

УДК 539.3

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ГРАВИТАЦИОННОМ СЖАТИИ СЛОИСТОГО ШАРА (НА ПРИМЕРЕ ЗЕМЛИ)

Л. В. Баев, В. Н. Солодовников

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск  
E-mail: volk@hydro.nsc.ru

Решается задача о сферически симметричном гравитационном сжатии изотропного гиперупругого слоистого шара, которым представляется область Земли, лежащая ниже границы Мохоровичича. По известным механическим характеристикам Земли в сжатом состоянии находятся ее характеристики в недеформированном состоянии, получаемом при осуществлении адиабатического или изотермического процессов снятия напряжений. Напряженное состояние существенно отличается от состояния чисто гидростатического сжатия. Минимальная объемная деформация сжатия и максимальное радиальное удлинение осуществляются не на границе шара, а в глубине на некоторых расстояниях от границы.

Ключевые слова: Земля, адиабатическое или изотермическое снятие напряжений, изотропная гиперупругость, механические характеристики.

**1. Характеристики упругости Земли.** Рассматривается область Земли — шар радиуса  $\hat{R}_1 = 6341$  км (радиус Земли  $\hat{R} = 6371$  км; верхняя граница области лежит на глубине  $\hat{R} - \hat{R}_1 = 30$  км). В предлагаемом решении она разбивается на 5 слоев, соответствующих принятым в геофизике слоям  $B, C, D$  в мантии, внешнему ядру  $E$  и внутреннему ядру  $G$ , с введением разрывов для определяющих состояние материала функций или их производных в граничных точках между слоями. Поверхностью разрыва заменяется также переходный между слоями  $E, G$  слой  $F$ . Разбиение осуществляется с использованием данных [1].

В соответствии с характером приведенных в [1] распределений плотности  $\hat{\rho}$  и скоростей распространения продольных и поперечных волн  $v_p, v_s$  в точках вдоль радиуса сжатой Земли  $\hat{r}$  (узлах) выбираются граничные точки между слоями  $A, B, C, D, E, G$  с радиальными координатами  $\hat{r}_A = \hat{R}_1 = 6341, \hat{r}_B = 5971, \hat{r}_C = 5371, \hat{r}_D = 3482, \hat{r}_E = 1211$  (км) ( $A$  — слой, лежащий выше поверхности  $\hat{r} = \hat{R}_1$ ; в [1] даются значения не радиусов, а глубин расположения узловых точек ( $\hat{R} - \hat{r}$ ), принимающих здесь для граничных точек значения 30, 400, 1000, 2889, 5160 километров соответственно). В граничной точке приведенные в [1] значения  $\hat{\rho}, v_p, v_s$ , если они не предполагаются непрерывными, считаются относящимися к нижележащему слою. Для разрывных  $\hat{\rho}, v_p, v_s$  значения в граничной точке, относящиеся к вышележащему слою, находятся экстраполяцией их значений в узлах этого слоя. Непрерывными являются  $v_p$  в точке  $\hat{r}_B$ ;  $\hat{\rho}$  — в  $\hat{r}_E$ ;  $\hat{\rho}, v_p, v_s$  — в  $\hat{r}_C$ , но допускается возможность разрывов производных от этих функций. При введении разрывов ни одно приведенное в [1] значение  $\hat{\rho}, v_p, v_s$  не исправляется. Добавляются предельные,

Таблица 1

## Характеристики Земли в сжатом и разгруженном состояниях

Узел	$\hat{r}$ , км	$\hat{r}'$	$\hat{\rho}$ , г/см <sup>3</sup>	$v_p$ , км/с	$v_s$ , км/с	$K$ , 10 <sup>5</sup> МПа	$\mu$ , 10 <sup>5</sup> МПа	$\nu$	$\rho$ , г/см <sup>3</sup>	$K_0$ , 10 <sup>5</sup> МПа	$\mu_0$ , 10 <sup>5</sup> МПа	$\nu_0$
1	6341	1	3,32	7,74	4,62	1,044	0,7086	0,2233	2,909	0,6335	0,6209	0,1306
2	6271	0,989	3,35	7,95	4,5	1,213	0,6784	0,2643	2,933	0,7341	0,594	0,1814
3	6171	0,9732	3,39	8,26	4,5	1,398	0,6865	0,289	2,945	0,8222	0,5963	0,208
4	6071	0,9574	3,42	8,59	4,5	1,6	0,6926	0,3109	2,953	0,9207	0,5979	0,2331
5	5971	0,9417	3,44	8,92	4,5	1,808	0,6966	0,3293	2,954	1,021	0,5982	0,2549
	5971	0,9417	3,77	8,92	4,72	1,88	0,8399	0,3056	3,222	1,044	0,7179	0,2203
6	5721	0,9022	4,17	10,48	5,8	2,71	1,403	0,2792	3,489	1,396	1,174	0,1717
7	5371	0,8471	4,54	11,44	6,36	3,493	1,836	0,2763	3,714	1,664	1,502	0,1531
8	4371	0,6893	5,09	12,79	6,92	5,077	2,437	0,2931	3,941	2,007	1,887	0,1421
9	3671	0,5789	5,4	13,61	7,26	6,208	2,846	0,3011	4,05	2,209	2,135	0,1345
10	3482	0,5491	5,695	13,64	7,3	6,549	3,036	0,2993	4,234	2,264	2,257	0,1259
	3482	0,5491	9,95	8,12	0	6,561	0,05	0,4962	7,813	2,72	0,0393	0,4928
11	2371	0,3739	11,39	9,53	0	10,34	0,05	0,4976	7,879	2,834	0,0346	0,4939
12	1211	0,191	12,74	10,347	0	13,64	0,05	0,4982	8,578	3,43	0,0337	0,4951
	1211	0,191	12,74	11,25	3,86	13,59	1,898	0,4333	8,557	3,393	1,275	0,333
13	0	0	13,03	11,25	2,91	15,02	1,103	0,4641	8,715	3,699	0,7379	0,4065

относящиеся к вышележащему слою значения в граничных точках  $\hat{r}_B$ ,  $\hat{r}_D$ ,  $\hat{r}_E$ . После выполнения экстраполяции узловые точки 3485 км, 1251 км, как слишком близко стоящие к точкам  $\hat{r}_D$ ,  $\hat{r}_E$ , в дальнейшем не используются.

По  $\hat{\rho}$ ,  $v_p$ ,  $v_s$  вычисляются модули сдвига и объемного сжатия материала в сжатом состоянии Земли [1]:

$$\mu = \hat{\rho}v_s^2, \quad K = \hat{\rho}(v_p^2 - 4v_s^2/3).$$

Во внешнем ядре (при  $v_s = 0$ ) нулевое значение для  $\mu$  заменяется на  $\mu = 5 \cdot 10^3$  МПа, существенно меньшее, чем в остальных слоях. Координаты узлов  $\hat{r}$ , значения  $\hat{r}' = \hat{r}/\hat{R}_1$ ,  $\hat{\rho}$ ,  $v_p$ ,  $v_s$ ,  $K$ ,  $\mu$  и коэффициента Пуассона  $\nu = (3K - 2\mu)/[2(3K + \mu)]$  в узлах даны в табл. 1. В слое  $B$  находятся узлы 1, 2, 3, 4, 5; в слое  $C$  — 5, 6, 7; в слое  $D$  — 7, 8, 9, 10; во внешнем ядре — 10, 11, 12; во внутреннем ядре — 12, 13. Граничными между слоями с координатами  $\hat{r}_A$ ,  $\hat{r}_B$ ,  $\hat{r}_C$ ,  $\hat{r}_D$ ,  $\hat{r}_E$  являются узлы 1, 5, 7, 10, 12 соответственно; узел 13 находится в центре  $\hat{r} = 0$ . В табл. 1, 2 для узлов 5, 10, 12 дается пара значений каждой величины, первое значение относится к вышележащему, второе — к нижележащему слою; если величина непрерывна, то для нее даются два одинаковых значения; в узле 7 величины непрерывны.

Таким образом, выполненное 5-слойное разбиение позволяет вместо приведенных в [1] участков быстрого изменения  $\hat{\rho}$ ,  $v_p$ ,  $v_s$ ,  $K$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  ввести поверхности разрыва этих величин и получить в каждом слое более гладкие распределения как этих величин, так и определяемых с их использованием искомым функций. Данные из [1] обсуждаются также в работах [2–4].

**2. Определяющие уравнения.** Предположим, что с устранением гравитационных сил во всей области материал может как изотропный гиперупругий [5] (адиабатически

или изотермически обратимым образом) перейти в состояние с нулевыми напряжениями и деформациями, причем без разрушения и нарушения сплошности материала. Отсюда следует непрерывность радиальных координат материальных точек в разгруженном и сжатом состояниях  $r \geq 0$ ,  $\hat{r} \geq 0$ , взаимно однозначная зависимость между ними  $\hat{r} = \hat{r}(r)$  и выполнение неравенства  $\hat{r}_{,r} > 0$ . Положение теории изотропных гиперупругих тел о соосности тензоров напряжений и деформаций в данной задаче выполняется в силу сферической симметрии.

Введем инварианты тензоров деформаций

$$J = (\varepsilon_m \varepsilon_n \varepsilon_l)^{1/2}, \quad \Upsilon = \frac{\varepsilon_m^2 + \varepsilon_n^2 + \varepsilon_l^2}{(\varepsilon_m + \varepsilon_n + \varepsilon_l)^2} - \frac{1}{3}, \quad I_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_m + \varepsilon_n + \varepsilon_l) \quad (2.1)$$

( $m, n, l$  — четная перестановка индексов 1, 2, 3).

Здесь и в дальнейшем  $\varepsilon_i$  — квадраты главных кратностей удлинений, т. е. отношения квадратов длин (текущих — к исходным) элементарных, проходящих вдоль главных осей тензоров деформаций материальных волокон, связанные с главными компонентами тензора деформаций Грина  $e_i$  равенствами  $\varepsilon_i = 1 + 2e_i$  (при нулевой деформации волокна  $\varepsilon_i = 1$ , с удлинением волокна  $\varepsilon_i > 1$  и возрастает, с укорочением волокна  $\varepsilon_i < 1$  и уменьшается);  $J$  — отношение элементарных объемов (текущего — к исходному) или якобиан преобразования исходных декартовых координат материальных точек в текущие (объемная деформация, равная  $(J - 1)$ , является сжатием при  $J < 1$  и расширением при  $J > 1$ );  $\Upsilon = I_2 I_1^{-2}$  принимает в пространстве с декартовыми координатами  $\varepsilon_i$  значение одной трети квадрата тангенса угла наклона радиус-вектора данной точки к лучу  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$ ;  $I_2$  — интенсивность сдвиговых деформаций. Выполняются неравенства  $\varepsilon_i > 0$ ,  $I_1 > 0$ ,  $0 \leq \Upsilon < 2/3$ ,  $J > 0$ . Индекс  $i$  принимает значения 1, 2, 3; переменная в нижнем индексе после запятой обозначает частное дифференцирование.

Главные компоненты тензора напряжений Коши (физические компоненты напряжений) в изотропных гиперупругих телах находятся из определяющих уравнений [6, 7]

$$\hat{\sigma}_i = \hat{\mu} \varepsilon_i (\varepsilon_i - \hat{\chi}) + p, \quad (2.2)$$

где  $\hat{\mu} = \beta I_1^{-2} J^{-1}$ ;  $\hat{\chi} = 2I_1(\Upsilon + 1/3)$ ;  $\beta = \Psi_{,\Upsilon}$ ;  $p = \Psi_{,J} = (\hat{\sigma}_m + \hat{\sigma}_n + \hat{\sigma}_l)/3$  — среднее напряжение (сжимающее давление при  $p < 0$  и расширяющее при  $p > 0$ );  $\Psi$  — задаваемая для материалов определяющая функция — плотность энергии деформации. В сферически симметричных состояниях напряжения и деформации во всех направлениях, ортогональных к радиальному, одинаковые:  $\hat{\sigma}_2 = \hat{\sigma}_3$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = (\hat{r}/r)^2$ , в радиальном направлении  $\varepsilon_1 = (\hat{r}_{,r})^2$ .

В адиабатических процессах  $\Psi$  определяется по приращению плотности внутренней энергии как функция  $\Upsilon$ ,  $J$ ,  $S$  при постоянной плотности энтропии на единицу объема недеформированного тела  $S$ , а в изотермических процессах — по приращению плотности свободной энергии как функция  $\Upsilon$ ,  $J$ ,  $T$  при постоянной абсолютной температуре  $T$ . Значения аргумента  $S$  в адиабатическом и аргумента  $T$  в изотермическом процессе могут быть в разных точках разными, но в каждой материальной точке они остаются постоянными. Поэтому  $\Psi$  зависит только от двух аргументов  $\Upsilon$ ,  $J$ . Входящие в выражение для  $\Psi$  модули сдвига и объемного сжатия  $\mu_0$ ,  $K_0$ , характеризующие материал в недеформированном состоянии, находятся из решения задачи по известным характеристикам материала в деформированном состоянии.

Используем зависимость давления от объемной деформации в виде закона Берча — Мурнагана [8, 9]

$$p = (3/2)K_0(J^{-5/3} - J^{-7/3}), \quad (2.3)$$

где  $K_0$  — модуль объемного сжатия материала в исходном недеформированном состоянии ( $p, J = K_0$  при  $J = 1$ ). С уменьшением объема давление  $p$  по абсолютной величине возрастает.

Из предположения о зависимости  $p$  только от  $J$  следует равенство нулю производных  $p, \Upsilon = \beta, J = 0$  и, значит, зависимость  $\beta$  только от одного аргумента  $\Upsilon$ . Из-за отсутствия данных о характере зависимости  $\beta$  от  $\Upsilon$  и с учетом малой изменчивости  $\Upsilon$  в качестве первого приближения считаем  $\beta$  постоянной с тем же значением, что и в законе Гука:  $\beta = 9\mu_0/4$ . В результате  $\Psi$  представляется в виде суммы двух слагаемых — плотностей энергий сдвиговых и объемных деформаций, зависящих каждое только от одного аргумента:

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2, \quad \Psi_1 = (9\mu_0/4)\Upsilon, \quad \Psi_2 = (9K_0/8)(1 - J^{-2/3})^2.$$

При стремлении деформаций к нулю  $\Psi$  непрерывно переходит в определяющую функцию закона Гука с теми же двумя константами материала, что и в законе Гука:  $\mu_0 = E_0/[2(1 + \nu_0)]$ ,  $K_0 = E_0/[3(1 - 2\nu_0)]$  ( $E_0$ ,  $\nu_0$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона для недеформированного материала).

Отметим, что условие постоянства или даже ограниченности  $\beta$  ведет при достаточно больших деформациях к существованию падающих диаграмм зависимости напряжений от деформаций.

**3. Связь характеристик упругости материала в деформированном и недеформированном состояниях.** В [1] вызываемые распространением продольных и поперечных волн приращения напряжений и деформаций связаны линейным законом Гука для изотропного материала с двумя константами — модулями сдвига и объемного сжатия  $\mu$ ,  $K$ . Для порождающих эти приращения компонент тензоров скоростей напряжений Яумана  $\hat{\Sigma}$  и скоростей деформаций  $\hat{\eta}$  соотношения закона Гука записываются в виде ( $m, n, l$  — четная перестановка индексов 1, 2, 3)

$$\hat{\Sigma}_{mm} = 2\mu\hat{\eta}_{mm} + (K - 2\mu/3)(\hat{\eta}_{mm} + \hat{\eta}_{nn} + \hat{\eta}_{ll}), \quad \hat{\Sigma}_{mn} = 2\mu\hat{\eta}_{mn}. \quad (3.1)$$

Установим связь  $\mu$ ,  $K$  с модулями сдвига и объемного сжатия  $\mu_0$ ,  $K_0$  недеформированного материала в соответствии с теорией изотропных гиперупругих тел [5–7].

Положим приращение давления  $\Delta p$  пропорциональным приращению объемной деформации, определяемому по отношению к величине текущего объема материала с коэффициентом — модулем объемного сжатия  $K$ :  $\Delta p = KJ^{-1}\Delta J$ . Устремляя приращение величины якобиана  $\Delta J$  к нулю, придем к равенству  $p, J = KJ^{-1}$ , совпадающему с приведенным в [1] (с учетом противоположного в [1] знака  $p$  и выражения  $J = \rho/\hat{\rho}$  через начальную и текущую плотности  $\rho$ ,  $\hat{\rho}$ ). Отсюда и из (2.3) следует соотношение, связывающее модули объемного сжатия в разгруженном и сжатом состояниях:  $K = (1/2)K_0(7J^{-7/3} - 5J^{-5/3})$ . С уменьшением объема сопротивление дополнительному деформированию возрастает:  $K \rightarrow \infty$  при  $J \rightarrow 0$ .

Перейдем к установлению связи между  $\mu$  и  $\mu_0$ . В изотропных гиперупругих телах недиагональные компоненты тензоров  $\hat{\Sigma}$ ,  $\hat{\eta}$  (которые здесь могут иметь иные значения, чем в (3.1)) удовлетворяют равенствам [6, 7]

$$\hat{\Sigma}_{mn} = B_l \hat{\eta}_{mn}, \quad B_l = \frac{9\mu_0(\varepsilon_m + \varepsilon_n)}{J(\varepsilon_m + \varepsilon_n + \varepsilon_l)^3} [2\varepsilon_m\varepsilon_n + (\varepsilon_m + \varepsilon_n)\varepsilon_l - \varepsilon_l^2]$$

с коэффициентами  $B_l$ , зависящими от текущего деформированного состояния материала. Учтем  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ ,  $B_2 = B_3$  и введем параметр  $\xi = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)/(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)$ . Проведенные вычисления показывают, что параметр  $\xi$  должен быть малым. При этом коэффициенты  $B_l > 0$ , их среднее значение  $(B_1 + 2B_2)/3$  близко к удвоенному значению  $\mu = \mu_0 J^{-1}$ , которое можно

принять как значение модуля сдвига материала в сжатом состоянии. Относительные величины разностей между  $B_1$ ,  $B_2$  и  $2\mu$  небольшие. Они достигают максимумов (до 20 %) вблизи граничной поверхности  $\hat{r} = \hat{R}_1$  и уменьшаются при приближении к внешнему ядру. При переходе из мантии во внешнее ядро относительные величины разностей возрастают скачкообразно, но ввиду малости  $\mu$  во внешнем ядре это возрастание несущественно и разностями можно пренебречь. Во внутреннем ядре разности пренебрежимо малы.

В уравнениях изотропных гиперупругих тел [6, 7], в отличие от уравнений (3.1), скорости напряжений  $\hat{\Sigma}_{mm}$  выражаются через скорости деформаций  $\hat{\eta}_{ii}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) с несимметричной матрицей коэффициентов, причем зависящей от текущего деформированного состояния материала. Разности между компонентами этой матрицы (вычисленной по результатам приведенного ниже решения с удовлетворением равенств  $\mu_0 = \mu J$ ,  $K_0 = 2K(7J^{-7/3} - 5J^{-5/3})^{-1}$ ) и соответствующими компонентами матрицы в (3.1) существенны лишь в мантии (относительные величины разностей между диагональными компонентами матриц не превышают 3 %, между недиагональными компонентами они достигают 40 % на граничной поверхности  $\hat{r} = \hat{R}_1$  и уменьшаются при приближении к внешнему ядру). В ядрах, внешнем и внутреннем, разностями между компонентами матриц можно пренебречь и считать применимыми уравнения (3.1).

Итак, полагая

$$\mu_0 = \mu J, \quad K_0 = 2K(7J^{-7/3} - 5J^{-5/3})^{-1}, \quad (3.2)$$

приходим к задаче: по известным в узлах с координатами  $\hat{r}$  значениям  $\mu$ ,  $K$  найти координаты узлов  $r$  и значения модулей  $\mu_0$ ,  $K_0$  недеформированного материала. Координаты  $r$  и  $\hat{r}$  ( $r' = r/R_1$ ,  $\hat{r}' = \hat{r}/\hat{R}_1$  — обезразмеренные координаты, отнесенные к радиусам граничной поверхности в разгруженном и сжатом состояниях шара  $R_1$ ,  $\hat{R}_1$ ) связываются через функцию  $\varepsilon_2$  равенствами

$$r' = \hat{r}'(\varepsilon_{2(A)}/\varepsilon_2)^{1/2}, \quad (3.3)$$

где  $\varepsilon_{2(A)} = (\hat{R}_1/R_1)^2$  — значение  $\varepsilon_2$  в точке  $\hat{r}' = r' = 1$ .

Значения  $\mu_0$ ,  $K_0$ ,  $r'$  находятся итерациями. На начальной итерации для якобиана  $J$  согласно (2.3), (3.2) берем значения

$$J = \left( \frac{3K + 7p}{3K + 5p} \right)^{3/2}$$

при давлении  $p = P$  ( $P > -3K/7$ ), определяемом по формуле чисто гидростатического сжатия; полагая  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_2 = J^{2/3}$ , находим  $\mu_0$ ,  $K_0$ ,  $r'$ . На остальных итерациях  $J$ ,  $\varepsilon_2$  берутся из решения задач равновесия, по формулам (3.2), (3.3) вычисляются  $\mu_0$ ,  $K_0$ ,  $r'$  (на второй итерации используем те же  $J$ , что и на первой итерации; берем только новые значения  $\varepsilon_2$ ).

На каждой итерации в слоях  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и во внешнем ядре модули  $\mu_0$ ,  $K_0$  аппроксимируются как функции  $r'$  проходящими через узловые значения интерполяционными полиномами, плотность  $\hat{\rho}$  и заключенная в шаре радиуса  $\hat{r}$  масса  $M$  — интерполяционными функциями второго порядка. Уточним, что в слое  $B$  для подавления волнообразного изменения  $\mu_0$ ,  $K_0$  на полиномы дополнительно налагаются условия равенства заданным значениям производных  $\mu_{0,r'}$ ,  $K_{0,r'}$  в граничной точке  $\hat{r}_B$ , а для  $\hat{\rho}$  берется интерполяционная функция первого порядка. Во внутреннем ядре для аппроксимации  $\mu_0$ ,  $K_0$ ,  $\hat{\rho}$ ,  $M$  используются кубические полиномы с равными нулю производными по  $r'$  первого и второго порядков в центре  $r' = 0$ . Полиномы третьей степени берутся для обеспечения при вычислениях по заданному алгоритму требуемой сферической симметричностью задачи

малости производных от искомым функций по  $r'$  при приближении к центру. В результате находятся  $\mu_0$ ,  $K_0$ ,  $\hat{\rho}$ ,  $M$  как функции  $r'$  с разрывами самих этих функций или их производных в граничных точках между слоями.

В процессе итераций разности итераций  $\mu_0$ ,  $K_0$ ,  $r'$  в узлах монотонно уменьшаются. На последней выполненной итерации относительные величины разностей между значениями  $\mu$ ,  $K$ ,  $\hat{r}'$ , приведенными в табл. 1 и вычисленными по формулам  $\mu = \mu_0 J^{-1}$ ,  $K = (1/2)K_0(7J^{-7/3} - 5J^{-5/3})$ ,  $\hat{r}' = r'(\varepsilon_2/\varepsilon_{2(A)})^{1/2}$ , возрастаая при приближении к центру  $r' = 0$ , во всей области не превышают  $1,25 \cdot 10^{-4}$ ;  $4 \cdot 10^{-4}$ ;  $3 \cdot 10^{-5}$  соответственно.

**4. Решение задачи.** Для сферически симметричных состояний уравнение равновесия представляется в виде

$$\hat{\sigma}_{1,\hat{r}} + \frac{2}{\hat{r}}(\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2) + \hat{q} = 0 \quad \left( \hat{q} = -\frac{\gamma M \hat{\rho}}{\hat{r}^2}, \quad M = 4\pi \int_0^{\hat{r}} \hat{\rho} \hat{r}^2 d\hat{r} \right). \quad (4.1)$$

Здесь  $\hat{q}$  — действующая на единицу объема деформированного материала, направленная к центру Земли, сила гравитационного притяжения со стороны всего Земного шара;  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/(\text{г} \cdot \text{с}^2)$  — гравитационная постоянная.

Проинтегрируем уравнение (4.1) по слою  $A$  до поверхности  $\hat{r} = \hat{R}$ , где предполагается  $\hat{\sigma}_1 = 0$ . Учитывая относительную малость толщины слоя и опуская интеграл от второго слагаемого в (4.1), найдем величину

$$\hat{\sigma}_1 = P_1 = - \int_{\hat{R}_1}^{\hat{R}} \frac{\gamma M \hat{\rho}}{\hat{r}^2} d\hat{r} \quad \text{при} \quad \hat{r} = \hat{R}_1, \quad (4.2)$$

которую примем как действующее со стороны слоя  $A$  на нижележащую область Земли радиальное напряжение. Для его оценки берем среднее значение плотности в слое  $A$ :  $\hat{\rho} = 2,84 \text{ г/см}^3$ , тогда  $P_1 = -0,8409 \cdot 10^3 \text{ МПа}$ .

Интегрируя уравнение (4.1) от  $\hat{r}$  до  $\hat{R}_1$ , с учетом (4.2) получаем

$$\hat{\sigma}_1 = P + \int_{\hat{r}}^{\hat{R}_1} \frac{2}{\hat{r}}(\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2) d\hat{r}, \quad P = - \int_{\hat{r}}^{\hat{R}} \frac{\gamma M \hat{\rho}}{\hat{r}^2} d\hat{r} \quad (0 \leq \hat{r} \leq \hat{R}_1), \quad (4.3)$$

где  $P$  — давление чисто гидростатического сжатия (определяемое здесь с противоположным, чем в [1], знаком:  $P < 0$ ). Напряженное состояние не является близким к чисто гидростатическому сжатию. Окружные напряжения на поверхности  $\hat{r} = \hat{R}_1$ , как показывает решение, в 19 раз превышают радиальное напряжение; почти во всей области  $\hat{\sigma}_2 < \hat{\sigma}_1 < 0$  интеграл в правой части первого равенства в (4.3) положителен. Поэтому  $P$  дает лишь оценку сверху для радиальных напряжений  $P \leq \hat{\sigma}_1 < 0$ .

Для решения задач равновесия удобно перейти в (4.1) к другой независимой переменной — исходной радиальной координате  $r$  ( $0 \leq r \leq R_1$ ):

$$\hat{\sigma}_{1,r} + \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{r\sqrt{\varepsilon_2}}(\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2) - \frac{\gamma M \hat{\rho} \sqrt{\varepsilon_1}}{\varepsilon_2 r^2} = 0 \quad \left( M = 4\pi \int_0^{\hat{r}} \hat{\rho} \hat{r}^2 d\hat{r} \right). \quad (4.4)$$

Здесь  $\hat{\rho}$ ,  $M$  интерполяцией их известных значений в узлах представляются функциями  $r$ . Удовлетворяются условия непрерывности  $\hat{\sigma}_1$ ,  $\hat{r}$  в граничных точках между слоями и равенство  $\hat{\sigma}_1 = P_1$  при  $r = R_1$ ; в центре  $\hat{r} = r = 0$ .

Если в (4.4) положить  $\hat{\rho} = \rho J^{-1}$  и считать плотность в недеформированном состоянии  $\rho$  известной, то придем к уравнению

$$\hat{r}^2 \hat{\sigma}_{1,r} + (\hat{r}^2)_{,r} (\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2) - \frac{\gamma M \rho r^2}{\hat{r}^2} = 0 \quad \left( M = 4\pi \int_0^r \rho r^2 dr \right), \quad (4.5)$$

которое, в отличие от уравнений (4.1), (4.4), с учетом (2.2) следует из условия стационарности функционала

$$\Pi = \int_0^{R_1} \left( \Psi - \frac{\gamma M \rho}{\hat{r}} \right) r^2 dr - \frac{1}{3} P_1 \hat{R}_1^3.$$

В [7] задача о гравитационном сжатии шара при постоянных  $\rho$ ,  $\mu_0$ ,  $K_0$ , в отличие от данной работы, решается с использованием уравнения (4.5).

Обратимся к вычислению  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  на поверхности  $\hat{r} = \hat{R}_1$ . Подставим в равенство  $\hat{\sigma}_1 = P_1$  выражение для радиального напряжения, следующее из (2.1)–(2.3) при  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ , получим уравнение

$$\frac{9\mu_0 f}{4J} + \frac{3}{2} K_0 (J^{-5/3} - J^{-7/3}) = P_1 \quad \left( f = \frac{16\xi(\xi^2 - 1)}{(3 + \xi)^3}, \quad \xi = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \right), \quad (4.6)$$

имеющее при  $\mu_0 > 0$ ,  $K_0 > 0$ ,  $P_1 < 0$ ,  $-1 < \xi < 0$ ,  $f > 0$ ,  $0 < J < 1$  единственный вещественный корень  $J$ . Определив  $J$ , найдем

$$\varepsilon_1 = J^{2/3} \left( \frac{1 - \xi}{1 + \xi} \right)^{2/3}, \quad \varepsilon_2 = J^{2/3} \left( \frac{1 + \xi}{1 - \xi} \right)^{1/3}. \quad (4.7)$$

Диаграммы зависимости  $p$ ,  $\hat{\sigma}_2$  от  $\xi$  переходят в падающие при  $\xi = \xi_* = -(1 + 2\sqrt{7})/9 \approx -0,699$  (в этой точке  $f$  принимает максимальное значение). Ветвление решений уравнений (2.2) исключается, если  $\xi > \xi_{**} = 3 - 2\sqrt{3} \approx -0,464$  [7], что в рассматриваемой задаче выполняется.

Из задания на граничной поверхности величин  $\mu$ ,  $K$  вытекают ограничения на параметр  $\xi$ . Подставив в (4.6) выражения для  $\mu_0$ ,  $K_0$  из (3.2), придем к уравнению

$$\frac{9\mu f}{4} + \frac{3K(J^{2/3} - 1)}{7 - 5J^{2/3}} = P_1,$$

которое удовлетворяется при  $0 < J < 1$ , только если  $f < 4(3K + 7P_1)/(63\mu)$ . Отсюда следует  $\xi > -0,363$ , что в рассматриваемой задаче выполняется.

Если принять, что модуль сдвига при деформировании не меняется (т. е.  $\mu = \mu_0$ ), то это ведет к нарушению краевых условий на поверхности  $\hat{r} = \hat{R}_1$ . Действительно, тогда должно было бы выполняться уравнение

$$\frac{9\mu f}{4J} + \frac{3K(J^{2/3} - 1)}{7 - 5J^{2/3}} = P_1,$$

имеющее в интервале  $0 < J < 1$  два корня вместо одного при  $f < 0,0956$ ,  $\xi > -0,1424$  и не имеющее корней, когда  $\xi < -0,1424$ .

Для решения задач равновесия применяем следующий алгоритм. Подставляем в (4.4) получаемые из (2.1)–(2.3) при  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$  выражения

$$\hat{\sigma}_1 = \frac{18\mu_0 \sqrt{\varepsilon_1} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)^3} + \frac{3}{2} K_0 (J^{-5/3} - J^{-7/3}), \quad \hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2 = \frac{27\mu_0 \sqrt{\varepsilon_1} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)^3}.$$

Присоединяя к (4.4) равенство  $\varepsilon_{2,r} = (2/r)(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2} - \varepsilon_2)$ , приходим к системе дифференциальных уравнений первого порядка относительно  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

$$\varepsilon_{1,r'} + \frac{1}{f_1} \left( f_2 + \frac{f_3}{r'} - \frac{\alpha f_4}{r'^2} \right) = 0, \quad \varepsilon_{2,r'} - \frac{f_5}{r'} = 0 \quad (0 \leq r' \leq 1), \quad (4.8)$$

в которой

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{9\mu_0(11\varepsilon_1\varepsilon_2 - 3\varepsilon_1^2 - 2\varepsilon_2^2)}{\sqrt{\varepsilon_1}(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)^4} + \frac{K_0}{4\varepsilon_1} (7J^{-7/3} - 5J^{-5/3}), \quad J = \varepsilon_2\sqrt{\varepsilon_1}, \\ f_2 &= \frac{18\sqrt{\varepsilon_1}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)^3} \mu_{0,r'} + \frac{3}{2} (J^{-5/3} - J^{-7/3}) K_{0,r'}, \quad f_5 = 2(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2} - \varepsilon_2), \\ f_3 &= \left[ \frac{18\mu_0\sqrt{\varepsilon_1}(4\varepsilon_2 - 7\varepsilon_1)}{(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)^4} + \frac{K_0}{2\varepsilon_2} (7J^{-7/3} - 5J^{-5/3}) \right] f_5 + \frac{54\mu_0\varepsilon_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\sqrt{\varepsilon_2}(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)^3}, \\ f_4 &= \frac{M\hat{\rho}\sqrt{\varepsilon_1}}{\varepsilon_2}, \quad M = 3 \int_0^{\hat{r}'} \hat{\rho}\hat{r}'^2 d\hat{r}', \quad \alpha = \alpha_1\varepsilon_{2(A)}^{1/2}, \quad \alpha_1 = \frac{4\pi G}{3\mu_*} \rho_*^2 \hat{R}_1^2; \end{aligned}$$

$\alpha_1, \alpha$  — безразмерные постоянные, причем в выражение  $\alpha$  включается значение искомой функции  $\varepsilon_2 = \varepsilon_{2(A)}$  при  $r' = 1$ , которое должно определяться из решения задачи; произведен переход к безразмерным величинам:  $\hat{\rho}, \rho$  даются отнесенными к  $\rho_*$ ;  $\mu_0, K_0$  — к  $\mu_*$ ;  $M$  — к  $(4/3)\pi\hat{R}_1^3\rho_*$  ( $\rho_* = 1$  г/см<sup>3</sup>,  $\mu_* = 10^5$  МПа). Для представления  $\hat{\rho}, M$  функциями  $r'$  интерполируются известные значения этих величин в узлах с определением координат узлов  $r'$  по  $\hat{r}'$  по имеющейся на итерации зависимости  $r'(r')$ . Удовлетворяются краевые условия  $\hat{\sigma}_1 = P_1$  при  $r' = 1$ ;  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  при  $r' = 0$  и условия непрерывности  $\hat{\sigma}_1, \varepsilon_2$  в граничных точках между слоями.

Решение системы (4.8), удовлетворяющее заданным краевым условиям, находится методом Рунге — Кутты как решение задачи с начальными условиями, получаемыми в точке  $r' = 1$  при задании значения параметра  $\xi$ . При каждом  $\xi$  по формулам (4.6), (4.7) определяются  $J, \varepsilon_1, \varepsilon_2 = \varepsilon_{2(A)}$  при  $r' = 1$  и значения констант  $\alpha_1, \alpha$ . Методом Рунге — Кутты вычисления ведутся, начиная от точки  $r' = 1$  в направлении к точке  $r' = 0$ . В каждом слое, вычислив  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ , из условия непрерывности  $\hat{\sigma}_1, \varepsilon_2$  в граничной точке с нижележащим слоем находятся значения  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  в этой точке для нижележащего слоя и затем продолжают вычисления в этом слое. Для исключения неопределенности  $0 : 0$  в центре  $r' = 0$  вычисление во внутреннем ядре ведется только до точки  $r'_\delta = 0,0005$ . Итерациями находится  $\xi$ , обеспечивающее вычисление  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  до точки  $r'_\delta$ , в которой с достаточной точностью выполняется равенство  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ . Следует сказать, что значение  $\xi$  должно определяться с высокой точностью (15–18 цифр после запятой для достижения малости разности  $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$  порядка  $10^{-6}$  в точке  $r'_\delta$ ). Погрешности решений уравнений (4.8) (значения левых частей этих уравнений) представляются осциллирующими функциями  $r'$  с достаточно малыми амплитудами осцилляций, меньшими на средних участках слоев и возрастающими при приближении к граничным точкам между слоями. Интегралы от левых частей уравнений (4.8) в каждом слое  $B, C, D, E, G$ , вычисляемые от переменной точки  $r'$  в слое до верхней границы слоя, имеют порядок не ниже  $10^{-6}$ .

Таким образом, правильность найденных изложенным алгоритмом решений задач равновесия подтверждается удовлетворением с достаточно малыми погрешностями как самих уравнений (4.8), так и получаемых из них интегрированием по  $r'$  интегральных равенств.

Отметим, что численное решение во внешнем ядре, найденное при заданном малом модуле сдвига  $\mu$ , незначительно отличается от аналитического при  $\mu = 0$ , определяемого по формулам

$$p = \hat{\sigma}_1 = \hat{\sigma}_2 = (\hat{\sigma}_1 - P)_{\hat{r}=\hat{r}_D} + P, \quad J = \left( \frac{3K + 7p}{3K + 5p} \right)^{3/2},$$

$$\varepsilon_2 = \hat{r}^2 \left\{ \int_{\hat{r}_D}^{\hat{r}} 3\hat{r}^2 J^{-1} d\hat{r} + [(\hat{r}^{-2} \varepsilon_2)_{\hat{r}=\hat{r}_D}]^{-3/2} \right\}^{-2/3}, \quad \varepsilon_1 = \left( \frac{J}{\varepsilon_2} \right)^2,$$

где берутся значения  $P$ ,  $\hat{\sigma}_1$ ,  $\varepsilon_2$ , вычисленные в мантии на границе с внешним ядром  $\hat{r} = \hat{r}_D$ . Этому решению соответствуют во внешнем ядре значения плотности  $\rho = J\hat{\rho}$ , модуля  $K_0 = 2K(7J^{-7/3} - 5J^{-5/3})^{-1}$  и радиальной координаты  $r' = \hat{r}'(\varepsilon_{2(A)}/\varepsilon_2)^{1/2}$ , близкие к данным табл. 1.

В табл. 1 приведены значения плотности  $\rho$ , модулей сдвига и объемного сжатия  $\mu_0$ ,  $K_0$  и коэффициента Пуассона  $\nu_0$  недеформированного материала. Рассмотрим распределения этих величин на отрезке  $0 < \hat{r}' < 1$ . Модуль объемного сжатия  $K_0$  с глубиной в основном возрастает. Характерны малое скачкообразное уменьшение  $K_0$  при переходе из внешнего во внутреннее ядро и наличие слабого минимума во внешнем ядре вблизи границы с мантией. При переходе из мантии во внешнее ядро скачкообразное возрастание у  $K_0$  существенно больше, чем у  $K$ .

Распределения  $\mu_0$ ,  $\nu_0$  и  $\mu$ ,  $\nu$  аналогичны. Коэффициент Пуассона  $\nu_0$  в слоях  $B$  и  $C$  принимает максимальные значения в пределе при приближении к граничной точке между этими слоями, в которой  $\nu_0$  скачкообразно уменьшается при переходе из  $B$  в  $C$ ; в слое  $D$  значение  $\nu_0$  на большей части слоя изменяется слабо, возрастая при подходе к слою  $C$  и уменьшаясь при приближении к внешнему ядру. Во внешнем ядре коэффициент Пуассона  $\nu_0$  (так же как и  $\nu$  в сжатом состоянии Земли) близок к 0,5. Во всей области определения решения  $0 < \nu_0 < 0,5$ .

Плотность материала в разгруженном состоянии  $\rho$  с глубиной в основном возрастает. Она имеет несколько большее, чем у  $\hat{\rho}$ , скачкообразное возрастание на границе мантии и ядра. Характерны слабые минимумы  $\rho$  в слое  $D$ , во внешнем ядре, центре  $\hat{r}' = 0$  и малое скачкообразное уменьшение при переходе из внешнего во внутреннее ядро.

На рис. 1–5 диаграммы, представляющие зависимости функций от  $\hat{r}'$ , претерпевают разрывы в граничных точках между слоями  $B$  и  $C$ , мантией и внешним ядром, внешним и внутренним ядрами при скачкообразном изменении представляемых функций в этих граничных точках. Значения  $\hat{\sigma}_1$ ,  $\hat{\sigma}_2$ ,  $P$ ,  $\Psi$ ,  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$  на рисунках даются отнесенными к  $\mu_*$ .

На рис. 1 показаны зависимости напряжений  $\hat{\sigma}_1$ ,  $\hat{\sigma}_2 = \hat{\sigma}_3$  и давления чисто гидростатического сжатия  $P$  от  $\hat{r}'$ . Радиальное напряжение  $\hat{\sigma}_1$  (сплошная кривая) изменяется непрерывно и с глубиной возрастает. Окружные напряжения  $\hat{\sigma}_2$  (штриховая кривая) внутри слоев с глубиной возрастают; при переходе из слоя  $B$  в слой  $C$  они скачкообразно возрастают, а при переходе из мантии во внешнее ядро и из внешнего во внутреннее ядро скачкообразно уменьшаются. В мантии  $\hat{\sigma}_1$  и  $\hat{\sigma}_2$  существенно разные по величине; на граничной поверхности  $\hat{r}' = 1$  окружные напряжения почти в 19 раз больше радиального напряжения. С возрастанием глубины разность напряжений  $(\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2)$ , ненамного уменьшаясь в слое  $B$ , скачкообразно возрастает при переходе в слой  $C$  и, продолжая возрастать, достигает максимума в слое  $D$ , а затем в мантии уменьшается. На границе с внешним ядром  $\hat{\sigma}_2$  в мантии все еще примерно на 22 % больше  $\hat{\sigma}_1$ . В ядре реализуется напряженное состояние с почти одинаковыми напряжениями  $\hat{\sigma}_1 \approx \hat{\sigma}_2 \approx p$ . Давление чисто гидростатического сжатия  $P$  (на рис. 1 показано точками) в мантии с глубиной возрастает

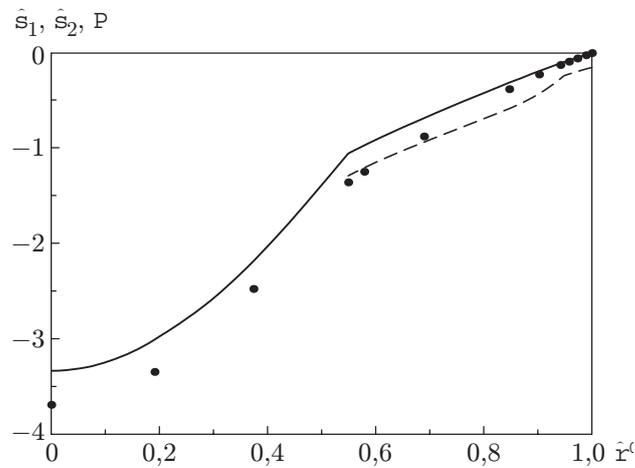


Рис. 1

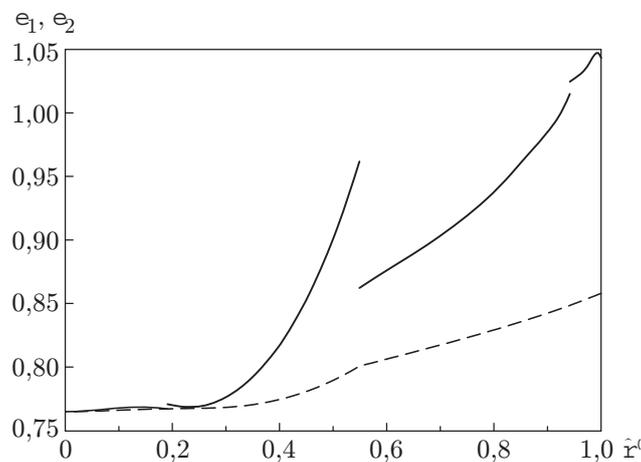


Рис. 2

тает и приближается по величине к  $\hat{\sigma}_2$ . В ядре напряжения меньше  $P$ , причем в центре примерно на 10 %.

Переменность  $\mu_0$ ,  $K_0$ ,  $\rho$  обуславливает сложный характер распределения деформаций вдоль радиуса Земли, развивающихся в случае осуществления адиабатического или изотермического процесса снятия напряжений. На рис. 2 сплошной и штриховой кривыми показаны квадраты главных кратностей удлинений  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  как функции  $\hat{r}'$  (при рассмотрении деформированного состояния следует иметь в виду, что в радиальных и окружных волокнах ( $i = 1, 2$ ) в случае деформации удлинения  $\epsilon_i > 1$  при снятии напряжений развивается укорочение, а в случае деформации укорочения  $\epsilon_i < 1$  происходит удлинение; при объемной деформации сжатия  $J < 1$  в процессе снятия напряжений происходит увеличение объема материала, причем тем большее, чем сильнее сжатие). В окружном направлении имеем деформацию укорочения  $\epsilon_2 < 1$  (штриховая кривая), с возрастанием глубины  $\epsilon_2$  изменяется непрерывно и уменьшается. Отметим значительную деформацию укорочения окружных волокон  $\epsilon_2 = 0,8579$  на поверхности  $\hat{r}' = 1$ ; в центре  $\epsilon_1 = \epsilon_2 \approx 0,7648$ .

В радиальном направлении в мантии до глубины 506 км (отсчитываемой от поверхности  $\hat{r} = \hat{R}$ ) имеем деформацию удлинения  $\epsilon_1 > 1$  (сплошная кривая на рис. 2), причем в слое  $B$  значение  $\epsilon_1$  и удлинение радиальных волокон с глубиной возрастают от  $\epsilon_1 = 1,0431$  при  $\hat{r}' = 1$  до максимума  $\epsilon_1 = 1,0473$  на глубине 71,7 км, после чего  $\epsilon_1$  в мантии уменьшается. При переходе из мантии во внешнее ядро значение  $\epsilon_1$  скачкообразно возрастает,

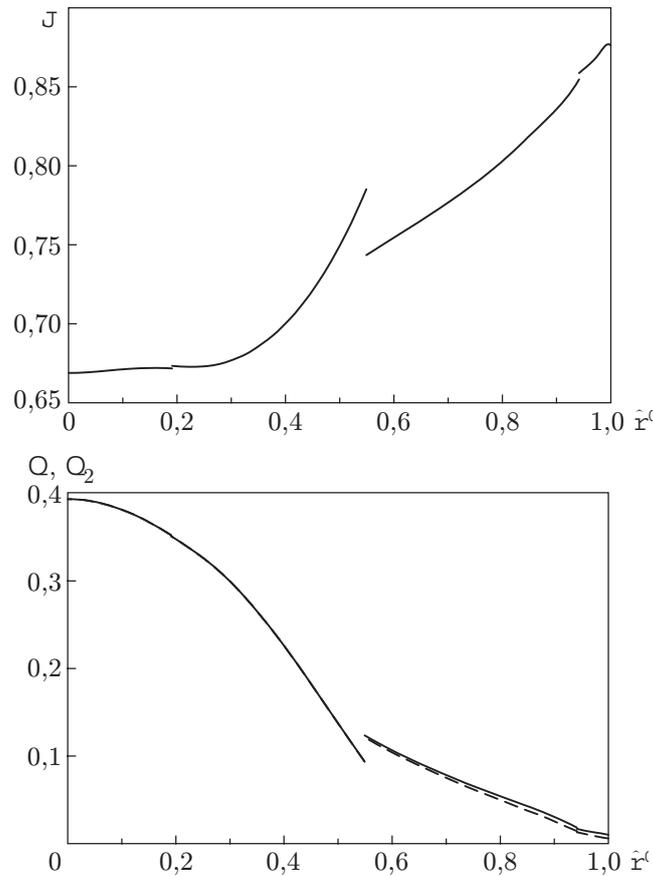


Рис. 3

Рис. 4

радиальная деформация во внешнем ядре, несмотря на почти равные напряжения  $\hat{\sigma}_1 \approx \hat{\sigma}_2$ , существенно меньше окружной. С возрастанием глубины  $\varepsilon_1$  уменьшается, сближаясь с  $\varepsilon_2$ . Имеется минимум  $\varepsilon_1$  около границы с внутренним ядром. При переходе во внутреннее ядро  $\varepsilon_1$  скачкообразно уменьшается.

Во внутреннем ядре при близости значений  $\varepsilon_1 \approx \varepsilon_2$  можно отметить непростой характер изменения величины  $\varepsilon_1$ , которая, практически совпадая с  $\varepsilon_2$  на границе с внешним ядром, с удалением от границы возрастает, достигает максимума и после этого уменьшается, приближаясь к  $\varepsilon_2$ . Значение  $\varepsilon_2$  во внутреннем ядре монотонно уменьшается.

Во всем шаре происходит объемная деформация сжатия  $J < 1$  (рис. 3), однако сжатие минимально не на поверхности  $\hat{r}' = 1$ , где  $J = 0,8762$ , а на глубине 56,8 км при  $J = 0,8771$ . Характерно скачкообразное уменьшение  $J$  при переходе из слоя  $B$  в слой  $C$  и из внешнего во внутреннее ядро и скачкообразное возрастание  $J$  при переходе из мантии во внешнее ядро. Имеются минимум  $J$  во внешнем ядре вблизи границы с внутренним ядром и локальный максимум  $J$  во внутреннем ядре. Максимальное сжатие достигается в центре  $\hat{r}' = 0$ , где  $J \approx 0,6689$ .

Величина  $\Upsilon$  характеризует интенсивность сдвиговых деформаций. В слое  $B$  она возрастает с глубиной от  $\Upsilon = 0,003004$  на поверхности  $\hat{r}' = 1$  до максимума во всем шаре  $\Upsilon = 0,00318$  на глубине 81,6 км, после чего  $\Upsilon$  в мантии уменьшается. Значение  $\Upsilon$  скачкообразно уменьшается при переходе из слоя  $B$  в слой  $C$  и скачкообразно возрастает при переходе из мантии во внешнее ядро. Во внешнем ядре  $\Upsilon$  с глубиной уменьшается, достигает минимума вблизи границы с внутренним ядром, ненамного возрастает и скачкообразно

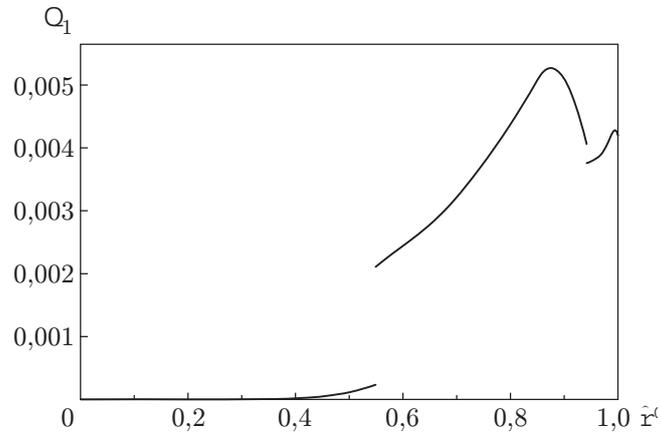


Рис. 5

уменьшается при переходе во внутреннее ядро. Во внутреннем ядре  $\Upsilon$  пренебрежимо мало при наличии здесь локального максимума.

Плотности энергий деформаций  $\Psi$ ,  $\Psi_2$  (представлены сплошной и штриховой кривыми на рис. 4) с увеличением глубины возрастают всюду, за исключением точки перехода из мантии во внешнее ядро, где они скачкообразно уменьшаются. Плотность энергии сдвиговых деформаций  $\Psi_1 = \Psi - \Psi_2$  (рис. 5) изменяется более сложным образом. Она имеет максимумы: меньший  $\Psi_1 = 428$  МПа — на глубине 64,3 км и больший  $\Psi_1 = 527$  МПа — на глубине 821,8 км. Характерно существенное скачкообразное уменьшение  $\Psi_1$  при переходе из мантии во внешнее ядро. Вклад  $\Psi_1$  в величину  $\Psi$  составляет 41 % на границе  $\hat{r}' = 1$  и с возрастанием глубины в мантии уменьшается. В ядре, внешнем и внутреннем,  $\Psi_1$  и ее вклад в  $\Psi$  пренебрежимо малы.

В табл. 2 приведены значения  $r'$ ,  $(r - \hat{r})$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $J$ ,  $\hat{\sigma}_1$ ,  $\hat{\sigma}_2$ ,  $p$ ,  $P$ ,  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$  в узлах, причем для центра берутся приблизительные значения, вычисленные в близкой точке  $r' = 0,001$ . Величины разностей  $(r - \hat{r})$  представляют приращения координат узлов при переходе из сжатого в разгруженное состояние. Так, радиус граничной поверхности  $\hat{R}_1 = 6341$  км возрастает до  $R_1 = 6846$  км, т. е. на  $R_1 - \hat{R}_1 = 505$  км.

**Выводы.** 1. Получены при адиабатическом или изотермическом процессе снятия напряжений распределения модулей сдвига и объемного сжатия  $\mu_0$ ,  $K_0$  и плотности материала  $\rho$  в недеформированном состоянии.

2. С учетом теории изотропных гиперупругих тел следует существование в мантии анизотропии сопротивления материала дополнительному деформированию, что влияет на распространение порождаемых сейсмическими возмущениями объемных волн.

3. Установлено существенное отличие напряженного состояния в мантии от состояния чисто гидростатического сжатия. Окружные напряжения на верхней границе области значительно превышают радиальное напряжение, что приводит к сильному сжатию окружных волокон на этой границе. В центре Земли давление примерно на 10 % меньше давления чисто гидростатического сжатия.

4. В мантии до глубины 506 км имеем радиальные деформации не укорочения, а удлинения, которые достигают максимума на глубине 71,7 км. Во внешнем ядре у границы с мантией (хотя напряжения  $\hat{\sigma}_1 \approx \hat{\sigma}_2$ ) радиальная и окружные деформации существенно разные.

5. Во всей области происходит объемная деформация сжатия ( $J < 1$ ), но сжатие с глубиной начиная от граничной поверхности не возрастает, а уменьшается и достигает минимума на глубине 56,8 км, затем сжатие в мантии возрастает. Максимальная объемная

Таблица 2

## Напряженное и деформированное состояние

Узел	$r'$	$r - \hat{r}$ , км	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$J$	$\hat{\sigma}_1$ , $10^3$ МПа	$\hat{\sigma}_2$ , $10^3$ МПа	$P$ , $10^3$ МПа	$\Psi_1$ , $10^3$ МПа	$\Psi_2$ , $10^3$ МПа
1	1	505	1,0431	0,8579	0,8762	-0,841	-15,94	-0,841	0,4197	0,6045
2	0,990	506,6	1,0461	0,8561	0,8756	-2,82	-17,67	-3,15	0,4229	0,7079
3	0,9757	508,6	1,0359	0,8535	0,8687	-5,69	-20,17	-6,494	0,3953	0,8955
4	0,9613	510,2	1,0292	0,851	0,8633	-8,61	-22,94	-9,887	0,382	1,098
5	0,9469	511,5	1,0245	0,8484	0,8577	-11,57	-25,85	-13,32	0,3758	1,311
	0,9469	511,5	1,015	0,8484	0,8547	-11,57	-27,84	-13,32	0,4061	1,429
6	0,9104	511,3	0,9859	0,8427	0,8367	-19,82	-43,46	-23,31	0,5062	2,502
7	0,8585	506,4	0,9594	0,8351	0,818	-31,9	-59,06	-38,69	0,5035	3,846
8	0,7068	467,5	0,9001	0,8161	0,7742	-69,11	-94,12	-88,22	0,3114	7,812
9	0,5981	423,4	0,8704	0,8039	0,75	-97,46	-121	-125,1	0,2309	11,11
10	0,5684	409,3	0,8621	0,8007	0,7434	-106,1	-129,4	-136,3	0,2107	12,16
	0,5684	409,3	0,9617	0,8007	0,7852	-106,1	-107,1	-136,3	$2,324 \cdot 10^{-2}$	9,363
11	0,3942	327,5	0,8028	0,772	0,6917	-218,7	-218,9	-247,9	$8,9 \cdot 10^{-4}$	24,73
12	0,202	171,8	0,7707	0,767	0,6733	-300,1	-300,2	-334,8	$1,3 \cdot 10^{-5}$	35,13
	0,202	171,8	0,767	0,767	0,6717	-300,1	-300,1	-334,8	$1,4 \cdot 10^{-9}$	35,23
13	0	0	0,7648	0,7648	0,6689	-333,5	-333,5	-369,1	0	39,35

деформация сжатия осуществляется в центре Земли.

6. Плотность энергии сдвиговых деформаций  $\Psi_1$  вносит существенный вклад в величину полной плотности энергии деформаций  $\Psi$  вблизи граничной поверхности. С возрастанием глубины вклад  $\Psi_1$  быстро уменьшается и в ядре становится пренебрежимо малым. Максимумы  $\Psi_1$  достигаются на глубинах 64,3 км (меньший максимум) и 821,8 км (большой).

7. Используемый алгоритм позволяет получить решение задачи равновесия с высокой точностью, что подтверждается удовлетворением с достаточно малыми погрешностями условий задачи.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Буллен К. Е. Плотность Земли. М.: Мир, 1978.
2. Jeffreys Sir H. The Earth. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1970.
3. Dziewonsky A. M., Gilbert F. Observations of normal modes from 84 recordings of the Alaskan earthquakes of 1964 March 28, II. Further remarks based on new spheroidal overtone data // Geophys. J. Astr. Soc. 1973. V. 35. P. 401–437.
4. Jordan T. N., Anderson D. L. Earth structure from free oscillations and travel times // Geophys. J. Astr. Soc. 1974. V. 36. P. 411–459.
5. Солодовников В. Н. Определяющие уравнения изотропного гиперупругого тела // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 6. С. 178–183.
6. Солодовников В. Н. Устойчивость деформирования изотропных гиперупругих тел // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 6. С. 142–151.

7. **Солодовников В. Н.** К теории деформирования изотропных гиперупругих тел // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 1. С. 99–106.
8. **Birch F.** Elasticity and constitution of the Earth's interior // Geophys. Res. 1952. V. 57. P. 227–286.
9. **Murnaghan F. D.** Finite deformation of unelastic solid. N. Y.: John Wiley and Sons, 1951.

*Поступила в редакцию 3/XI 2003 г.,  
в окончательном варианте — 10/II 2004 г.*

---