

УДК 539.374

## УСЛОВИЯ РАЗВИТИЯ КАВИТАЦИИ В СКЛЕРОНОМНЫХ СРЕДАХ

С. В. Стебновский

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

В рамках упруговязкопластической модели построено энергетическое неравенство, определяющее условие развития пузырьковой кавитации в склерономных средах: от жидкопластических (битумы, краски, гели) до твердопластических (свинец, алюминий, медь и др.) при их импульсном растяжении. Получено соотношение, позволяющее определять время релаксации отрицательного давления в процессе роста в среде кавитационных пор. С учетом полученных ранее условий развития пузырьковой кавитации в релаксирующем поле отрицательного давления в жидкостях, нагружаемых ударной волной, этот результат позволяет выделить класс конденсированных сред, способных кавитировать при импульсном нагружении.

Известно, что на динамику разрушения конденсированных сред существенное влияние оказывает развитие в них на стадии разгрузки пузырьковой кавитации. Так, рост пузырьков (или пор) приводит к релаксации растягивающих напряжений. Это обстоятельство даже при интенсивном ударно-волновом нагружении блокирует хрупкое разрушение образца: его фрагментизация происходит в режиме вязкого разрушения. В работах [1, 2] экспериментально установлено, что при объемном импульсном растяжении образца (на стадии разгрузки после ударно-волнового нагружения) развитие неограниченной кавитации возможно как в маловязких жидкостях, так и в высококонцентрированных эмульсиях, суспензиях (пастах) и гелях, которые имеют жидкую маловязкую матрицу. В то же время показано, что в образцах высоковязких ньютоновских жидкостей при аналогичных условиях нагружения развития видимой кавитации не наблюдается. Согласно [3, 4] динамическое разрушение пластических металлов сопровождается ростом пор почти сферической формы. В связи с этим представляет интерес определение условий, которым должны удовлетворять параметры нагружения, чтобы в рассматриваемых средах развивался кавитационный процесс заданной интенсивности.

Ранее в [5] определены условия развития пузырьковой кавитации в жидких средах произвольной вязкости при их объемном импульсном растяжении, обусловленном ударно-волновым нагружением. В настоящей работе определяются условия развития кавитации в случае импульсного нагружения образцов склерономных упруговязкопластических сред. При напряжении сдвига  $\tau$  ниже порогового значения  $\tau_*$ , соответствующего началу пластического течения, эти среды ведут себя как упругое тело Гука, а при  $\tau > \tau_*$  переходят в вязкопластическое состояние. (К таким средам относятся пластические металлы, битумы, асфальты, краски, гели и др.) Будем считать склерономную среду кавитирующей при заданных параметрах ударно-волнового нагружения, если на стадии ее разгрузки в зоне растягивающих напряжений объемная концентрация кавитационных полостей  $\alpha$  возрастает не менее чем на порядок по сравнению с начальным значением  $\alpha_0$ .

1. Поскольку все конденсированные среды обладают объемной упругостью, реологическую модель их объемного растяжения можно представить следующим образом. Если бы среда имела идеально однородную структуру (рис. 1, *a*), то ее реакцию на объемную деформацию  $\varepsilon_V$  (растяжение) можно было бы описать механической моделью, представленной на

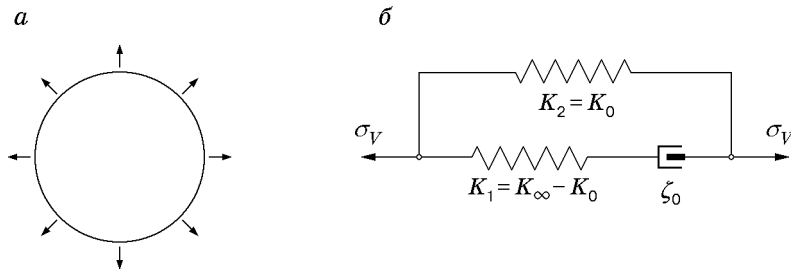


Рис. 1

рис. 1, б. В этом случае при быстром объемном растяжении в среде нарушается термодинамическое равновесие, и его восстановление происходит за некоторое время  $T_0$ . При этом в процессе восстановления равновесия давление, противодействующее изменению объема среды, уменьшается, и, таким образом, уменьшается модуль объемной упругости от максимального динамического значения  $K_\infty$  до статического  $K_0$ . Термодинамическое равновесие восстанавливается вследствие перестройки структуры среды на молекулярном уровне, что сопровождается частичной диссипацией упругой энергии среды, обусловленной ее объемной вязкостью  $\zeta_0$  (в механической модели разгрузка пружины  $K_1$  на поршень  $\zeta_0$ ). Следовательно, время релаксации растягивающего напряжения от начального значения  $\sigma_V(0)$  до равновесного  $\sigma_V^0$  в этом случае можно представить в виде зависимости  $T_0 = \zeta_0 / (K_\infty - K_0)$ . Если  $\sigma_V^0$  ниже порогового значения объемной текучести среды  $\sigma_V^*$  (определяемого в данном случае межмолекулярными или межатомными связями), а максимальное сдвиговое напряжение  $(\sigma_i - \sigma_j)/2 = \tau_m < \tau_*$  ( $\sigma_i, \sigma_j$  — главные значения тензора растягивающих напряжений,  $\tau_*$  — предел текучести), то на стадии  $t > T_0$  при  $\varepsilon_V = \text{const}$  в идеально однородной среде будет бесконечно долго сохраняться напряжение  $\sigma_V^0 = K_0 \varepsilon_V$ .

Реальные конденсированные среды (рис. 2, а) всегда имеют дефекты структуры: жидкости содержат кавитационные зародыши, а склерономные среды — дислокации и микропоры. Вследствие этого в таких средах процесс релаксации упругих напряжений происходит практически при любых значениях  $\tau_m$ . В жидких средах  $\tau_*/P_\infty \ll 1$ , где  $P_\infty$  — гидростатическое давление, и рост кавитационного зародыша, т. е. дивергентное течение жидкости, определяющее релаксацию растягивающего напряжения, начинается при поло-

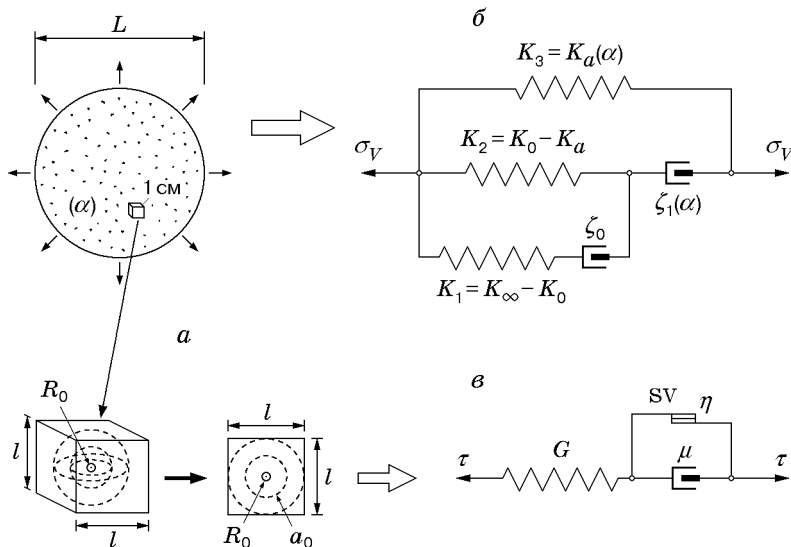


Рис. 2

жительной разности давлений в пузырьке и жидкой матрице (с учетом поверхностного натяжения). В склерономных средах при  $\tau_m < \tau_*$  движение вакансий носит диффузный характер, и релаксация протекает в режиме ползучести; при  $\tau_m > \tau_*$  происходит надбарьерное скольжение вакансий, определяющее режим пластической деформации среды и соответственно релаксацию напряжения.

С учетом изложенного выше сформулируем постановку задачи об определении условий развития кавитации в склерономных средах и времени релаксации растягивающих напряжений. Полагаем, что образец исследуемого материала, имеющий для определенности сферическую или цилиндрическую симметрию, содержит монодисперсные, равномерно распределенные по объему образца микропоры радиуса  $R_0$ . Начальная объемная концентрация микропор  $\alpha_0$ , их счетная концентрация  $n = 3\alpha_0/(4\pi R_0^3)$ . Выделим в образце единичный объем кубической формы ( $1 \times 1 \times 1$  см) и разобьем его на  $n$  одинаковых кубических ячеек с микропорой в центре каждой ячейки (рис. 2,а). Длина ребра ячейки  $l = n^{-1/3} = R_0[4\pi(3\alpha_0)^{-1}]^{1/3}$ , так что в силу малости  $\alpha_0$   $L \gg l \gg R_0$ , где  $L$  — характерный размер образца. В среде могут протекать физические процессы на трех пространственных масштабах. Релаксация растягивающих напряжений, являющаяся процессом установления термодинамического равновесия в макроскопической физической системе, протекает на  $L$ -масштабе, изменение размеров пор — на  $l$ -масштабе, пластическая деформация материала в окрестности каждой поры вследствие движения дислокаций — на масштабе межатомных или межмолекулярных взаимодействий.

На рис. 2,б представлена схема механической модели, соответствующей макроскопическим процессам на  $L$ -масштабе. Предположим, что исследуемый образец нагружается одномерной коаксиальной, расходящейся из центра его симметрии ударной волной (УВ) типа  $P(\hat{r}, t) = P_*(\hat{r}, 0) \exp(-t/\lambda(\hat{r}))$ , где  $\hat{r}$  — расстояние от центра симметрии образца;  $P_*(\hat{r}, 0)$  — давление во фронте УВ в момент его удаления от центра симметрии на расстоянии  $\hat{r}$ ;  $\lambda(\hat{r})$  — постоянная времени спада давления за фронтом УВ на фиксированном расстоянии  $\hat{r}$ . Тогда после выхода фронта УВ на свободную поверхность образца на стадии разгрузки происходит перемещение свободной поверхности и распространение в образец сходящейся к центру его симметрии волны разрежения, в результате чего возникает объемная деформация образца  $\varepsilon_V$  (на модели растяжение пружин  $K_1, K_2, K_3$ ) и формируется поле растягивающих напряжений  $\sigma_V = (K_1 + K_2 + K_3)\varepsilon_V = K_\infty\varepsilon_V$ . Далее при сохранении  $\varepsilon_V$  постоянной происходит частичная релаксация напряжения вследствие перехода среды в состояние термодинамического равновесия за время  $T_0 = \zeta_0(K_\infty - K_0)^{-1}$ , и напряжение уменьшается до значения  $\sigma_V = (K_2 + K_3)\varepsilon_V = K_0\varepsilon_V$  (обычно для склерономных сред  $(K_\infty - K_0)K_0^{-1} \ll 1$ ). Затем, поскольку на  $l$ -масштабе в окрестности поры возникают сдвиговые напряжения  $\tau = \sigma_i - \sigma_j$ , при  $\tau_m > \tau_*$  среда переходит в вязкопластическое состояние и начинается процесс расширения пор. На механической модели этого процесса (рис. 2,в) открывается элемент Сен-Венана SV и пружина  $G$ , соответствующая сдвиговой упругости среды, разгружается на поршень  $\mu$ , характеризующий ее пластическую вязкость, которая в общем случае зависит от скорости деформации, концентрации вакансий, температуры и других физических параметров процесса.

Сформулируем реологическое уравнение состояния, соответствующее сдвиговому деформированию упруговязкопластической среды в окрестности поры. На основании механической модели среды (рис. 2,в), представляющей собой последовательное соединение механических моделей тел Гука и Бингама, суммарное значение девиатора тензора деформации  $e_{ij}$  можно записать в виде

$$e_{ij} = \frac{\tilde{\sigma}_{ij}}{2G} + \tilde{\sigma}_{ij} \left[ 2(\mu + \eta) \frac{\partial}{\partial t} \right]^{-1},$$

откуда

$$\dot{\tilde{\sigma}}_{ij} + \frac{G}{\mu + \eta} \tilde{\sigma}_{ij} = 2G\dot{e}_{ij}. \quad (1)$$

Здесь  $\tilde{\sigma}_{ij}$  — девиатор тензора напряжений;  $\eta$  — коэффициент эффективной вязкости среды при переходе интенсивности касательного напряжения  $\tau_i = (\tilde{\sigma}_{ij}\tilde{\sigma}_{ij}/2)^{1/2}$  через значение предельного напряжения сдвига  $\tau_*$ ;  $\mu$  — коэффициент сдвиговой вязкости среды при  $\tau_i > \tau_*$ , т. е. в режиме пластического течения. Так как при достижении пластическим элементом  $\eta$  сложной механической модели предельного напряжения сдвига [6] расположенный параллельно ему вязкий элемент  $\mu$  не оказывает сопротивления деформированию, полагаем в (1)  $\mu = 0$  и, домножив это уравнение на  $\tilde{\sigma}_{ij}$  с учетом  $\tilde{\sigma}_{ij}\dot{\tilde{\sigma}}_{ij} = 0$ , а также условия Мизеса  $\tilde{\sigma}_{ij}\tilde{\sigma}_{ij} = 2\tau_*^2$ , получим  $\eta = \tau_*(2\dot{e}_{ij}\dot{e}_{ij} - \dot{e}_{ij}\dot{\tilde{\sigma}}_{ij}G^{-1})^{-1/2}$  или с учетом выражения для обобщенной скорости деформации сдвига  $\dot{e}_i = (2\dot{e}_{ij}\dot{e}_{ij})^{1/2}$   $\eta = \tau_*\{\dot{e}_i[1 - \dot{\tilde{\sigma}}_{ij}/(2G\dot{e}_{ij})]^{1/2}\}^{-1}$ . Подставляя последнее выражение в (1), получим общий вид реологического уравнения для сдвигового деформирования среды при  $\tau_i > \tau_*$

$$\tilde{\sigma}_{ij} + \left[ \mu + \tau_*\dot{e}_i^{-1} \left( 1 - \frac{\dot{\tilde{\sigma}}_{ij}}{2G\dot{e}_{ij}} \right)^{-1/2} \right] \frac{\dot{\tilde{\sigma}}_{ij}}{G} = 2\tau_*\dot{e}_{ij}\dot{e}_i^{-1} \left( 1 - \frac{\dot{\tilde{\sigma}}_{ij}}{2G\dot{e}_{ij}} \right)^{-1/2} + 2\mu\dot{e}_{ij} \quad (2)$$

или в случае чистого сдвига

$$\tau + \left[ \mu + \tau_* \left( \dot{\varepsilon}_\tau^2 - \frac{\dot{\tau}\dot{\varepsilon}_\tau}{2G} \right)^{-1/2} \frac{\dot{\varepsilon}_\tau}{|\dot{\varepsilon}_\tau|} \right] \frac{\dot{\tau}}{G} = \tau_* \left( 1 - \frac{\dot{\tau}}{2G\dot{\varepsilon}_\tau} \right)^{-1/2} \frac{\dot{\varepsilon}_\tau}{|\dot{\varepsilon}_\tau|} + \mu\dot{\varepsilon}_\tau, \quad (3)$$

где  $\dot{\varepsilon}_\tau$  — скорость деформации чистого сдвига.

При  $\tau < \tau_*$  элемент Сен-Венана SV закрыт, следовательно,  $\eta = \infty$  и уравнения состояния (2), (3) примут вид  $\tilde{\sigma}_{ij} = 2Ge_{ij}$  и  $\tau = G\varepsilon_\tau$ , что соответствует случаю упругого тела Гука.

При  $\tau > \tau_*$  элемент SV открыт и дальнейшего растяжения пружины на механической модели не происходит: деформация осуществляется только вследствие перемещения поршня  $\mu$ , что соответствует вязкопластическому течению среды. Следовательно, при  $\tau > \tau_*$  элемент  $G$  на механической модели не деформируется, и, полагая в (2), (3)  $G = \infty$ , получим уравнение состояния вязкопластической среды в окрестности пор  $\tilde{\sigma}_{ij} = 2\tau_*\dot{e}_{ij}/\dot{e}_i + 2\mu\dot{e}_{ij}$  или

$$\tau = \tau_* \frac{\dot{\varepsilon}_\tau}{|\dot{\varepsilon}_\tau|} + \mu\dot{\varepsilon}_\tau = \tau_* \operatorname{sign} \dot{\varepsilon}_\tau + 2\mu\dot{\varepsilon}_\tau. \quad (4)$$

Поскольку при объемном растяжении среды тензор напряжений  $\sigma_{ij}$  в любой системе координат имеет диагональный вид, для сферической системы координат  $(r, \theta, \varphi)$ , начало которой совмещено с центром поры, уравнение (4), являющееся определяющим уравнением среды в режиме вязкопластического течения в окрестности сферической поры, примет вид

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = -\tau_* + 2\mu \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right). \quad (5)$$

Здесь  $u$  — радиальная скорость пластического течения среды.

**2.** На основании изложенного выше задачу об определении условий роста поры, содержащейся в  $i$ -й ячейке, будем рассматривать на  $l$ -масштабе в следующей постановке. Центр поры совпадает с центром ячейки; расстояние от центра ячейки до центра симметрии образца  $\hat{r}_i$ . Полагаем, что  $P_1$  — давление газа в микропоре радиусом  $R_0$ ; к материалу ячейки приложено отрицательное давление  $-\tilde{P}_i^0$  (временем установления давления  $-\tilde{P}_i^0$  на всем масштабе ячейки пренебрегается). Кроме того, ко всему объему образца приложено

гидростатическое давление  $P_\infty > 0$ , на поверхности поры действует также капиллярное давление  $P_L = 2\gamma R^{-1}$ , где  $\gamma$  — коэффициент межфазного натяжения;  $R$  — текущий радиус поры. Поскольку целью данной работы является определение условий роста пор, из анализа исключается диапазон динамических нагружений, в котором на стадии разгрузки модуль давления  $|\tilde{P}_i^0|$  настолько большой, что вся среда в ячейке заведомо переходит в вязкопластическое состояние и рост поры происходит практически в режиме роста пузырька в высоковязкой жидкости. Поэтому будем рассматривать случаи предельно малых значений  $|\tilde{P}_i^0|$ , при которых еще возможно вязкопластическое течение среды и рост пор.

С учетом того что  $R_0 \ll l$ , используя решение задачи о распределении напряжений в упругой среде со сферической полостью [7], для граничных условий

$$\sigma_{rr}|_{r \rightarrow \infty} = -(-\tilde{P}_i^0 + P_\infty), \quad \sigma_{rr}|_{r=R} = -(-P_1 + 2\gamma/R) \quad (6)$$

получим

$$\sigma_{rr} = P_{i0} + P'_i/\bar{r}^3, \quad \sigma_{\theta\theta} = P_{i0} - P'_i/(2\bar{r}^3), \quad (7)$$

где  $P_{i0} = \tilde{P}_i^0 - P_\infty$ ;  $P'_i = -\tilde{P}_i^0 - P_1 + P_\infty + 2\gamma R^{-1}$ ;  $\bar{r} = rR^{-1}$ .

Согласно условию Треска [8] в среде будет иметь место пластическое течение, если

$$\tau_m = 0,5(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}) \geq \tau_*. \quad (8)$$

После подстановки (7) в (8) получим условие пластического течения в окрестности поры

$$\tau_m = \frac{3}{4\bar{r}^3} \left( \tilde{P}_i^0 + P_1 - P_\infty - \frac{2\gamma}{R} \right) \geq \tau_*. \quad (9)$$

Если (9) выполняется и при  $\bar{r} > 1$ , то внешний радиус  $r = a$  сферического вязкопластического слоя (см. рис. 2,а), в котором возможно расширение поры, определяется из (9) выражением

$$a = R(3\hat{P}_i/(4\tau_*))^{1/3}, \quad (10)$$

где  $\hat{P}_i = -P'_i = \tilde{P}_i^0 + P_1 - P_\infty - P_L$ . Из (9) и (10) следует, что если для  $\hat{P}_i = \text{const}$  при  $R = R_0$  условие пластического течения выполняется в слое  $R_0 \leq r \leq a_0$ , то  $\tau_m(aR^{-1}) \geq \tau_*$  при любом  $R > R_0$ , поскольку при  $\hat{P}_i = \text{const}$  также и  $aR^{-1} = \text{const}$ , т. е. с увеличением  $R$  растет и  $a$ . В общем случае, если  $\hat{P}_i = \psi(\hat{t})$ , то  $aR^{-1} = [3(4\tau_*)^{-1}]^{1/3} \hat{P}_i^{1/3}(\hat{t})$ , поэтому в случае убывания функции  $\psi(\hat{t}) > 0$  при  $\hat{P}_i \rightarrow 4\tau_*/3$  радиус  $a \rightarrow R$ , т. е. толщина зоны пластичности стремится к нулевому значению и пора “вмораживается” в упругую среду. Здесь  $\hat{t}$  — время, отсчитываемое с момента прихода в  $i$ -ю ячейку фронта волны разрежения. Отметим, что в практически несжимаемой вязкопластической среде рост пор возможен вследствие наличия дефектов структуры среды.

Уравнение движения вязкопластической среды в слое  $R \leq r \leq a$  со средней плотностью  $\rho$  имеет вид

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \sigma_{rr} + \frac{2(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})}{r}. \quad (11)$$

В силу сферической симметрии движение среды будет безвихревым, и поэтому с учетом ее несжимаемости из уравнения неразрывности получим соотношение для поля скоростей в слое  $R \leq r \leq a$

$$u = \dot{R}R^2/r^2. \quad (12)$$

Подставляя (5) и (12) в уравнение (11) и интегрируя его по вязкопластическому слою от  $R$  до  $a$  с учетом граничных условий (6), первое из которых на границе слоя  $r = a$  примет вид  $\sigma_{rr}(r) = \tilde{P}_i^0 - P_\infty$ , получим уравнение роста поры в слое  $R \leq r \leq a$

$$(1 - \beta_0)R\ddot{R} + \left[ \frac{3}{2} - 2\left(1 - \frac{\beta_0^3}{4}\right)\beta_0 \right] \dot{R}^2 + \frac{4\mu}{\rho} (1 - \beta_0^3) \frac{\dot{R}}{R} = \frac{\hat{P}_i}{\rho} \left( 1 - \frac{2\tau_*}{\hat{P}_i} \ln \beta_0^{-1} \right), \quad (13)$$

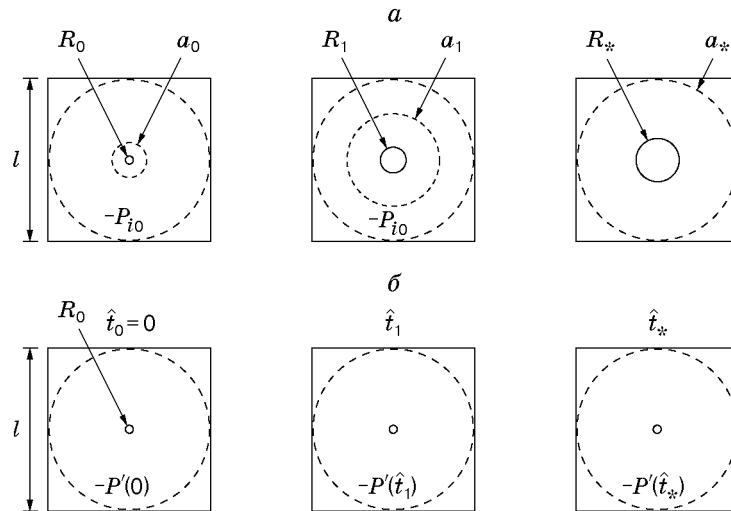


Рис. 3

где  $\beta_0 = R_0 a_0^{-1} = R a^{-1}$  при  $\hat{P}_i = \text{const}$  определяется из (10). Согласно (13), для того чтобы пора расширилась до некоторого заданного значения радиуса  $R_1$ , поле отрицательного давления в ячейке должно удовлетворять условию

$$\hat{P}_i(\hat{t}) \geq 2\tau_* \ln \beta_0^{-1}, \quad (14)$$

по крайней мере, при  $0 \leq \hat{t} < \hat{t}_1^0$  ( $\hat{t}_1^0$  — время расширения поры до заданного радиуса). Легко проверить, что условие (14) выполняется всегда, если справедливо неравенство (9).

Следовательно, процессы, протекающие под действием отрицательного давления в упруговязкопластической среде, содержащей микропоры, можно представить на  $l$ - и  $L$ -масштабах следующим образом. В начальный момент времени  $\hat{t} = 0$  под действием отрицательного давления в  $i$ -й ячейке формируется поле упругих растягивающих напряжений  $-P_{i0}$  (рис. 3, а). При этом свободную удельную энергию среды можно определить из известного соотношения  $f = 0,5\sigma_{ik}e_{ik}$ , которое с учетом изотропности среды и обобщенного закона Гука  $e_{ik} = [(1 + \nu)\sigma_{ik} - \nu\sigma_{ll}\delta_{ik}]E^{-1}$  сводится к виду

$$f = 0,5(1 + \nu)[\sigma_{ik}^2 - \nu\sigma_{ll}^2(1 + \nu)^{-1}]E^{-1}.$$

Здесь  $E$ ,  $\nu$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно. С учетом  $\sigma_{ik}^2 = I_1^2 - 2I_2$ ,  $\sigma_{ll}^2 = I_1^2$ , где  $I_1, I_2$  — первый и второй инварианты тензора  $\sigma_{ik}$ , причем в случае объемного растяжения среды  $I_2 = 0$ , последнее равенство, используя (7), перепишем в виде

$$f = 0,5(\sigma_{rr}^2 + 2\sigma_{\theta\theta}^2)E^{-1} = 1,5P_{i0}^2[1 + 0,5(1 + \xi)^2\bar{r}^{-6}]E^{-1}, \quad (15)$$

где  $\xi = (P_1 - P_L)(\tilde{P}_i^0 - P_\infty)^{-1}$ .

Отметим, что в случае твердопластических материалов  $\tau_* \gg P_L$ , а следовательно, согласно (14)  $\tilde{P}_i^0 \gg P_L$ , т. е.  $\xi \ll 1$ . Для жидкопластических сред условие (14) выполняется начиная со значений  $\tilde{P}_i^0$  порядка  $P_\infty$ , т. е. в этих средах возможны случаи, когда  $\xi$  порядка единицы.

В начальный момент времени упругая свободная энергия ячейки  $F_0$  сосредоточена в сферическом слое  $R_0 \leq r \leq 0,5l$ , где  $l$  — диаметр вписанной в кубическую ячейку сферы (см. рис. 2, а и 3, а). Поэтому, интегрируя (15) по объему этого слоя в пределах  $1 \leq \bar{r} \leq 0,5lR_0^{-1} = (2R_0\sqrt[3]{n})^{-1} = k$ , получим выражение

$$F_0(\hat{t}) = 4\pi R_0^3 \int_1^k f(\bar{r})\bar{r}^2 d\bar{r} = \pi(1 - 8nR_0^3)[(1 + \xi)^2 + (4\pi nR_0^3)^{-1}]E^{-1}R_0^3P_{i0}^2, \quad \hat{t} = 0,$$

которое после замены  $E = 9GK_0(3K_0 + G)^{-1}$ , где  $K_0$  — модуль объемной упругости матрицы, сводится к виду

$$F_0(\hat{t}) = \frac{\pi R_0^3}{3} (1 - 8nR_0^3) \left[ (1 + \xi)^2 + \frac{1}{4nR_0^3} \right] \left( \frac{1}{3K_0} + \frac{1}{G} \right) P_{i0}^2, \quad \hat{t} = 0. \quad (16)$$

Затем начинается рост поры в образованной в ее окрестности зоне пластического течения  $R_0 < r \leq a_0$  (рис. 3, а), где  $a_0$  определяется из (10). При этом пластическая зона граничит с областью  $a_0 < r < 0,5l$ , в которой среда продолжает находиться в упругодеформированном состоянии. Далее в процессе роста поры зона пластического течения расширяется и соответственно уменьшается толщина “невозмущенного” упругодеформированного слоя, в котором отрицательное давление сохраняет постоянное значение  $-P'$ . Наконец, в некоторый момент времени  $\hat{t}_*$  толщина упругодеформированного слоя уменьшается до нуля: граница зоны пластического течения выходит на границу ячейки, т. е. величина  $a$  достигает значения  $a_* = 0,5l = 0,5n^{-1/3}$ . С этого момента на границе  $a_*$  уже не выполняется условие постоянства давления. По аналогии с (16) построим соотношение, определяющее значение упругой свободной энергии в произвольный момент времени  $0 < \hat{t}_1 < \hat{t}_*$  в слое  $a_1 < r \leq a_*$ . Интегрируя  $f(\bar{r})$  по  $\bar{r}$  в диапазоне  $a_1 R_0^{-1} = b_1 \beta_0^{-1} < \bar{r} < a_* R_0^{-1} = (2R_0 n^{1/3})^{-1}$ , получим

$$F(\hat{t}_1) = \frac{\pi R_0^3}{3} \left[ (1 + \xi)^2 \left( \frac{\beta_0^3}{b_1^3} - 8nR_0^3 \right) + \frac{1 - 8nR_0^3 b_1^3 \beta_0^{-3}}{4nR_0^3} \right] \left( \frac{1}{3K_0} + \frac{1}{G} \right) P_{i0}^2. \quad (17)$$

Здесь  $b_1$  определяется из решения на отрезке  $0 \leq \hat{t} \leq \hat{t}_*$  уравнения (13) с учетом того, что  $\beta_0^3 \ll 1$  и  $\hat{P}_i(\hat{t}) = \tilde{P}_i^0 [U(\hat{t}) - U(\hat{t} - \hat{t}_*)] + P_1 - P_\infty - P_L$  ( $U$  — единичная функция), записанного в виде

$$b\ddot{b} + \frac{3 - 4\beta_0}{2(1 - \beta_0)} \dot{b}^2 + h \frac{\dot{b}}{b} = Qh(1 - S), \quad (18)$$

где  $h = 4\mu/[\rho R_0^2(1 - \beta_0)]$ ;  $Q = \hat{P}_i/(4\mu)$ ;  $D = 2\tau_*/\hat{P}_i$ ;  $S = D \ln \beta_0^{-1}$ . Качественный анализ показывает, что инерционный член в этом уравнении (т. е. член, содержащий  $\dot{b}^2$ ) на отрезке времени  $(0, \hat{t}_*)$  на несколько порядков меньше остальных членов уравнения, а ускорение  $\ddot{b}$ , монотонно убывая, в некоторый момент времени  $\hat{t}_0$  становится одного порядка с инерционным членом. С учетом этого на начальной стадии роста поры  $0 < \hat{t} \leq \hat{t}_0$ , полагая  $b \simeq 1$ ,  $\hat{P}_i \simeq \tilde{P}_i^0 - P_\infty$ , сведем (18) к виду

$$\ddot{b} + h\dot{b} = Q(1 - S)h, \quad (19)$$

а на стадии  $\hat{t} \geq \hat{t}_0$ , пренебрегая членом  $\ddot{b}$ , имеем

$$\dot{b} = Q(1 - S)b. \quad (20)$$

Решая (19) и (20) на отрезках времени  $0 \leq \hat{t} \leq \hat{t}_0$  и  $\hat{t} > \hat{t}_0$  соответственно, получим

$$b(t) = \begin{cases} 1 + M(t + e^{-t} - 1), & 0 \leq t \leq t_0, \\ b(t_0) \exp [M(t - t_0)], & t > t_0; \end{cases} \quad (21)$$

$$\dot{b}(t) = \begin{cases} Q(1 - S)(1 - e^{-t}), & 0 \leq t \leq t_0, \\ Q(1 - S)b(t), & t > t_0, \end{cases} \quad (22)$$

где  $t = h\hat{t}$ ;  $M = Q(1 - S)h^{-1}$ . Поскольку  $\hat{t}_0$  — момент времени, начиная с которого  $\ddot{b}$ , убывая, сравнимо по порядку величины с  $|3 - 4\beta_0|\dot{b}^2[2(1 - \beta_0)b]^{-1}$ , за  $\hat{t}_0$  можно принять момент времени, в который выполняется равенство  $b(\hat{t}_0)\dot{b}(\hat{t}_0) = 0,5(3 - 4\beta_0)(1 - \beta_0)^{-1}\dot{b}^2(\hat{t}_0)$ .

Подставляя в это уравнение значения  $b, \dot{b}, \ddot{b}$  из (21), (22), с учетом того, что  $\hat{t}_0 = h^{-1}t_0$ , получим соотношение  $(3 - 4\beta_0)e^{t_0} + (1 - 2\beta_0)e^{-t_0} - 2(1 - \beta_0)t_0 = 2(1 - \beta_0)M^{-1} + 2(2 - 3\beta_0)$ , из которого определяется  $t_0$ .

Таким образом, в процессе роста поры в ячейке, по крайней мере до момента времени  $\hat{t}_*$ , на периферии вязкопластической зоны  $R \leq r \leq a$  сохраняется упругий слой  $a < r \leq 0,5l$  (рис. 3,а), внутренняя граница которого перемещается по закону (10), а внешняя остается неподвижной, т. е. остаются постоянными размер ячейки и средняя плотность среды. Поскольку на этой стадии роста пор сохраняются постоянными объем и плотность образца, а свободная энергия уменьшается, процесс должен сопровождаться уменьшением среднего по объему отрицательного давления  $-p$ . Для оценки времени его релаксации  $T_1$  введем понятие энергетически эквивалентной на отрезке времени  $0 \leq \hat{t} \leq \hat{t}_*$  среды (ЭС), образец которой имеет такие же размер  $L$  и плотность и разбит на такие же по размерам ячейки (рис. 3,б), содержащие микропоры такого же радиуса  $R_0$ , как и в случае исследуемого образца (рис. 3,а). Запас свободной упругой энергии в ячейке ЭС в начальный момент времени также равен  $F_0$ , а убывание со временем  $F(\hat{t})$  в ячейке ЭС происходит по тому же закону, что и в ячейке исследуемого образца. Однако в отличие от последнего в ячейке ЭС этот процесс протекает при постоянном значении радиуса микропоры  $R_0$ , т. е. свободная упругая энергия расходуется не на рост пор, а на внутреннюю перестройку микроструктуры ЭС, которая была выведена из термодинамического равновесия объемным растяжением среды. При этом уменьшается упругая энергия ЭС и соответственно релаксирует отрицательное давление в ячейке, которое в данной среде совпадает со среднеобъемным давлением  $-p$ .

Очевидно, что  $F(\hat{t})$  в ячейке ЭС определяется по формуле, аналогичной (17) (но вместо  $-P_{i0} = \text{const}$  содержащей  $-p = -P_{i0} \exp(-\hat{t}T_1^{-1})$ ):

$$F(\hat{t}) = \frac{\pi R_0^3}{3} (1 - 8nR_0^3) \left[ (1 + \xi)^2 + \frac{1}{4aR_0^3} \right] \left( \frac{1}{3K_0} + \frac{1}{G} \right) P_{i0}^2 \exp\left(-\frac{2\hat{t}}{T_1}\right). \quad (23)$$

Поскольку значение  $F(\hat{t})$  в произвольный момент времени  $0 \leq \hat{t}_0 \leq \hat{t}_*$  в ячейках исследуемой среды и ЭС должно быть одинаковым (по определению ЭС), то, приравнявая (17) и (23) при  $\hat{t} = T_1 < \hat{t}_*$ , находим

$$b(T_1) = \left[ \frac{B\beta_0^3}{4} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{8(1 + \xi)^2}{B^2}} \right) \right]^{1/3},$$

$$B = \left( 1 - \frac{1}{e^2} \right) \left[ \frac{1}{4nR_0^3} - 8(1 + \xi)^2 nR_0^3 \right] - [(1 + \xi)^2 - 1] \frac{1}{e^2}, \quad e \approx 2,71828.$$

Приравнявая это выражение к значению  $b(T_1)$  из (21), получим соотношение, определяющее зависимость времени релаксации давления  $-p$  в упруговязкопластической среде с порами:

$$T_1 = \hat{t}_0 + \frac{1}{3Q(1-S)} \ln \left[ \frac{B\beta_0^3}{4} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{8(1 + \xi)^2}{B^2}} \right) \right].$$

По определению  $\hat{t}_0$  на отрезке времени  $0 \leq \hat{t} \leq \hat{t}_0$   $b(\hat{t}) \simeq 1$  и, следовательно,  $F(\hat{t}_0) \simeq F_0$ , т. е.  $p(\hat{t}_0) \simeq P_{i0}$ , поэтому последнее равенство сводится к виду

$$T_1 \simeq \frac{1}{3Q(1-S)} \ln \left[ \frac{B\beta_0^3}{4} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{8(1 + \xi)^2}{B^2}} \right) \right]. \quad (24)$$

Построенная зависимость (24) позволяет определять время релаксации осредненного по ячейкам значения отрицательного давления  $-p$ , происходящей вследствие расхода упругой свободной энергии  $F$  на работу по росту пор. Однако радиус поры может вырасти до



некоторого значения  $R_* = b_* R_0^{-1}$  при условии, что запас  $F$  в слое  $R_0 \leq r < a_* = \beta_0^{-1} b_*$  достаточен для выполнения работы  $\Delta W(b_*)$  по расширению поры в упруговязкопластической среде до заданного размера. Значение  $\Delta W(b_*)$  определим, проинтегрировав (18) по времени от  $\hat{t}_0 = 0$  до момента времени  $t_*$ , соответствующего значению  $b_*(\hat{t}_*)$ :

$$\frac{4\pi R_0^3}{3} (b_*^3 - 1) \hat{P}_i = \frac{4\pi R_0^3}{3} (b_*^3 - 1) 2\tau_* \ln \beta_0^{-1} + 2\pi \rho R_0^5 [(1 - \beta_0) b_*^3 b_*^2 - \beta_0 J_1] + 16\pi R_0^3 \mu J_2, \quad (25)$$

где с учетом (21), (22)

$$J_1 = \int_0^{\hat{t}_*} b^2 \dot{b}^3 dt = Mh^2 \left[ (t_0 + 5e^{-t_0} - 5)M + \frac{1}{5} (e^{5 \ln b_*} - 1) \right],$$

$$J_2 = \int_0^{\hat{t}_*} b \dot{b}^2 dt = M^2 h \left( t_0 + 2e^{-t_0} + \frac{1}{3} e^{3 \ln b_*} - \frac{11}{6} - \frac{1}{2} e^{-2t_0} \right).$$

В уравнении (25) левая часть — работа по расширению поры до радиуса  $R_*$ , правая — составляющие этой работы (без учета расхода энергии на образование свободной поверхности поры). Так как для того, чтобы радиус поры достиг значения  $R_*$ , начальный запас упругой свободной энергии в слое  $1 < \bar{r} < a_* R_*^{-1} = b_* \beta_0^{-1}$  ячейки должен быть не меньше величины  $\Delta W(b_*)$ , то, определяя из (13) и (17) значение  $\Delta F = F(b) - F(b_*)$  при  $b = 1$  и подставляя его в левую часть (25), можно получить энергетическое неравенство

$$P_{i0}^2 \left( \frac{1}{3K_0} + \frac{1}{G} \right) \left[ \frac{b_*^3}{\beta_0^3} - 1 + \frac{(1 + \xi)^2}{2} \left( 1 - \frac{\beta_0^3}{b_*^3} \right) \right] >$$

$$> 4\tau_* (b_*^3 - 1) \ln \beta_0^{-1} + 3\rho R_0^2 [(1 - \beta_0) b_*^3 b_*^2 - \beta_0 J_1] + 24\mu J_2, \quad (26)$$

являющееся условием роста поры до заданного радиуса.

**3.** Анализ (26) показывает, что при  $R_* \rightarrow R_0$  (т. е.  $b_* \rightarrow 1$ ) правая часть неравенства стремится к нулю, а левая — к некоторому конечному значению  $[(3K_0)^{-1} + G^{-1}][\beta_0^{-3} + 0,5(1 + \xi)^2(1 - \beta_0^3)]P_{i0}^2$ , физический смысл которого заключается в следующем. Согласно (23) функция  $\Delta F$ , как и  $\Delta W$  (см. (25)), в качестве параметра содержит начальный радиус поры  $R_0$  (после подстановки  $\Delta F$  в (25)  $R_0$  сокращается и в (26) отсутствует), поэтому выражение для  $\Delta F(b_*)$  при  $R_* \rightarrow R_0$  сводится к виду

$$\Delta F_0 = \Delta F(R_0) = \frac{2}{3} \pi R_0^3 \left( \frac{1}{3K_0} + \frac{1}{G} \right) \left[ \beta_0^{-3} - 1 + \frac{(1 + \xi)^2}{2} (1 - \beta_0^3) \right] P_{i0}^2. \quad (27)$$

Из (27) следует, что  $\Delta F_0$  — упругая свободная энергия, необходимая для совершения работы по расширению поры от  $R = 0$  до  $R_0$ . Однако, поскольку в начальный момент времени (в момент формирования в ячейке поля упругих напряжений) радиус поры уже равен  $R_0$  по определению, на ее расширение от начального радиуса  $R_0$  до  $R_*$  будет расходоваться не только упругая энергия, высвобождаемая из сферического слоя  $4\pi(a_*^2 - a_0^2)/3$ , но и начальный “запас” энергии  $\Delta F_0$ . Поэтому и при низких значениях  $P_{i0}$ , не удовлетворяющих условию  $F(R_0) - F(R_*) > W(\Delta R)$ , где  $\Delta R = R_* - R_0$ , возможен некоторый рост пор до тех пор, пока не израсходуется начальный “запас” энергии  $\Delta F_0$ .

Таким образом, построенные соотношения (24) и (26) позволяют по заданным значениям приложенного к среде отрицательного давления, ее реологических параметров, начальных размеров пор и их начальной объемной (или счетной) концентрации определять

степень расширения пор  $b_*$  и время релаксации осредненного по объему образца отрицательного давления  $T_1$ . При построении соотношений (24) и (26) предполагалось, что сдвиговая вязкость на стадии пластического течения имеет некоторое постоянное значение  $\mu$ , характерное для данной среды. Такое предположение, основанное на анализе экспериментальных данных, использовалось в работах [3, 9], где рассматривался рост изолированной поры в расширяющемся в процессе ее роста сферическом слое вязкопластической среды под действием постоянного отрицательного давления. Однако, как отмечалось ранее, в более точном приближении  $\mu$  должно зависеть от динамики нагружения среды, ее реологических свойств, характера и количества примесей. Если в конкретном случае такая зависимость известна, то ее необходимо подставить в (13) вместо  $\mu$  и выполнить приведенные выше построения условия роста пор. В этом случае интегрирование уравнения (13) несколько усложняется.

Полученные результаты применимы как для жидкопластических, так и для твердопластических сред. С учетом приведенных в [2, 9–11] экспериментальных данных о физических параметрах сред по (24) и (26) производилась оценка зависимости  $b_*$  и  $T_1$  от  $\varkappa = P_{i0}/\tau_*$  для следующих материалов:

— желатиновый студень ( $\tau_* = 10^4$  Па,  $\mu = 1$  Па·с,  $R_0 = 10^{-4}$  см,  $n = 2000$  см $^{-3}$ ,  $\rho = 1,1$  г/см $^3$ ,  $K_0 = 4 \cdot 10^9$  Па,  $G = 10^7$  Па);

— свинец ( $\tau_* = 10^7$  Па,  $\mu = 40$  Па·с,  $R_0 = 5 \cdot 10^{-5}$  см,  $n = 2000$  см $^{-3}$ ,  $\rho = 11,34$  г/см $^3$ ,  $K_0 = 4,44 \cdot 10^{10}$  Па,  $G = 5,55 \cdot 10^9$  Па);

— медь ( $\tau_* = 6 \cdot 10^7$  Па,  $\mu = 30$  Па·с,  $R_0 = 5 \cdot 10^{-5}$  см,  $n = 2000$  см $^{-3}$ ,  $\rho = 8,9$  г/см $^3$ ,  $K_0 = 11,46 \cdot 10^{10}$  Па,  $G = 4,1 \cdot 10^{10}$  Па).

В результате произведенных оценок получены следующие зависимости:

— для желатинового студня:  $\varkappa = 3,5$ :  $T_1 = 7,1 \cdot 10^{-4}$  с,  $b_* = 1,05$  при  $\hat{t}_* = 6,8 \cdot 10^{-6}$  с;  $\varkappa = 4$ :  $T_1 = 6,8 \cdot 10^{-4}$  с,  $b_* = 1,14$  при  $\hat{t}_* = 1,6 \cdot 10^{-5}$  с;  $\varkappa = 5$ :  $T_1 = 5,34 \cdot 10^{-4}$  с,  $b_* = 1,28$  при  $\hat{t}_* = 2,4 \cdot 10^{-5}$  с;  $\varkappa = 6$ :  $T_1 = 7,9 \cdot 10^{-5}$  с,  $b_* = 1,73$  при  $\hat{t}_* = 4,38 \cdot 10^{-5}$  с; при  $\varkappa \geq 6,2$   $b_*$  растет, по крайней мере до значений, превышающих величину  $b_m = a_m(\beta_0 R_0)^{-1} = (2\beta_0 R_0 n^{1/3})^{-1} = \beta_0^{-1}[\pi/(6\alpha_0)]^{1/3}$ , соответствующую выходу внешнего радиуса вязкопластического слоя на границу ячейки;

— для свинца:  $\varkappa = 5$ :  $T_1 = 2,3 \cdot 10^{-5}$  с,  $b_* = 1,053$  при  $\hat{t}_* = 2 \cdot 10^{-7}$  с;  $\varkappa = 10$ :  $T_1 = 1,06 \cdot 10^{-5}$  с,  $b_* = 1,26$  при  $\hat{t}_* = 4,3 \cdot 10^{-7}$  с;  $\varkappa = 12,7$ :  $T_1 = 8,07 \cdot 10^{-6}$  с,  $b_* = 2,85$  при  $\hat{t}_* = 1,5 \cdot 10^{-6}$  с; при  $\varkappa > 13$   $b_* \geq b_m$ ;

— для меди:  $\varkappa = 5$ :  $T_1 = 2,41 \cdot 10^{-6}$  с,  $b_* = 1,014$  при  $\hat{t}_* = 8,7 \cdot 10^{-9}$  с;  $\varkappa = 10$ :  $T_1 = 1,15 \cdot 10^{-6}$  с,  $b_* = 1,2$  при  $\hat{t}_* = 3,7 \cdot 10^{-8}$  с;  $\varkappa = 13,5$ :  $T_1 = 8,14 \cdot 10^{-7}$  с,  $b_* = 3,5$  при  $\hat{t}_* = 2,1 \cdot 10^{-7}$  с; при  $\varkappa > 13,6$   $b_* \geq b_m$ .

Из приведенных результатов следует, что качественная зависимость  $b_*(\varkappa)$  (рис. 4)

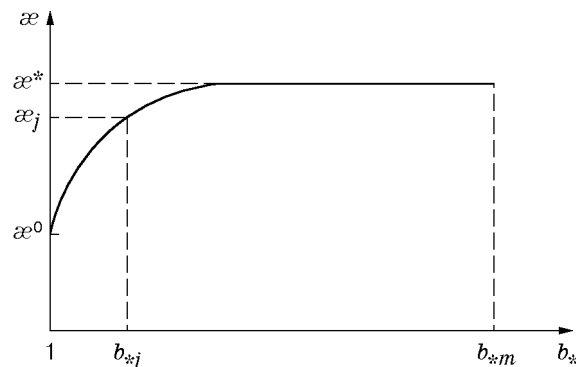


Рис. 4

одинакова для всех конденсированных сред, обладающих упруговязкопластическими свойствами. Здесь  $\varkappa^0$  — минимальное значение  $\varkappa$ , при котором начинается рост кавитационных пор;  $b_{*j}$  — максимальная степень расширения поры при заданном значении  $\varkappa_j$ ;  $\varkappa^*$  — пороговый уровень  $\varkappa$ , начиная с которого радиус пор растет до значений, равных или превышающих  $R_m = R_0\beta_0^{-1}(6\alpha_0/\pi)^{-1/3}$ .

Таким образом, для каждого упруговязкопластического тела существует три диапазона нагружения отрицательным давлением:  $\varkappa < \varkappa^0$  (в процессе объемного деформирования тела размеры пор остаются постоянными);  $\varkappa^0 < \varkappa < \varkappa^*$  (деформирование сопровождается незначительным расширением пор:  $\alpha\alpha_0^{-1} \leq 10$ );  $\varkappa > \varkappa^*$  (неограниченный рост пор до размеров  $R_m \geq R_0\beta_0^{-1}(6\alpha_0/\pi)^{-1/3}$ ). Следует отметить, что некоторая качественная аналогия имеет место при росте пузырьков из кавитационных зародышей в жидкостях под действием отрицательного давления [12], где также существует три диапазона значений отрицательного давления, соответствующего устойчивому состоянию радиуса кавитационного зародыша, его ограниченному расширению и неограниченному росту кавитационного пузырька.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Стебновский С. В.** Экспериментальное исследование импульсного растяжения кавитирующих сред // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 5. С. 122–125.
2. **Стебновский С. В.** Эволюция структуры высоковязких жидких сред при импульсном объемном растяжении // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 1. С. 105–111.
3. **Barbee T. W., Seaman L., Crewdson R., Curran D.** Dynamic fracture criteria for ductile and brittle metals // J. Materials. 1972. V. 7, N 3. P. 318–326.
4. **Голубев В. К., Новиков С. А., Сеницын В. А., Соболев Ю. С.** Влияние температуры на критические условия откольного разрушения металлов // ПМТФ. 1980. № 4. С. 136–140.
5. **Стебновский С. В.** Условия формирования пузырьковых суспензий при ударно-волновом нагружении жидкостей // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 2. С. 53–63.
6. **Тябин Н. В.** Реологическая кибернетика. Волгоград: Изд-во Волгоград. политехн. ин-та, 1977. Ч. 1.
7. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теория упругости. М.: Наука, 1965.
8. **Мизес Р.** Механика твердых тел в пластически деформированном состоянии // Теория пластичности. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.
9. **Голубев В. К.** О расширении пор в пластичных металлах при отколе // ПМТФ. 1983. № 6. С. 159–165.
10. **Butcher V. M., Carroll M. M., Holt A. C.** Shock-wave compaction of porous aluminium // J. Appl. Phys. 1974. V. 45, N 9. P. 3864–3869.
11. **Папков С. П.** Студнеобразное состояние полимеров. М.: Химия, 1974.
12. **Перник А. Д.** Проблемы кавитации. Л.: Судостроение, 1966.

*Поступила в редакцию 6/1 2000 г.*