазы возрастает ее влияние на динамику газовзвеси, поэтому для описания нелинейных эффектов, наблюдающихся при интенсивных колебаниях, необходимо использовать модель, основанную на концепции взаимопроникающих сред [3]. В качестве такой модели выбрана система уравнений бесстолкновительной динамики монодисперсной двухтемпературной двухскоростной среды без фазовых переходов [4–6].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 09-01-97013, 10-01-00098) и частично в рамках госконтракта № 14.740.11.0351.

1. Уравнения движения несущей среды и дисперсной фазы. С учетом межфазного обмена импульсом и энергией система уравнений Навье — Стокса [7], описывающая движение несущей среды, в декартовых координатах в двумерной постановке имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + (1 - \alpha)p - \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho uv - \tau_{xy}) &= -F_x, \\ \frac{\partial (\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho uv - \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v^2 + (1 - \alpha)p - \tau_{yy}) &= -F_y, \\ \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left([e + (1 - \alpha)p - \tau_{xx}]u - \tau_{xy}v + \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left([e + (1 - \alpha)p - \tau_{yy}]v - \tau_{xy}u + \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) = -Q - |F_x|(u - u_1) - |F_y|(v - v_1), \\ p &= (\gamma - 1) \left(e - \rho \frac{u^2 + v^2}{2} \right), \quad e = I + \rho \frac{u^2 + v^2}{2}, \\ \tau_{xx} &= \mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} D \right), \quad \tau_{yy} = \mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} D \right), \quad \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}$$

Здесь ρ — плотность несущей среды; u, v, u_1, v_1 — составляющие скорости несущей среды и дисперсной фазы; e, λ, μ — полная энергия, теплопроводность и вязкость несущей среды; величины F_x, F_y, Q определяются законами межфазного трения и теплообмена; $I = RT/(\gamma - 1)$ — внутренняя энергия газа.

Динамика дисперсной фазы описывается уравнениями сохранения средней плотности, компонент вектора импульса и внутренней энергии [4–6]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_1 u_1)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho_1 v_1)}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial (\rho_1 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_1 u_1^2)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho_1 u_1 v_1)}{\partial y} &= F_x - \alpha \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial (\rho_1 v_1)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_1 u_1 v_1)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho_1 v_1^2)}{\partial y} &= F_y - \alpha \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial e_1}{\partial t} + \frac{\partial (e_1 u_1)}{\partial x} + \frac{\partial (e_1 v_1)}{\partial y} &= \text{Nu} \frac{6\alpha}{(2r)^2} \lambda (T - T_1), \\ \rho_1 &= \alpha \rho_T, \quad e_1 = \rho_1 C_p T_1, \end{aligned}$$

где α, ρ_1, e_1, T_1 — объемная доля, средняя плотность, внутренняя энергия и температура дисперсной фазы; C_p, ρ_T — удельная теплоемкость и плотность частиц твердой фазы; F_x и F_y — составляющие силы трения [4]:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{3}{4} \frac{\alpha}{2r} C_d \rho \sqrt{(u - u_1)^2 + (v - v_1)^2} (u - u_1), \\ F_y &= \frac{3}{4} \frac{\alpha}{2r} C_d \rho \sqrt{(u - u_1)^2 + (v - v_1)^2} (v - v_1), \end{aligned}$$

$$C_d = C_d^0 \psi(\text{M}_{10}) \varphi(\alpha), \quad C_d^0 = 24/\text{Re}_{10} + 4/\text{Re}_{10}^{0,5} + 0,4, \quad \psi(\text{M}_{10}) = 1 + \exp(-0,427/\text{M}_{10}^{0,63}),$$

$$\varphi(\alpha) = (1 - \alpha)^{-2,5}, \quad \text{Re}_{10} = \rho|\bar{V} - \bar{V}_1|2r/\mu < 2 \cdot 10^5, \quad \text{M}_{10} = |\bar{V} - \bar{V}_1|/c \leq 2,$$

$$\text{Nu} = 2 \exp(-\text{M}_{10}) + 0,459 \text{Re}_{10}^{0,55} \text{Pr}^{0,33}, \quad \text{Pr} = \gamma C_p \mu / \lambda.$$

Температура несущей среды определяется из соотношения $T = (\gamma - 1)(e/\rho - 0,5(u^2 + v^2))/R$. Внутренняя энергия взвешенной в газе твердой фазы определяется по формуле $e_1 = \rho_1 C_p T_1$. В уравнение энергии для несущей фазы входят теплопроводность газа λ и тепловой поток, возникающий за счет теплообмена между газом и частицей:

$$Q = 4\alpha^T \pi r^2 (T - T_1) n = 6\alpha \text{Nu} \lambda (T - T_1) / (2r)^2,$$

где $\text{Nu} = 2r\alpha^T/\lambda$; α^T — коэффициент теплообмена между поверхностью частицы и газом; n — концентрация частиц.

2. Уравнения движения монодисперсной двухтемпературной двухскоростной среды в обобщенной подвижной системе координат. Динамическую систему уравнений двухфазной двухскоростной двухтемпературной сплошной среды запишем в безразмерном виде в обобщенной подвижной системе координат. Обозначим через ρ_0 , c , L невозмущенные значения плотности и скорости звука в газе, а также характерный линейный размер задачи. Безразмерные переменные вводятся с помощью следующих соотношений: $\rho = \rho_0 \tilde{\rho}$, $u = c\tilde{u}$, $v = c\tilde{v}$, $p = \rho_0 c^2 \tilde{p}$, $x = L\tilde{x}$, $y = L\tilde{y}$, $t = (L/c)\tilde{t}$, $T = \tilde{T}/(\rho_0 c^3 L)$, $F_x = \tilde{F}_x/(L/(\rho_0 c^2))$, $F_y = \tilde{F}_y/(L/(\rho_0 c^2))$, $Q = \tilde{Q}/(L/(\rho_0 c^3))$, $\tilde{Q}_1 = \tilde{Q}(\rho_0/\rho_{10})(c^2/(C_p T_{10}))$ (знак “ \sim ” соответствует безразмерным переменным). Подставим эти выражения в уравнения неразрывности, сохранения импульса и энергии газа. Для обезразмеривания уравнений движения фракции частиц используем соотношения $\rho_1 = \rho_{10} \tilde{\rho}_1$, $u_1 = c\tilde{u}_1$, $v_1 = c\tilde{v}_1$, $e_1 = (\rho_{10} C_p T_{10}) \tilde{e}$, где $\rho_{10} = \alpha_0 \rho_T$ — невозмущенная плотность фракции частиц; α_0 — начальная объемная доля фракции частиц; T_{10} — температура твердой фазы. В обобщенной подвижной системе координат [7, 8] система уравнений движения двухфазной двухтемпературной двухскоростной монодисперсной смеси в безразмерных переменных принимает вид

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{E}_\xi + \mathbf{F}_\eta = \mathbf{H}, \quad (1)$$

где

$$\mathbf{q} = J^{-1}[\rho, \rho_1, \rho u, \rho v, \rho_1 u_1, \rho_1 v_1, e, e_1]^T,$$

$$\mathbf{E} = J^{-1} \begin{bmatrix} \xi_t \rho + \xi_x \rho u + \xi_y \rho v \\ \xi_t \rho_1 + \xi_x \rho_1 u_1 + \xi_y \rho_1 v_1 \\ \xi_t \rho u + \xi_x (\rho u^2 + p - \tau_{xx}) + \xi_y (\rho u v - \tau_{xy}) \\ \xi_t \rho v + \xi_x (\rho u v - \tau_{xy}) + \xi_y (\rho v^2 + p - \tau_{yy}) \\ \xi_t \rho_1 u_1 + \xi_x (\rho_1 u_1^2) + \xi_y (\rho_1 u_1 v_1) \\ \xi_t \rho_1 v_1 + \xi_x (\rho_1 u_1 v_1) + \xi_y (\rho_1 v_1^2) \\ \xi_t e + \xi_x \left((e + p - \tau_{xx})u - \tau_{xy}v + \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \xi_y \left((e + p - \tau_{yy})v - \tau_{xy}u + \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\ \xi_t e_1 + \xi_x (e_1 u_1) + \xi_y (e_1 v_1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F} = J^{-1} \begin{bmatrix} \eta_t \rho + \eta_x \rho u + \eta_y \rho v \\ \eta_t \rho_1 + \eta_x \rho_1 u_1 + \eta_y \rho_1 v_1 \\ \eta_t \rho u + \eta_x (\rho u^2 + p - \tau_{xx}) + \eta_y (\rho u v - \tau_{xy}) \\ \eta_t \rho v + \eta_x (\rho u v - \tau_{xy}) + \eta_y (\rho v^2 + p - \tau_{yy}) \\ \eta_t \rho_1 u_1 + \eta_x (\rho_1 u_1^2) + \eta_y (\rho_1 u_1 v_1) \\ \eta_t \rho_1 v_1 + \eta_x (\rho_1 u_1 v_1) + \eta_y (\rho_1 v_1^2) \\ \eta_t e + \eta_x \left((e + p - \tau_{xx})u - \tau_{xy}v + \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \eta_y \left((e + p - \tau_{yy})v - \tau_{xy}u + \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\ \eta_t e_1 + \eta_x (e_1 u_1) + \eta_y (e_1 v_1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H} = J^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_x + \alpha \partial p / \partial x \\ -F_y + \alpha \partial p / \partial y \\ F_x \rho_0 / \rho_{10} - \alpha (\partial p / \partial x) \rho_0 / \rho_{10} \\ F_y \rho_0 / \rho_{10} - \alpha (\partial p / \partial y) \rho_0 / \rho_{10} \\ -Q - |F_x|(u - u_1) - |F_y|(v - v_1) + \alpha \partial (pu) / \partial x + \alpha \partial (pv) / \partial y \\ Q_1 \end{bmatrix},$$

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_t \\ \eta_x & \eta_y & \eta_t \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \xi_t = -x_t \xi_x - y_t \xi_y, \quad \eta_t = -x_t \eta_x - y_t \eta_y.$$

Здесь и далее знак “~” для обозначения безразмерных переменных не используется. Давление несущей среды определено выше. Физическая область течения в переменных x, y, t отображается на каноническую расчетную область в переменных ξ, η, t [7, 8]. В правой части системы введены обозначения пространственных производных $\partial / \partial x = \xi_x \partial / \partial \xi + \eta_x \partial / \partial \eta$, $\partial / \partial y = \xi_y \partial / \partial \xi + \eta_y \partial / \partial \eta$. Система (1) в области с изменяющимися границами решалась с использованием явного метода Мак-Кормака второго порядка в обобщенных подвижных координатах $\xi = \xi(x, y, t)$, $\eta = \eta(x, y, t)$ [7–9] и схемы нелинейной коррекции решения [10].

3. Результаты расчетов динамики газозвеси в нелинейном волновом поле.

Рассмотрим динамику двухфазной газозвеси в нелинейном волновом поле в плоском канале (рис. 1), продольные колебания среды в котором возбуждаются поршнем, перемещающимся по гармоническому закону [7]. В численном эксперименте длина канала $L = 1$ м, высота канала $d = 0,06$ м, амплитуда колебаний поршня $a = 0,01$ м. В начальный момент времени газозвесь представляет собой воздух с равномерно распределенной твердой дисперсной фракцией с фиксированной плотностью частиц. В начальный момент времени смесь неподвижна, температуры фаз одинаковы: $T_0 = T_{10}$, плотность воздуха и объемная доля дисперсной фазы α заданы. При $t = 0$ поршень начинает движение по гармоническому закону $x(t) = a \sin(\omega t)$, где ω — одна из заданных собственных частот продольных колебаний несущей среды в плоском канале.

3.1. Динамика газозвеси при различных начальных значениях объемной доли твердой фракции с частицами заданного радиуса. Пусть радиус частиц $r = 50$ мкм, поршень колеблется с первой собственной частотой, начальная температура фаз $T_0 = 343$ К. На рис. 2 приведены x -составляющие скоростей несущей среды и дисперсной фазы при начальной объемной доле фаз $\alpha = 0,0001; 0,0005; 0,0010$. Во всех случаях амплитуда колебаний скорости несущей среды больше амплитуды колебаний скорости твердой фракции. При малой начальной объемной доле твердой фракции колебания несущей среды нелинейны: волна имеет крутой передний и пологий задний фронты (см. рис. 2,а). По мере

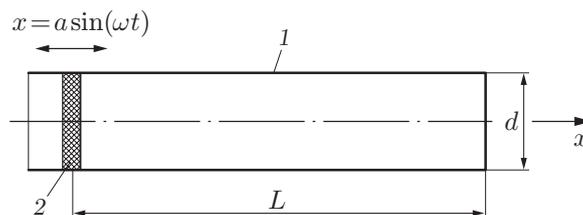


Рис. 1. Схема плоского канала (резонатора):
1 — плоский канал, 2 — поршень

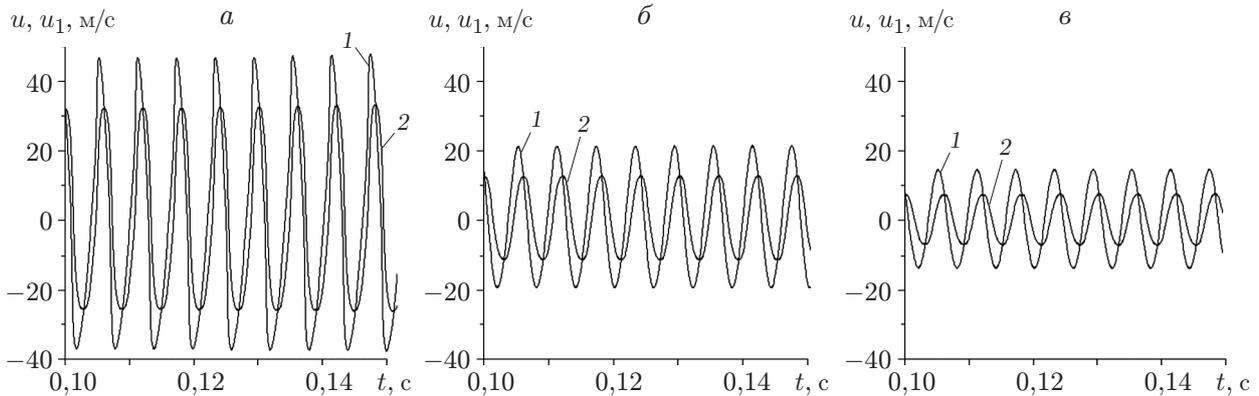


Рис. 2. Зависимость колебаний продольных составляющих векторов скоростей газа (1) и дисперсной фазы (2) от объемной доли твердой фазы:

a — $\alpha = 0,0001$; b — $\alpha = 0,0005$; v — $\alpha = 0,0010$

увеличения объемной доли твердой фазы α амплитуда колебаний скоростей несущей и дисперсной фракций уменьшается, форма колебаний приближается к гармонической (см. рис. 2, б, в). По мере увеличения объемной доли твердой фракции фазовый сдвиг скорости увеличивается: $\Delta\varphi \approx 0,16T_{\text{п}}$ при $\alpha = 0,0001$; $\Delta\varphi \approx 0,18T_{\text{п}}$ при $\alpha = 0,0005$; $\Delta\varphi \approx 0,2T_{\text{п}}$ при $\alpha = 0,0010$ ($T_{\text{п}}$ — период внешнего возмущения).

3.2. *Динамика крупно- и мелкодисперсной газозвесей при одном и том же начальном значении объемной доли твердой фракции.* Пусть начальная объемная доля газозвеси $\alpha = 0,001$. На рис. 3, а–г представлены временные зависимости скоростей газозвесей, образованных частицами радиусом $r = 100$; 1 мкм. Поршень колеблется с третьей собственной частотой [11].

В случае крупнодисперсного аэрозоля амплитуда колебаний скорости несущей среды в 1,5 раза больше, чем в случае мелкодисперсного аэрозоля, и приближенно равна амплитуде колебаний скорости воздуха в отсутствие твердой фракции (см. рис. 3, а). Амплитуда колебаний скорости твердой фракции, отстающих по фазе от колебаний скорости газа на $0,4T_{\text{п}}$, значительно меньше (см. рис. 3, а, в). В случае мелкодисперсной газозвеси между колебаниями скоростей твердой фракции и несущей среды имеется незначительный фазовый сдвиг (см. рис. 3, б, г). Аналогичный характер имеют колебания температуры газа и твердой фракции (см. рис. 3, д, е). В крупнодисперсной смеси амплитуды колебаний температур несущей среды и дисперсной фазы существенно различаются: изменение температуры газа за период превышает 30 К, в то время как изменение температуры твердой фракции за период составляет не более 5 К. При этом фазовый сдвиг колебаний температуры твердой фракции относительно колебаний температуры газа составляет приблизительно $0,4T_{\text{п}}$. В мелкодисперсной газозвеси температуры фаз близки, фазовый сдвиг колебаний температур практически отсутствует.

3.3. *Пространственное распределение плотности и температуры в крупно- и мелкодисперсной газозвеси, возникающее в процессе дрейфа твердой фракции в нелинейном волновом поле.* При колебаниях несущей среды частицы, находящиеся во взвешенном состоянии, дрейфуют, т. е. вследствие несимметрии волновых фронтов и наличия акустического течения совершают перемещения за период изменения внешнего поля [1, 2, 9]. Характер дрейфа легких и тяжелых частиц различается. Как легкие, так и тяжелые частицы переносятся акустическим потоком, возникающим при периодических колебаниях вязкой среды. В то же время передача импульса от несущей среды к частице при несимметрии волновых фронтов в фазах сжатия и разрежения зависит от инерционности частицы.

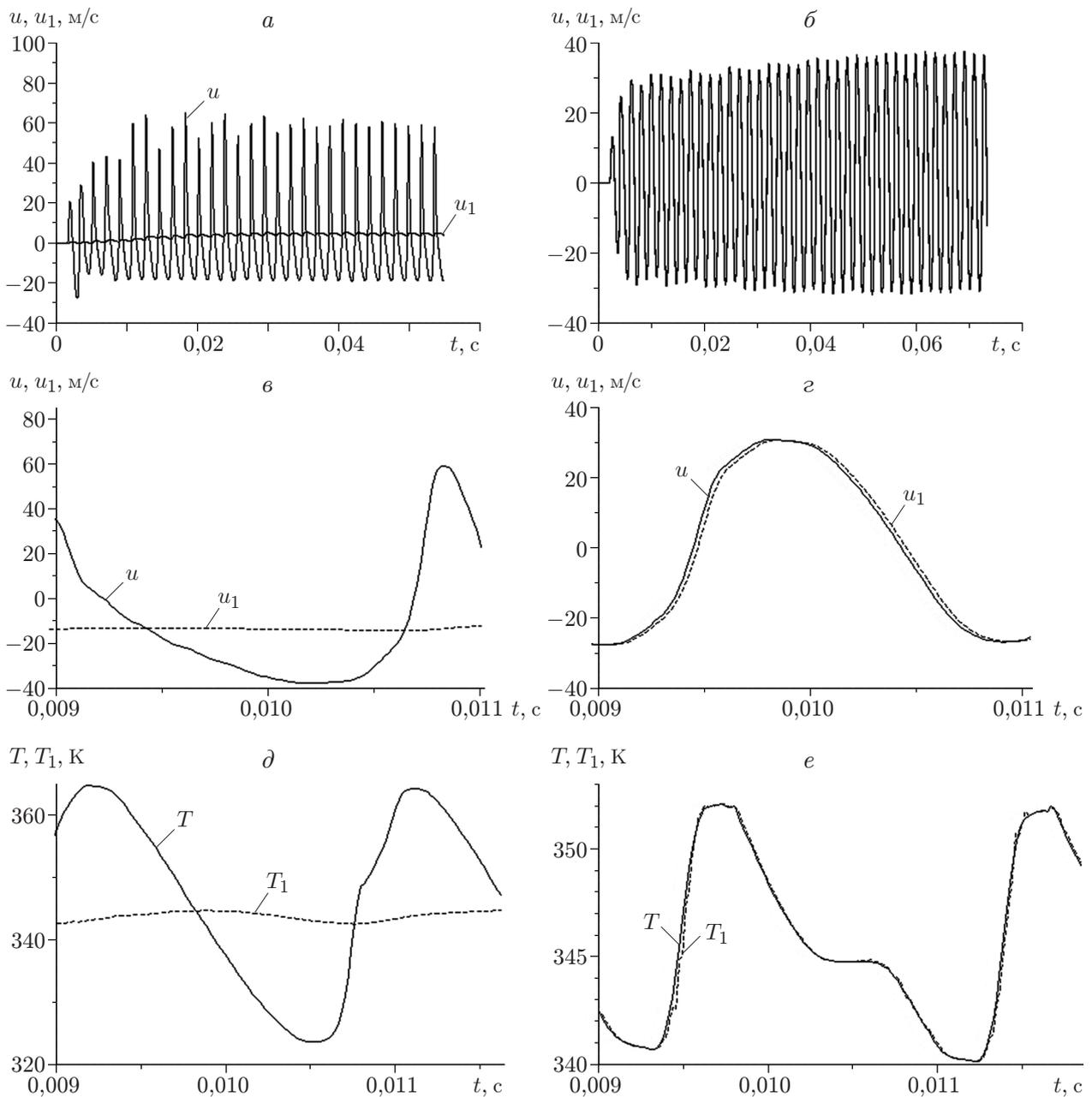


Рис. 3. Колебания продольных составляющих вектора скорости и температуры газозвеси:

a, *в*, *д* — крупнодисперсная газозвесь ($r = 100$ мкм), *б*, *г*, *е* — мелкодисперсная газозвесь ($r = 1$ мкм); *a*, *в* — скорости газа и твердой фракции крупнодисперсной газозвеси в разных масштабах; *б*, *г* — скорости газа и твердой фракции мелкодисперсной газозвеси в разных масштабах; *д* — температуры газа и крупнодисперсной твердой фракции; *е* — температуры газа и мелкодисперсной твердой фракции

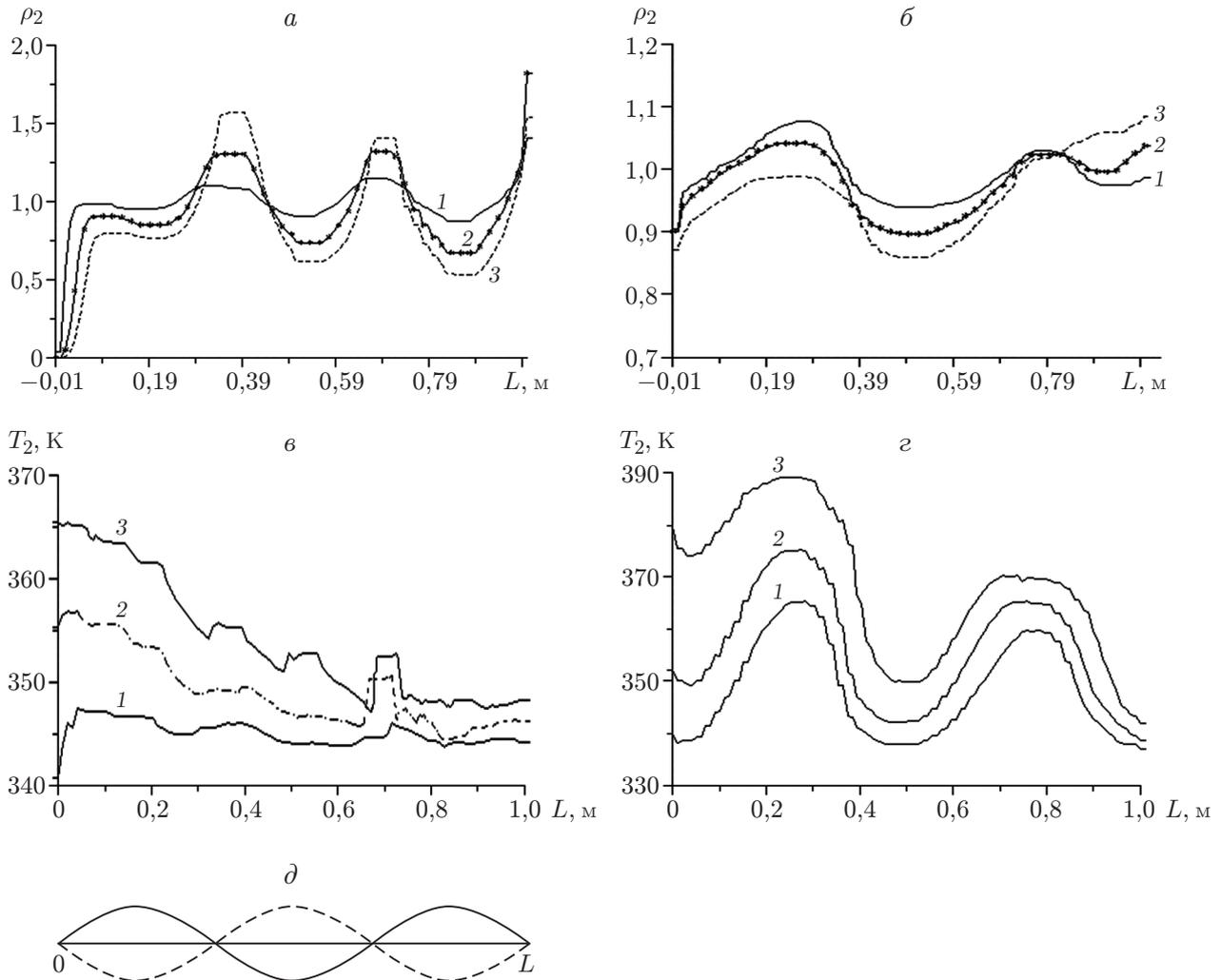


Рис. 4. Распределения плотности и температуры крупно- и мелкодисперсной твердой фракции на оси канала в различные моменты времени:

a, б — средняя плотность (*a* — $r = 100$ мкм, *б* — $r = 1$ мкм); *в, г* — температура твердой фракции (*в* — $r = 100$ мкм, *г* — $r = 1$ мкм); *д* — распределение узлов и пучностей стоячей волны скорости газа (сплошная линия — падающая волна, штриховая — отраженная волна)

Если волна не является разрывной, а частица достаточно легкая, то она приобретает скорость, равную скорости несущей среды в фазе сжатия (тем более в фазе разрежения) при незначительном суммарном перемещении за период. Более тяжелая частица может не успеть переместиться за внешней средой в быстропротекающей фазе сжатия, но перемещается в более медленной фазе разрежения. В этом случае имеют место ненулевое среднее за период перемещение и дрейфовая скорость. На рис. 4 представлены распределения средней плотности крупно- и мелкодисперсной твердой фракции в различные моменты времени при возбуждении колебаний на третьей собственной частоте газового столба. Средняя плотность крупнодисперсной фракции увеличивается вблизи узлов стоячей волны поля скорости (см. рис. 4, *a*). Максимумы плотности мелкодисперсной фракции смещены за счет переноса более легких частиц акустическим потоком (см. рис. 4, *б*). В целом обусловленное дрейфом частиц в нелинейном волновом поле пространственное распределение

крупно- и мелкодисперсной твердой фракции, полученное в расчетах на основе уравнений двухфазной двухскоростной двухтемпературной модели, качественно согласуется с распределением частиц, полученным по модели одиночных частиц [9]. Температура твердой фракции в крупнодисперсной смеси достигает наибольшего значения вблизи поршня и понижается по направлению к закрытому концу канала. В среднем монотонное уменьшение температуры прекращается вблизи узла стоячей волны скорости газа, расположенного на расстоянии от закрытого конца, равном половине длины волны, где возникает локальный максимум температуры (см. рис. 4,в). Распределение температуры мелкодисперсной фракции хорошо коррелирует с распределением ее средней плотности (см. рис. 4,г).

Анализ приведенных результатов позволяет сделать вывод, что при заданной объемной доле дисперсной фракции наименее существенное ее влияние на динамику несущей фазы наблюдается в крупнодисперсной смеси. В этом случае для описания процесса дрейфа дисперсной фазы может быть применена модель одиночных частиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Медников Е. П.** Акустическая коагуляция и осаждение аэрозолей. М.: Изд-во АН СССР, 1963.
2. **Зарембо Л. К.** Нелинейная акустика / Л. К. Зарембо, В. И. Тимошенко. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.
3. **Рахматулин Х. А.** Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20, № 2. С. 184–195.
4. **Кутушев А. Г.** Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах. СПб.: Недра. С.-Петербург. отд-ние, 2003.
5. **Ивандаев А. И., Кутушев А. Г., Нигматулин Р. И.** Газовая динамика многофазных сред. Ударные и детонационные волны в газовзвесьях. М.: ВИНТИ, 1981. С. 209–287. (Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа; Т. 16).
6. **Стернин Л. Е.** Двухфазные моно- и полидисперсные течения газа с частицами. М.: Машиностроение, 1980.
7. **Флетчер К.** Вычислительные методы в динамике жидкостей. М.: Мир, 1991. Т. 2.
8. **Steger J. L.** Implicit finite-difference simulation of flow about arbitrary two-dimensional geometries // AIAA J. 1978. V. 16, N 7. P. 679–686.
9. **Тукмаков А. Л.** Численное моделирование процесса волновой сепарации твердых частиц при резонансных колебаниях газа в закрытой трубе // Акуст. журн. 2009. Т. 55, № 3. С. 342–349.
10. **Жмакин А. И., Фурсенко А. А.** Об одной монотонной разностной схеме сквозного счета // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1980. Т. 20, № 4. С. 1021–1031.
11. **Pgamov M. A., Zaripov R. G., Galiullin R. G., Repin V. B.** Nonlinear oscillations of a gas in a tube // Appl. Mech. Rev. 1996. V. 49, N 3. P. 137–154.

Поступила в редакцию 11/III 2010 г.