

УДК 621.01/.03

**ВОЗБУЖДЕНИЕ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ  
В ОДНОМАССОВОЙ ВИБРОМАШИНЕ С ИНЕРЦИОННЫМ ПРИВОДОМ  
И УПРУГОЙ МУФТОЙ**

**С. Л. Букин, В. П. Кондрахин, В. Н. Беловодский, В. Н. Хоменко**

*Донецкий национальный технический университет,  
E-mail: S.Bukin08@gmail.com,  
ул. Артема, 58, 83000, г. Донецк, Украина*

Изучена возможность возбуждения полигармонических колебаний в одномассовой инерционной вибромашине. Разработана математическая модель колебательной системы с учетом упругого звена в приводе дебалансного вибровозбудителя. Исследована область рабочих режимов, спектральный состав и влияние основных конструктивных параметров системы на динамические показатели вибромашин. Установлен заметный вклад супергармонических колебаний в полигармонический спектр на определенных частотах в зависимости от величины жесткости упругого элемента муфты, соединяющей вибровозбудитель с электродвигателем привода вращения.

*Вибромашинa, дебалансный вибровозбудитель, трансмиссия, упругая муфта, спектр, супергармонические колебания*

---

**ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ И АНАЛИЗ ПОСЛЕДНИХ ДОСТИЖЕНИЙ**

Инерционные вибромашины, вынужденные колебания рабочих органов которых создаются центробежными вибровозбудителями, нашли предпочтительное распространение в различных отраслях промышленности, прежде всего в угольной, горнорудной, химической. Среди них наиболее широко представлены одномассовые вибромашины с далекозарезонансным режимом работы.

В последнее время внимание исследователей вибрационных машин привлекает использование полигармонических колебаний как одно из перспективных направлений интенсификации многих технологических процессов [1–3], например в обогащении полезных ископаемых. Полигармонический спектр колебаний рабочего органа существенно улучшает условия технологической обработки разнообразных материалов, повышая как качественные, так и количественные показатели назначения вибромашин.

Полигармонические колебания могут возбуждаться разными способами в линейных и нелинейных динамических системах.

Область применения нелинейных колебаний в настоящее время весьма ограничена, но исследования в этом направлении активно ведутся во многих странах.

Все большее развитие получают вибромашины с возбуждением суб- и супергармонических устойчивых резонансных колебаний, в которых используются нелинейные возмущения и нелинейно-параметрические свойства упругих элементов [4].

Известно, что при действии гармонической вынуждающей силы на систему с нелинейной восстанавливающей силой, кроме гармонических колебаний с частотой возбуждения  $\omega$ , одновременно происходят колебаний с частотами  $m\omega$ , кратными частоте возбуждения (супергармонические колебания) или с частотами  $\omega/n$  (субгармонические колебания), где  $m$  и  $n$  — целые числа [5].

Функционирование супергармонического центробежного вибропривода может быть основано на надлежащем образом усиленной неравномерности вращения дебалансов.

Так, в работах И. И. Быховского [6] и ряда других авторов установлено, что в реальных условиях угловая скорость вращения центробежных вибровозбудителей не остается постоянной в цикле колебаний. Неравномерность вращения дебалансов может быть вызвана тремя факторами: непостоянством момента силы тяжести относительно оси вращения, если эта ось не вертикальна; ускорением оси вращения, которая движется вместе с корпусом; изменением сопротивления вращению. Угловая скорость дебаланса представляет собой сумму постоянной составляющей (среднего значения) и бесконечного ряда четных гармоник, а ускорения корпуса — сумму бесконечного ряда нечетных гармоник. Амплитуда гармоник быстро убывает с ростом их номера. У обычных вибровозбудителей амплитуды этих гармоник малы. Так, амплитуда третьей гармоники ускорения (наибольшей из амплитуд высших гармоник) обычно в сотни или десятки раз меньше амплитуды первой [5].

Необходимо отметить, что почти во всех работах отечественных и зарубежных авторов связь между ротором электродвигателя и валом дебалансного вибровозбудителя предполагалась абсолютно жесткая, исходя из чего их угловые скорости принимались одинаковыми. Но этому допущению соответствуют только центробежные вибровозбудители типа мотор-вибратор. Если в систему привода включена, например, упругая муфта, то для полного описания движения элементов вибромашины необходимо добавить не только дифференциальное уравнение двигателя соответствующего типа, но и уравнение, описывающее движение соответствующего типа муфты [7].

По мнению авторов, наличие как инерционных, так и обоснованно выбранных упругих элементов в трансмиссии центробежного вибропривода позволяет усилить супергармонические колебания вращающегося дебалансного вибровозбудителя и достичь эффективного вклада высших частот в спектр полигармонических колебаний рабочего органа.

#### **ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ**

Цель работы — определение условий возбуждения полигармонических колебаний в инерционных вибромашинах с дебалансным вибровозбудителем и упругой муфтой в приводе.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие первоочередные задачи:

- разработать математическую модель колебательной системы с учетом упругого звена в приводе дебалансного вибровозбудителя;
- исследовать область рабочих режимов, спектральный состав и оценить условия возбуждения полигармонических колебаний;
- изучить влияние основных конструктивных параметров системы на динамические показатели вибромашины.

### ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ И РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

Рассмотрим динамическую схему одномассовой вибрационной машины (рис. 1). Вибромашина состоит из рабочего органа 1 (например, короба инерционного грохота), установленного (или подвешенного) на опорных виброизоляторах 2, на котором закреплен центробежный вибровозбудитель 5 дебалансного типа, вращающийся в подшипниках 6. Вибровозбудитель приводится во вращение электродвигателем 3 через упругую муфту 4.

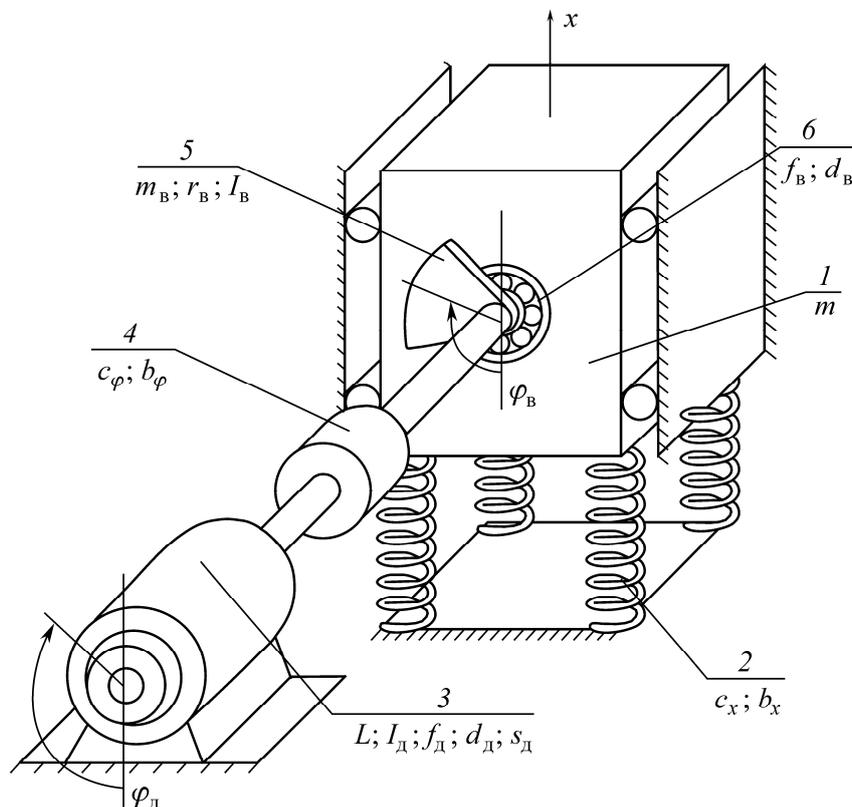


Рис. 1. Расчетная схема вибромашины: 1 — рабочий орган; 2 — опорные виброизоляторы; 3 — электродвигатель привода вибровозбудителя; 4 — упругая муфта; 5 — дебаланс вибровозбудителя; 6 — подшипник вибровозбудителя

Принципиальная схема трансмиссии вибропривода инерционной вибромашины приведена на рис. 2. Электродвигатель 6 приводит во вращение дебалансный вал 1 центробежного вибровозбудителя посредством карданного вала 2 и упругой муфты, состоящей из обоймы 3, соединенной с карданным валом, упругого элемента 4 и втулки 5, закрепленной на валу электродвигателя.

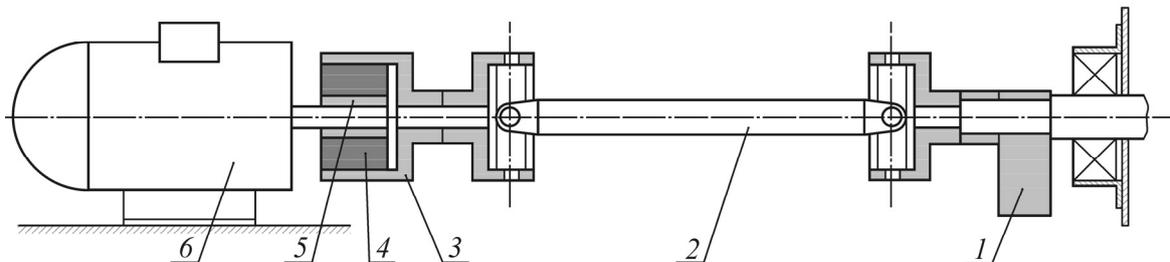


Рис. 2. Принципиальная схема трансмиссии привода вибровозбудителя: 1 — дебалансный вибровозбудитель; 2 — карданный вал; 3 — обойма; 4 — упругий элемент муфты; 5 — втулка; 6 — электродвигатель

При составлении расчетной схемы и уравнений движения подвижных масс вибромашины приняты традиционные допущения:

- рабочий орган считаем абсолютно твердым телом;
- ось вращения дебалансов вибровозбудителя горизонтальна;
- деформация упругих элементов происходит по линейной зависимости;
- учет внутренних сопротивлений в упругих элементах основывается на гипотезе вязкого трения;
- жесткостью муфты в поперечном направлении из-за малости величины пренебрегаем.

Введем следующие обозначения:  $m$  — масса рабочего органа;  $m_b, I_b$  — масса и момент инерции неуравновешенных частей вибровозбудителя соответственно;  $I_d$  — центральный момент инерции ротора электродвигателя привода вибровозбудителя;  $r_b$  — эксцентриситет дебалансного вибровозбудителя (расстояние от оси вращения до центра неуравновешенных масс дебалансов);  $c_x$  — суммарный коэффициент жесткости опорных виброизоляторов в направлении оси  $x$ ;  $c_\varphi$  — коэффициент жесткости упругой муфты в направлении оси  $\varphi$  (на кручение);  $b_x, b_\varphi$  — коэффициенты вязких сопротивлений опорных виброизоляторов и упругой муфты.

Текущее положение рабочего тела будем определять абсолютным смещением  $x$  центра масс от положения в статическом равновесии, положение дебаланса центробежного вибровозбудителя — углом отклонения  $\varphi_b$  вектора-эксцентриситета  $\vec{r}_b$  центра массы дебаланса от положения устойчивого равновесия, угол закручивания упругой муфты  $\varphi_d - \varphi_b$ . За обобщенные координаты  $q_i$  принимаем абсолютные координаты:  $q_1 = x, q_2 = \varphi_b, q_3 = \varphi_d$ .

Уравнения движения системы составляем в форме уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_{q_i},$$

где  $T, \Pi, \Phi$  — соответственно кинетическая, потенциальная энергии и диссипативная функция рассеяния энергии;  $q_i, \dot{q}_i, Q_i$  — соответственно обобщенные координаты, скорости, силы;  $i = 1, 2, 3$  — порядковый номер обобщенной координаты.

Кинетическая энергия системы может быть представлена в виде

$$T = \frac{1}{2} (M\dot{x}^2 + I\dot{\varphi}_b^2 + I_d\dot{\varphi}_d^2) + m_b r_b \dot{\varphi}_b \dot{x} \sin \varphi_b,$$

где  $M = m + m_b$ ;  $I = I_b + m_b r_b^2$ .

Потенциальная энергия системы состоит из энергии деформации упругих опор, энергии закручивания упругой муфты и энергии положения дебалансов вибровозбудителя. Выражение для потенциальной энергии, отсчитываемой от положения статического равновесия, может быть записано в форме

$$\Pi = \frac{1}{2} [c_x x^2 + c_\varphi (\varphi_d - \varphi_b)^2] + g m_b r_b (1 - \cos \varphi_b),$$

здесь  $g$  — ускорение свободного падения.

Диссипативная функция рассеяния энергии Рэлея равна

$$\Phi = \frac{1}{2} [b_x \dot{x}^2 + b_\varphi (\dot{\varphi}_d - \dot{\varphi}_b)^2],$$

где  $b_x = \mu_x c_x$ ,  $b_\varphi = \mu_\varphi c_\varphi$ ;  $\mu_x$ ,  $\mu_\varphi$  — коэффициенты сопротивления материала, из которого изготовлены упругие элементы опорных виброизоляторов и упругой муфты.

Обобщенные силы по координатам  $x$ ,  $\varphi_B$ ,  $\varphi_D$  соответственно равны:

$$Q_x = 0, \quad Q_{\varphi_B} = -R_B(\dot{\varphi}_B), \quad Q_{\varphi_D} = -L(\dot{\varphi}_D) - R_D(\dot{\varphi}_D),$$

где  $L(\dot{\varphi}_D)$  — момент, развиваемый электродвигателем привода вибровозбудителя.

Считая, что эксцентриситет дебалансного вибровозбудителя значительно больше амплитуды колебаний рабочего органа, и учитывая постоянство знака угловой скорости, момент сил трения в подшипниках вибровозбудителя можно определить по известной зависимости

$$R_B(\dot{\varphi}_B) = 0.5 f_B m_B r_B d_B \dot{\varphi}_B^2,$$

где  $f_B$  — приведенный к внутреннему диаметру подшипника вибровозбудителя коэффициент трения;  $d_B$  — диаметр внутреннего кольца подшипника вибровозбудителя.

Момент сил трения в подшипниках электродвигателя привода вибровозбудителя равен

$$R_D(\dot{\varphi}_D) = 0.5 f_D s_D d_D \dot{\varphi}_D^2,$$

где  $f_D$  — коэффициент трения, приведенный к внутреннему диаметру подшипника электродвигателя;  $s_D$  — остаточная неуравновешенность (статический момент массы) ротора электродвигателя;  $d_D$  — диаметр внутреннего кольца подшипника электродвигателя.

Асинхронные электродвигатели с короткозамкнутыми роторами находят предпочтительное применение в качестве привода центробежных вибровозбудителей вибрационных машин инерционного типа. Способ задания вращающего момента электродвигателя привода вибровозбудителя определяет степень идеализации двигателя и область изучаемых режимов вибромашины.

Известно, что статические характеристики асинхронного электродвигателя привода центробежного вибровозбудителя могут быть использованы для исследования движения колеблющихся масс вибромашины вблизи стационарного режима.

Так как в данной работе не предполагается изучение пусковых режимов, то воспользуемся классической моделью асинхронного электродвигателя, основанной на формуле Клосса [8]:

$$L(\dot{\varphi}_D) = \frac{2L_K}{s/s_K + s_K/s},$$

где  $s = (\omega_c - \dot{\varphi}_D)/\omega_c$ ,  $s_K = (\omega_c - \omega_K)/\omega_c$  — соответственно текущее и критическое скольжение ротора электродвигателя;  $\omega_c$ ,  $\omega_K$  — синхронная и критическая угловые скорости вращения ротора двигателя соответственно;  $L_K$  — максимальный (критический) момент двигателя;  $\dot{\varphi}_D$  — скорость вращения ротора двигателя, близкая к номинальной  $\omega_H$ .

Критический момент  $L_K$  и критическое скольжение  $s_K$ , соответствующие критической скорости вращения  $\omega_K$ , определяются через каталожные данные двигателя:

$$L_K = b_K L_H, \quad s_K = s_H (b_K + \sqrt{b_K^2 + 1}),$$

где  $b_K$  — кратность максимального момента двигателя;  $s_H$  — номинальное скольжение;  $L_H$  — номинальный момент двигателя.

Тогда рассматриваемая колебательная система может быть описана следующими дифференциальными уравнениями:

$$M\ddot{x} + c_x(\mu_x\dot{x} + x) = -m_B r_B (\ddot{\varphi}_B \sin \varphi_B + \dot{\varphi}_B^2 \cos \varphi_B),$$

$$I_B \ddot{\varphi}_B + c_\varphi [\mu_\varphi (\dot{\varphi}_B - \dot{\varphi}_D) + (\varphi_B - \varphi_D)] = -m_B r_B [(\ddot{x} + g) \sin \varphi_B + 0.5 f_B d_B \dot{\varphi}_B^2],$$

$$I_D \ddot{\varphi}_D + c_\varphi [\mu_\varphi (\dot{\varphi}_D - \dot{\varphi}_B) + (\varphi_D - \varphi_B)] = L(\dot{\varphi}_D) - 0.5 f_D s_D d_D \dot{\varphi}_D^2.$$

Расчет математических моделей динамических процессов исследуемой колебательной системы проводился в программном пакете MATLAB (рис. 3).

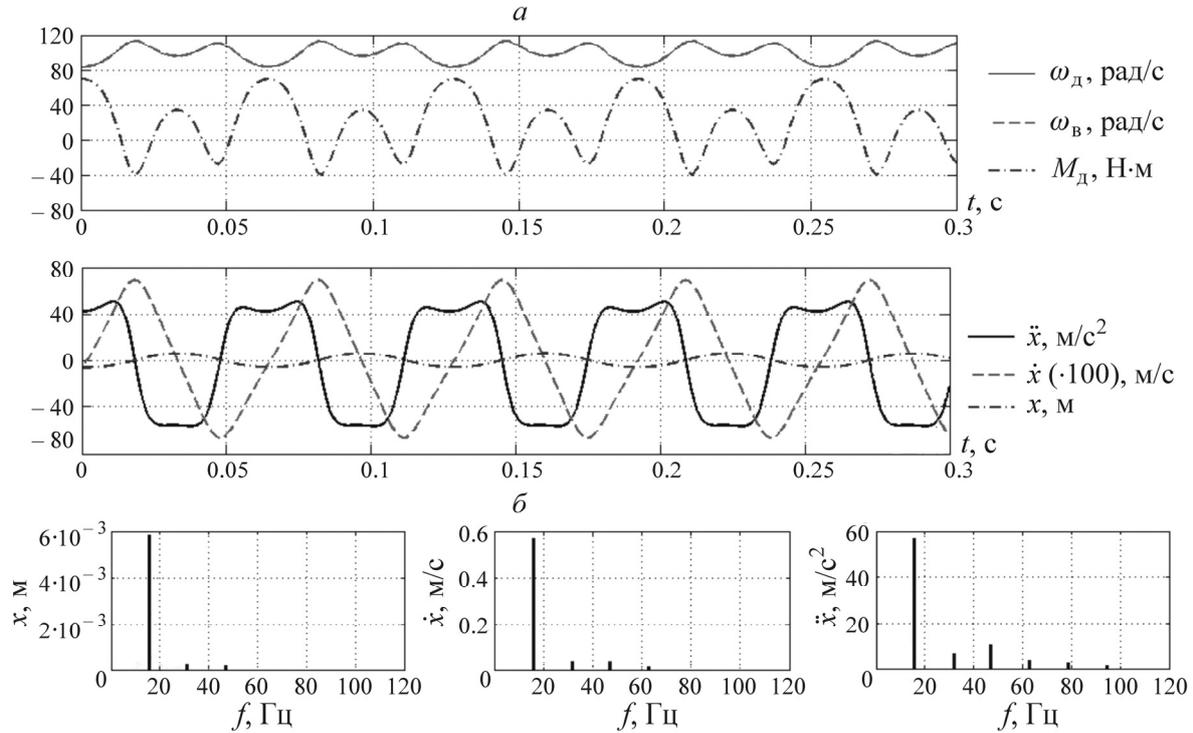


Рис. 3. Виброграмма, полученная в результате моделирования установившегося режима работы при жесткой связи валов двигателя и возбудителя ( $c_\varphi \rightarrow \infty$ ) (а) и амплитудный спектр виброперемещения, виброскорости и виброускорения рабочего органа (б)

Рассмотрим движение рабочего органа ( $m = 2000$  кг;  $c_x = 0.2$  МН/м;  $\mu_x = 8 \cdot 10^{-4}$  с), возбуждаемого дебалансным валом ( $I_B = 0.14$  кг·м<sup>2</sup>;  $m_B = 50$  кг;  $r_B = 0.24$  м;  $\mu_\varphi = 2 \cdot 10^{-4}$  с;  $f_B = 0.003$ ;  $d_B = 0.1$  м), соединенного либо жесткой связью, либо через упругую муфту с валом электродвигателя привода ( $f_D = 0.0013$ ;  $s_D = 0.0001$  кг·м;  $d_D = 0.04$  м;  $I_D = 0.065$  кг·м<sup>2</sup>;  $P_H = 5$  кВт;  $\omega_H = 93.2$  рад/с;  $L_H = 53.6$  Н·м;  $L_K = 126.2$  Н·м;  $s_H = 0.11$ ;  $s_K = 0.853$ ).

На рис. 3а приведены виброграммы перемещений, скоростей и ускорений движения рабочего органа, угловых скоростей вращения дебалансов вибровозбудителя и ротора электродвигателя, а также момента, развиваемого асинхронным электродвигателем привода вибровозбудителя для случая жесткой связи валов вибровозбудителя и электродвигателя.

Амплитудный спектр виброперемещения (рис. 3б) позволяет эффективно выделять из спектра колебаний рабочего органа низкочастотные субгармонические составляющие. Спектр по виброскорости подчеркивает колебания в области основной гармоники, а по виброускорению — высокочастотные супергармонические составляющие. Следовательно, для анализа высокочастотных составляющих колебаний целесообразно применять амплитудный спектр виброускорения.

Выполненный частотный анализ колебаний рабочего органа позволил установить, что в спектре частот, кроме основной частоты возбуждения 15.8 Гц (рис. 3б), наблюдаются супергармонические (31.6; 47.4; 63.2 Гц и т. д.) составляющие. Однако амплитуды колебаний составляют не более 12 % (вторая гармоника с частотой 31.6 Гц) и 19 % (третья гармоника 47.4 Гц) от амплитуды основной гармоники. Вклад более высоких гармоник в спектр колебаний рабочего органа еще менее значителен.

На рис. 4 приведены результаты спектрального анализа при различной жесткости упругого элемента муфты трансмиссии привода вибровозбудителя  $c_\varphi$ . Следует отметить заметное возрастание вклада супергармонических колебаний в полигармонический спектр на определенных частотах в зависимости от жесткости. Так, при  $c_\varphi = 350$  Н·м/рад (рис. 4а) амплитуда колебаний второй гармоники составила 92 %, а третьей 39 % от амплитуды первой гармоники. При жесткости упругого элемента муфты  $c_\varphi = 787.5$  Н·м/рад (рис. 4б) амплитуда колебаний второй гармоники составила 15 %, а третьей 69 % от амплитуды первой гармоники.

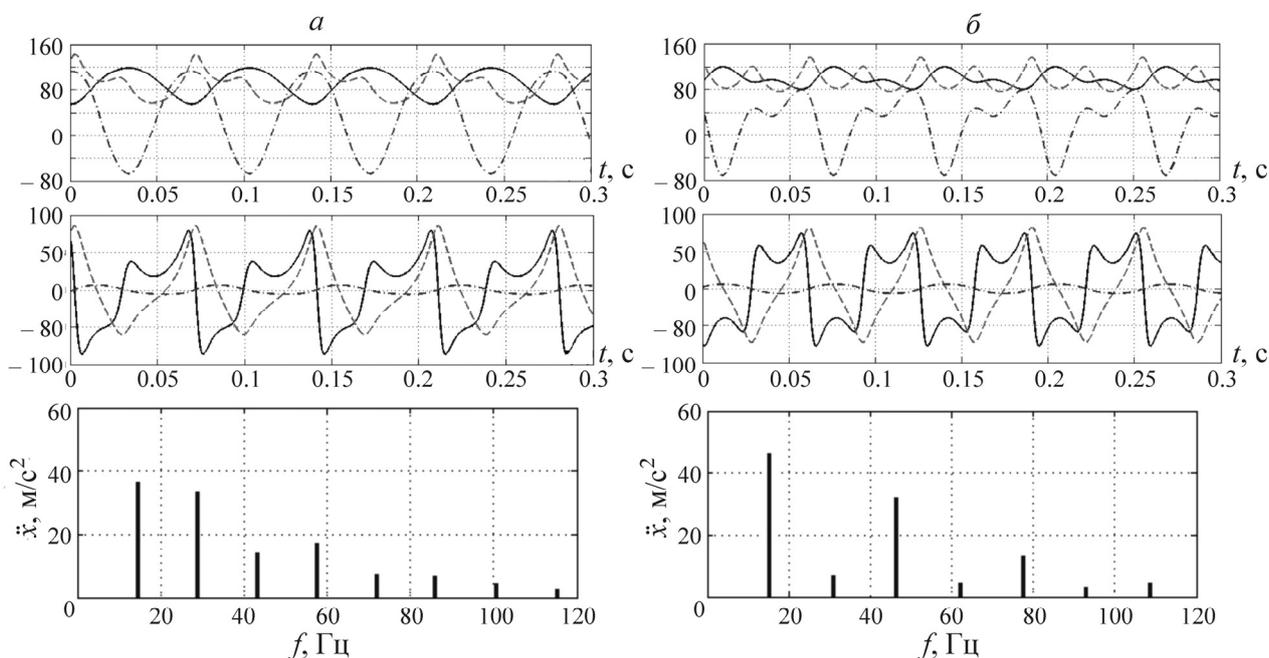


Рис. 4. Виброграммы и амплитудные спектры виброускорения рабочего органа при различных значениях коэффициента жесткости муфты: а —  $c_\varphi = 350$  Н·м/рад; б —  $c_\varphi = 787.5$  Н·м/рад (обозначения кривых — на рис. 3)

Таким образом, возможна механическая настройка спектрального состава колебаний исполнительного органа вибромашины путем использования упругих муфт с разной жесткостью упругого слоя на кручение в трансмиссии привода центробежного вибровозбудителя. В качестве материала для изготовления упругого слоя целесообразно использовать резину. В этом случае статическая жесткость упругого элемента, работающего на коаксиальное кручение, может быть определена как для резинометаллического шарнира [5]:

$$c_\varphi^{cm} = \frac{4\pi\sigma l r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2},$$

где  $r_1$  и  $r_2$  — максимальный и минимальный радиусы резинового слоя соответственно;  $l$  — длина резинового слоя;  $\sigma$  — модуль сдвига резины.

Динамическую жесткость, используемую в исходных данных при моделировании процесса, для диапазона частот 150–180 рад/с рекомендуют определять как [5]

$$c_{\varphi} = 1.1c_{\varphi}^{cm}.$$

Необходимую жесткость упругого элемента муфты в трансмиссии дебалансного вибровозбудителя инерционной одномассовой вибромашины можно получить изменением геометрических размеров (одного или нескольких) упругого слоя муфты для одной и той же марки резины или использованием разных марок резины при одинаковых размерах муфты.

#### ВЫВОДЫ

В результате выполненных теоретических исследований:

— разработана математическая модель одномассовой колебательной системы с инерционным вибровозбудителем дебалансного типа с упругой муфтой в трансмиссии вибропривода;

— установлено, что при определенных жесткостных и инерционных параметрах элементов трансмиссии возможно получить эффективный вклад супергармонических колебаний в общий спектр колебаний рабочего органа вибромашины;

— полученные закономерности могут быть использованы при создании новых и модернизации существующих вибрационных машин, например для угольной и горнорудной промышленности (грохоты, дробилки, мельницы, сепараторы, конвейеры, питатели и др.).

Дальнейшим развитием данного направления являются экспериментальные исследования в лабораторных и промышленных условиях.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Букин С. Л., Маслов С. Г., Лютый А. П., Резниченко Г. Л. Интенсификация технологических процессов вибромашин путем реализации бигармонических режимов работы // Збагачення корисних копалин: наук.-техн. зб., 2009. — Вип. 36 (77)–37 (78).
2. Шевченко Г. А., Шевченко В. Г., Кадыров А. Р. Поличастотные грохоты для разделения тонких сыпучих материалов // Збагачення корисних копалин: наук.-техн. зб., 2009. — Вип. 36 (77)–38 (79).
3. Гончаревич И. Ф. О повышении производительности и рентабельности промышленных нанотехнологий. — М.: РИА. Секция “Горное дело”. — 2010. [электронный ресурс] — Режим доступа: <http://www.slaviza.ru/mashinostroenie/>
4. Практическое использование нелинейных эффектов в вибрационных машинах / С. Л. Цыфанский, В. И. Бересневич, А. Б. Окс; под ред. К. М. Рагульскаса. — СПб.: Политехника, 1992.
5. Вибрации в технике: справочник. Т. 4. Вибрационные процессы и машины / под ред. Э. Э. Лавендела. — М.: Машиностроение, 1981.
6. Быховский И. И. Основы теории вибрационной техники. — М.: Машиностроение, 1968.
7. Гончаревич И. Ф., Докукин А. В. Динамика горных машин с упругими связями. — М.: Недра, 1975.
8. Сипайлов Г. А., Кононенко Е. В., Хорьков К. А. Электрические машины (специальный курс). — М.: Высш. шк., 1987.

Поступила в редакцию 3/Х 2013