

УДК 537.527

Численное моделирование нестационарного нагрева и плавления анода электрической дугой. Часть 1. Математическая модель и расчетные характеристики столба дуги

Р.М. Урусов, Ф.Р. Султанова, Т.Э. Урусова

*Институт физико-технических проблем и материаловедения
НАН КР, Бишкек, Кыргызстан*

E-mail: urusov_rus@mail.ru

Рассмотрены двумерная математическая модель в приближении частичного локального термодинамического равновесия плазмы и методика численного расчета характеристик нестационарной электрической дуги, включая сопряженный теплообмен потока электродуговой плазмы с обрабатываемым изделием (анодом). Результаты тестирования вычислительного алгоритма свидетельствуют в целом о корректности модели и методики расчета. Представлены результаты расчета характеристик дуги с условного момента зажигания до выхода на стационарный режим. Выявлено, что вокруг столба дуги формируется одиночный тепловой тор, который достаточно быстро рассеивается в окружающей среде.

Ключевые слова: электрическая дуга, численное моделирование, двумерная нестационарная математическая модель, сопряженный теплообмен с обрабатываемым изделием.

ВВЕДЕНИЕ

Электрическая дуга находит широкое применение при сварке, резке и плавлении металлов [1–3]. Данные процессы сопровождаются формированием зоны расплавленного металла, гидродинамика которого оказывает заметное влияние как на физико-химические процессы, протекающие в расплаве обрабатываемого изделия (например, перемешивание различных электродных добавок), так и на его тепловое состояние (например, форма и размеры области проплавления).

В этой связи исследование факторов, формирующих течение расплава, и изучение методов, позволяющих целенаправленно управлять гидродинамикой жидкого металла, представляется актуальной задачей, решение которой будет способствовать повышению эффективности процессов электродуговой обработки металлов.

Экспериментальное исследование гидродинамики расплава сопряжено, в силу специфических особенностей, с немалыми трудностями [3–7], и в этом случае достаточно полезную информацию можно получить в рамках вычислительного эксперимента, позволяющего существенно дополнить, а в ряде случаев и объяснить результаты физического опыта.

Вместе с тем, нагрев и плавление анода электрической дугой представляет собой сложный комплекс нестационарных тепловых, динамических и электромаг-

нитных процессов, требующих для численного расчета весьма развитый математический аппарат, позволяющий проводить расчет в нерегулярных областях, включающих в себя столб дуги и электроды с расплавом. Кроме того, данные задачи относятся к разряду ресурсоемких задач вычислительной магнитной гидродинамики и для их решения необходимы достаточно мощные вычислительные средства. По этим причинам теоретическое исследование подобных задач до недавнего времени проводилось в рамках упрощенных аналитических моделей, эмпирических соотношений, полученных на основе обобщения опытных данных, а также одномерных математических моделей [3, 8–12].

Лишь в последнее время интенсивное развитие компьютерных технологий позволило приступить к численному исследованию процессов нестационарного сопряженного теплообмена потоков плазмы в различных условиях в рамках двух- и трехмерных математических моделей (см., например, [13–18]). Отличительной особенностью работы [19] является дополнительное численное решение уравнения переноса излучения и организация распараллеливания вычислений.

Следует заметить, что в отличие от методики расчета характеристик только столба дуги, расчет сопряженного теплообмена электродуговой плазмы с электродами имеет ряд особенностей и предъявляет к математической модели определенные требования, в частности, обеспечить электропроводность плазмы вблизи сравнительно холодной поверхности электродов. Одна из первых методик численного решения задачи сопряженного теплообмена дуговой плазмы с электродами представлена в работе [20], где использовалась модель дуги в приближении локального термодинамического равновесия (ЛТР), а вычисление коэффициентов переноса плазмы проводилось по формуле среднего гармонического. По мнению авторов [20], данная методика позволяет получить самосогласованные расчетные характеристики на границе «плазма — электроды». Однако уже в работе [21] было указано на некорректность подобной методики, поскольку модель ЛТР не обеспечивает электрическую проводимость плазмы вблизи электродов.

Тем не менее, отдельные последователи упомянутой методики стали получать явно ошибочные результаты расчета [22, 23], на что было указано в работе [24]. Критические замечания в адрес методики [20] также высказываются в ряде недавних публикаций [25–27], авторы которых подчеркивают, что для рассматриваемого класса задач модель ЛТР и вычисление коэффициентов переноса по формуле среднего гармонического не позволяют получить реалистичный результат, особенно вблизи электродов. Численное решение следует проводить в рамках модели частичного локального термодинамического равновесия (ЧЛТР) плазмы, учитывающей отклонение дуговой плазмы от термического и ионизационного равновесия и обеспечивающей условия протекания электрического тока вблизи электродов.

В настоящей статье представлены двумерная математическая модель в приближении ЧЛТР плазмы, методика решения и граничные условия для численного расчета характеристик нестационарной электрической дуги и нестационарного сопряженного теплообмена потока электродуговой плазмы с анодом. Выполнено тестирование вычислительного алгоритма, приведены результаты расчета характеристик дуги с условного момента зажигания до выхода на стационарный режим.

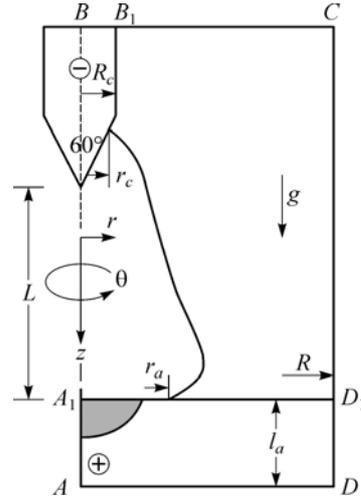
ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

1. Система уравнений электродуговой плазмы

В цилиндрической системе координат (r, z, θ) рассчитывается открытая осесимметричная электрическая дуга силой тока $I = 150$ А с межэлектродным расстоянием $L = 5$ мм (рис. 1), горящая в аргоне атмосферного давления. Катодом

Рис. 1. Схема расчетной области ABCD, содержащая столб дуги, катод «-» и анод «+», включая расплав анода (затемненная область).

является неплавящийся вольфрамовый стержень радиусом $R_c = 1,6$ мм, с углом заточки под конус 60° . Анодом — водоохлаждаемый диск толщиной $l_a = 10$ мм и радиусом $R = 25$ мм, изготовленный из нержавеющей стали марки SUS 304. Выбор внешних параметров задачи сделан в соответствии с работой [16], где представлены экспериментальные данные о размерах сварочной ванны, а также результаты численных расчетов нагрева и плавления анода. Это позволит провести сравнение и оценить надежность используемой в настоящей статье методики расчета и достоверность полученных результатов.



Принимая во внимание условие осевой симметрии ($\partial/\partial\theta = 0$), система нестационарных уравнений электродуговой плазмы в приближении ЧЛТР (см., например, [21, 28, 29]) может быть записана в следующем виде:

– уравнение неразрывности газа:

$$\partial\rho/\partial t + \text{div}(\rho\mathbf{U}) = 0, \quad (1)$$

– уравнение неразрывности электронного газа:

$$\partial N_e/\partial t + \text{div}[N_e(\mathbf{U} + \mathbf{U}_d + \mathbf{U}_i + \mathbf{U}_a)] = R_e, \quad (2)$$

– уравнения движения по координатам z, r для компонент вектора скорости $\mathbf{U}(u, v)$ соответственно:

$$\partial\rho u/\partial t + \text{div}[m(N_i + N_a)\mathbf{U}u] = \text{div}(\mu\text{grad } u) - \partial P/\partial z + \mu_0 j_r H_\theta + s_z + (\rho - \rho_\infty)\mathbf{g}, \quad (3)$$

$$\partial\rho v/\partial t + \text{div}[m(N_i + N_a)\mathbf{U}v] = \text{div}(\mu\text{grad } v) - \partial P/\partial r + \mu_0 j_z H_\theta + s_r, \quad (4)$$

– уравнение баланса энергии электронного газа:

$$\begin{aligned} \partial/\partial t (5/2 kT_e + U_i)N_e + \text{div}[N_e(\mathbf{U} + \mathbf{U}_d + \mathbf{U}_i + \mathbf{U}_a)(5/2 kT_e + U_i)] = \\ = \text{div}(\lambda_e\text{grad } T_e) + \mathbf{j}^2/\sigma - \psi - B(T_e - T), \end{aligned} \quad (5)$$

– уравнение баланса энергии тяжелых частиц:

$$\partial/\partial t 5/2 kT(N_i + N_a) + \text{div}[5/2 kT(N_i + N_a)\mathbf{U}] = \text{div}(\lambda\text{grad } T) + B(T_e - T), \quad (6)$$

– уравнения Максвелла:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}, \text{rot } \mathbf{E} = -\mu_0 \partial\mathbf{H}/\partial t, \text{div } \mathbf{H} = 0, \quad (7)$$

– закон Ома:

$$\mathbf{E} = \mathbf{j}/\sigma, \quad (8)$$

– закон Дальтона:

$$P/kT = N_i + N_a + N_e T_e/T. \quad (9)$$

Электромагнитная часть задачи решается с использованием скалярной функции электрического тока $\chi(r, z)$, определяемой соотношениями $\partial\chi/\partial z = -j_r r$, $\partial\chi/\partial r = j_z r$ и автоматически удовлетворяющей уравнению сохранения электрического тока $\text{div } \mathbf{j} = 0$.

Из первых двух уравнений Максвелла и закона Ома после несложных выкладок получаем дифференциальное уравнение для определения $\chi(r, z)$:

$$\frac{\mu_0}{r} \frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\sigma r} \frac{\partial \chi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\sigma r} \frac{\partial \chi}{\partial r}. \quad (10)$$

В уравнениях (1–10) использованы следующие обозначения: t — время, ρ , μ , σ — плотность, вязкость и электропроводность плазмы соответственно, ρ_∞ — плотность окружающего холодного газа, λ_e — теплопроводность электронного газа, λ — теплопроводность газа тяжелых частиц, ψ — интенсивность излучения, m — масса атома, N_e , N_i , N_a — концентрации электронов, ионов и атомов соответственно, U_i — энергия ионизации плазмообразующего газа, k — постоянная Больцмана, $R_e = (K_i N_e N_a - K_r N_e^2 N_i)$ — скорость генерации электронов, где K_i , K_r — константы ударной ионизации и трехчастичной рекомбинации соответственно, B — коэффициент энергообмена между электронами и тяжелыми частицами, \mathbf{g} — вектор ускорения свободного падения, q_e — заряд электрона, μ_0 — магнитная постоянная, T — температура тяжелых частиц, T_e — температура электронного газа, P — давление, s_z , s_r — дополнительные к $\text{div}(\mu \text{grad} u)$, $\text{div}(\mu \text{grad} v)$ вязкие слагаемые, H_θ — азимутальная компонента вектора \mathbf{H} , векторы \mathbf{E} , \mathbf{j} , \mathbf{H} обозначают соответственно напряженность электрического поля, плотность электрического тока и напряженность магнитного поля, \mathbf{U}_d , \mathbf{U}_i , \mathbf{U}_a — векторы скоростей дрейфа, термо- и амбиполярной диффузии электронов соответственно, определяемые по формулам:

$$\mathbf{U}_d = \mathbf{j} / (q_e N_e), \quad \mathbf{U}_i = -(0,5/T_e) D_e \text{grad } T_e, \quad \mathbf{U}_a = -(D_e/N_e) \text{grad } N_e,$$

где D_e — коэффициент амбиполярной диффузии.

При записи уравнений полагалось, что течение ламинарное, излучение объемное, приэлектродные процессы не рассматриваются и при определении параметров дуги вблизи электродов привлекаются опытные данные. Коэффициенты переноса и теплофизические свойства неравновесной аргоновой плазмы рассчитываются по известным формулам и уравнениям [21].

2. Область катода

Температура T неплавящегося вольфрамового катода определяется из уравнения теплопроводности

$$\rho c (\partial T / \partial t) = \text{div}(\lambda \text{grad } T) + \mathbf{j}^2 / \sigma, \quad (11)$$

где c — удельная теплоемкость при постоянном давлении. При расчете температуры непосредственно на поверхности катодной привязки дуги к правой части уравнения (11) добавляется комплекс известных слагаемых:

$$\mathbf{j}_i U_i - \mathbf{j}_e \varphi - \varepsilon_c k_S T^4.$$

Первое слагаемое характеризует нагрев катода током ионов \mathbf{j}_i , второе и третье слагаемые — охлаждение катода электронами эмиссии \mathbf{j}_e и излучением (φ — работа выхода материала катода, ε_c — коэффициент излучения с поверхности

катода, k_S — постоянная Стефана–Больцмана). Заметим, что нередко также учитываются перенос энергии током обратных электронов, перенос энергии диссоциации в случае молекулярных газов и ряд других факторов. Однако, как отмечается, например, в работе [30], в связи с невысокой точностью исходных данных (φ_c , ε_c и других), полученные результаты следует рассматривать только как качественную оценку баланса энергии на катоде.

Кроме невысокой точности исходных данных, также имеет место некоторая произвольность в выборе конкретных значений. Так, например, в расчетах [25] для катода из торированного вольфрама принято значение $\varphi_c = 2,63$ эВ. Авторы работ [16, 31] для такого же катода используют значение работы выхода чистого вольфрама $\varphi_c = 4,5$ эВ, пояснив, что основным материалом катода является именно чистый вольфрам. В расчетах [32], со ссылкой на отсутствие точных значений, для катода из торированного вольфрама принято осредненное значение $\varphi_c = 3,3$ эВ. Вместе с тем, как показали результаты предварительных расчетов, подобная произвольность обуславливает заметное отличие расчетных значений температуры катода.

Очевидно, что для корректного описания процессов токопереноса и теплообмена дуговой плазмы с электродами необходимо привлечение достаточно строгой теории приэлектродных процессов. Однако несмотря на интенсивные исследования и заметные успехи в данной области, (см. [27, 33–39]), построение замкнутой математической модели столба дуги и приэлектродных областей по-прежнему остается актуальной задачей и ждет своего решения.

В этой связи численные значения \mathbf{j}_i , \mathbf{j}_e , φ_c , подбирались из предварительных расчетов таким образом, чтобы рассчитанная температура катода соответствовала опытным данным. Согласно результатам многочисленных экспериментов, для дуги в аргоне атмосферного давления температура вольфрамового катода находится в диапазоне 3,5–4 кК, а при указанных в начале раздела внешних параметрах задачи радиус катодной привязки дуги равен $r_c \approx 0,5$ мм. Оценки долей плотности ионного тока на катод и тока эмиссии электронов дают соответственно $\mathbf{j}_i \approx 0,2$ и $\mathbf{j}_e \approx 0,8$ от полной плотности тока $\mathbf{j} = |\mathbf{j}_i| + |\mathbf{j}_e|$.

Работа выхода и коэффициент излучения с поверхности катода приняты равными $\varphi_c = 2,63$ эВ (торированный вольфрам) и $\varepsilon_c = 0,4$ соответственно.

Электромагнитные характеристики в области катода определяются из решения представленного выше уравнения (10).

3. Область анода

В аноде возможны фазовые превращения, а именно — плавление материала анода, и в этой связи возникает проблема определения границы фазового перехода. Как известно, существуют различные методы для моделирования фазового перехода (см., например, [13–17, 40]). Можно использовать уравнение теплопроводности, записанное относительно температуры с эффективной теплоемкостью и температурным интервалом, в пределах которого размывается граница фазового перехода. Однако, как показал анализ результатов предварительных расчетов, такой подход требует чрезмерно мелкого шага сетки, а выбор температурного интервала является весьма субъективным и в определенной мере продиктован имеющимися в распоряжении вычислительными ресурсами. По этой причине часто используется иной подход (используемый также в настоящей работе), а именно, процесс теплообмена рассчитывается из нестационарного уравнения теплопроводности, записанного относительно энтальпии h :

$$\partial \rho h / \partial t + \operatorname{div}(\rho U h) = \operatorname{div}(\lambda / c \operatorname{grad} h) + \mathbf{j}^2 / \sigma. \quad (12)$$

При расчете энтальпии непосредственно на поверхности анодной привязки дуги в уравнении (12) дополнительно учитываются нагрев анода энергией нейтрализации электронов $j\varphi_a$ и энергией электронов, составляющих ток дуги $5/2 kT_e j/q_e$, а также охлаждение анода излучением $\varepsilon_a k_S T^4$ с поверхности. Здесь φ_a — работа выхода материала анода, T_e — температура электронов вблизи поверхности анода на расстоянии сеточного шага, ε_a — коэффициент излучения с поверхности анода. Заметим, что, согласно результатам измерений [41] и численным оценкам, при указанных выше внешних параметрах дуги доля излучения в общем балансе энергии на аноде весьма незначительна, и ею можно пренебречь. Более важным представляется учет энергии электронов, приобретаемой в области анодного падения потенциала, однако вследствие отсутствия надежных данных о величине и знаке последнего данный фактор не учитывается.

Полагая значения теплоемкостей каждой из фаз анода постоянными, функциональная зависимость энтальпии от температуры определяется известными соотношениями:

$$h_{\text{sol}} = c_{\text{sol}} T, \quad h_{\text{liq}} = c_{\text{liq}}(T - T_{\text{melt}}) + c_{\text{sol}} T_{\text{melt}} + L_m,$$

где индексы sol и liq относятся к твердой и жидкой фазам соответственно, T_{melt} — температура плавления материала анода, L_m — скрытая теплота плавления. По рассчитанным значениям энтальпии анода определяются, согласно указанным соотношениям, значения температуры анода.

Динамические и электромагнитные характеристики в области расплава анода определяются из решения соответствующих уравнений системы (1–10).

При вычислении радиальной компоненты v вектора скорости непосредственно на поверхности расплава в уравнение движения (4) вводится дополнительное слагаемое $(\partial\Gamma/\partial T)(\partial T/\partial r)$ обусловленное зависимостью коэффициента поверхностного натяжения Γ от температуры T (эффект Марангони) и наличием градиента температуры в радиальном направлении. В зависимости от знака произведения $(\partial\Gamma/\partial T)(\partial T/\partial r)$ силы поверхностного натяжения могут способствовать течению расплава как от центра к периферии, так и в обратном направлении. Расчеты проводились в соответствие с данными работы [16] для двух значений $\partial\Gamma/\partial T$: $-4,48 \cdot 10^{-4}$ и $2,08 \cdot 10^{-4}$ Н/(м·К), которые соответствуют нержавеющей стали марки SUS 304 с низким (40 ppm) и высоким (220 ppm) содержанием серы (ppm — part per million — миллионная часть).

В расчетах полагается, что поверхность расплава не деформируется в результате динамического воздействия потока дуговой плазмы.

Коэффициенты переноса и теплофизические свойства материала электродов выбраны в соответствие с работой [16], с учетом данных [15, 17] и приведены в табл. 1.

Относительно данных в табл. 1 следует пояснить следующее. В работе [16] для стали марки SUS 304 не приведены значения скрытой теплоты плавления и коэффициента излучения материала электродов. Поэтому значения данных параметров взяты из работы [15], где рассматривается нержавеющая сталь иной марки — SUS 430, а также из работы [17], где рассчитывается плавление катода из нержавеющей стали (без указания ее марки), коэффициент излучения материала катода и анода так же принят согласно [17]. Кроме того, в работе [16] не указаны вид функциональной зависимости и диапазон температуры, для которого приведены значения коэффициентов переноса и теплофизических свойств материала электродов.

Таблица 1

Коэффициенты переноса и теплофизические свойства материала электродов

Катод, торированный вольфрам	теплопроводность λ	240–85 Вт/(м·К)
	электропроводность σ	$2,2 \cdot 10^7 - 5,9 \cdot 10^5$ (Ом/м) ⁻¹
	теплоемкость c	130–220 Дж/(кг·К)
	плотность ρ	$18,9 \cdot 10^3$ кг/м ³
	работа выхода φ_c	2,6 эВ
	коэффициент излучения ε_c	0,4
Анод, нержавеющая сталь марки SUS 304	теплопроводность λ	12–30 Вт/(м·К)
	электропроводность σ	$1,4 \cdot 10^6 - 6,9 \cdot 10^5$ (Ом/м) ⁻¹
	теплоемкость c	510–650 Дж/(кг·К)
	плотность ρ	$7,9 \cdot 10^3 - 7,8 \cdot 10^3$ кг/м ³
	вязкость μ	$6,0 \cdot 10^{-3} - 1,5 \cdot 10^{-3}$ кг/(м·с)
	температура плавления T_{melt}	1750 К
	работа выхода φ_a	4,65 эВ
	скрытая теплота плавления L_m	$2,5 \cdot 10^5$ Дж/кг
	коэффициент излучения ε_a	0,4

В этой связи поясним, что в расчетах настоящей работы использовались линейная и кусочно-линейная аппроксимации в диапазоне температур 0,3–4 кК для катода и 0,3–3 кК для анода.

Заметим, что, как указывается, например, в [42, 43], численные значения коэффициентов вязкости жидких металлов и коэффициента поверхностного натяжения, представленные в различных работах, могут заметно различаться из-за погрешностей и/или особенностей методики измерения. Как следствие, это вносит неопределенность и снижает достоверность результатов численного расчета, а также затрудняет их сравнение между собой. Наконец, нередко в работах расчетного характера авторы вообще не приводят численные значения коэффициентов переноса и теплофизических свойств материала электродов, ограничиваясь лишь ссылкой на справочную литературу, в таких случаях пытаться воспроизвести результаты, близкие к результатам расчета подобных работ, практически бесполезно.

4. Метод решения и граничные условия

Исходные уравнения (1–12) после несложных преобразований, следуя известной методике [44], записываются в виде обобщенного уравнения, дифференциальная форма которого имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \alpha \rho \Phi}{\partial t} + \left(\frac{\partial \beta \rho v \Phi}{\partial r} + \frac{\partial \beta \rho \Phi}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\gamma \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + \delta, \quad (13)$$

где Φ — одна из рассчитываемых переменных χ , T_e , N_e , T , u , v , h ; α , β , γ , δ — коэффициенты, конкретный вид которых зависит от смысла переменной Φ (см. табл. 2).

Дискретизация обобщенного дифференциального уравнения осуществляется методом контрольного объема, итерационное решение разностного аналога проводится по неявной схеме методом Зейделя–Гаусса с применением, в ряде случаев, нижней релаксации, динамические переменные “скорость — давление” рассчитываются в рамках алгоритма SIMPLE'R [44].

Заметим, что в данном случае выбор неявной схемы обусловлен необходимостью рассчитывать сравнительно большие временные интервалы — до нескольких

Таблица 2

Значения коэффициентов $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ обобщенного уравнения (13)

Φ	α	β	γ	δ
N_e	$1/\rho$	r/ρ	rD_e	$r[R_e - \text{div}(N_e \cdot \mathbf{U}_i)]$
T_e	$5/2kN_e/\rho$	$5/2rkN_e/\rho$	$r\lambda_e$	$r[\mathbf{j}^2/\sigma - \psi - B(T_e - T) - \text{div}[N_e(\mathbf{U} + \mathbf{U}_d + \mathbf{U}_t + \mathbf{U}_a) (5/2kT_e + U_i)] - \text{div}(N_e \mathbf{U} U_i)]$;
T	$5/2k(N_a + N_i)/\rho$	$5/2rk(N_a + N_i)/\rho$	$r\lambda$	$rB(T_e - T)$
u	1	r	$r\mu$	$r[-\partial P/\partial z + \mu_0 j_r H_\theta + s_z + (\rho - \rho_\infty)g]$
v	1	r	$r\mu$	$r[-\partial P/\partial r + \mu_0 j_z H_\theta + s_r]$
χ	$\mu_0/(r\rho)$	0	$1/\sigma$	0
$T_{\text{каатода}}$	c	0	$r\lambda$	$r\mathbf{j}^2/\sigma$
h	1	1	$r\lambda/c$	$r\mathbf{j}^2/\sigma$

секунд. Неявная схема, безусловно устойчивая при произвольном шаге по времени τ [40, 44, 45], позволяет провести расчет с приемлемым уровнем детализации нестационарного процесса при сравнительно большой величине τ , затратив относительно немного реального времени. Вместе с тем, явная схема требует для устойчивого счета весьма малый временной шаг, и, как следствие, намного больше реального времени счета. Следует признать, однако, что свойство безусловной устойчивости неявных схем еще не гарантирует, как известно, получение физически реального численного решения.

Для численного расчета характеристик в нерегулярной области $ABCD$ (см. рис. 1), включающей в себя дуговую плазму, твердую фазу электродов и жидкую фазу анода, используется метод фиктивных областей [46–48], адаптированный для расчета электрической дуги [49, 50]. Расчеты проводятся на прямоугольной сетке с постоянным и одинаковым шагом в аксиальном и радиальном направлениях ($\Delta z = \Delta r = \Delta$), аппроксимация криволинейных границ электродов и расплава осуществляется ступенчатым образом.

Поскольку уравнение (13) является уравнением эллиптического типа по пространственным координатам и параболического типа по временной координате, то граничные условия для рассчитываемых переменных задаются по периметру расчетной области (табл. 3) и в начальный момент времени.

На участках B_1C и CD внешней границы ставятся условия гладкого сопряжения рассчитываемых характеристик с окружающей средой, а участки границы располагаются от столба дуги на достаточном удалении, обеспечивающем выполнение указанных условий, мера достаточного удаления определяется в ходе предварительных расчетов.

Таблица 3

Граничные условия

	χ	T_e	N_e	$T; h$	P	\mathbf{U}
BB_1	$\partial/\partial z = 0$	T_e^{\min}	N_e^{\min}	T_0	P_0	0
B_1C	$l/2\pi$	T_e^{\min}	N_e^{\min}	$\partial/\partial z = 0$	P_0	$\partial/\partial z = 0$
CD	$l/2\pi$	T_e^{\min}	N_e^{\min}	$\partial/\partial r = 0$	P_0	$\partial/\partial r = 0$
AD	$\partial/\partial z = 0$	T_e^{\min}	N_e^{\min}	h_0	P_0	0
AB	0	$\partial/\partial r = 0$	$\partial u/\partial r = 0$; $v = 0$			

При расчете функции электрического тока χ принято, что на токоведущих торцевых поверхностях катода BB_1 и анода AD электрический ток течет по нормали к указанным поверхностям. Радиус катодной привязки дуги $r_c = 0,5$ мм, как отмечалось в п. 2, задается по результатам экспериментов. За пределами токопроводящей области дуги вплоть до границы B_1CD значение переменной χ определяется из условия протекания полного электрического тока в расчетной области радиусом R :
$$\chi = \int_0^R j_z r dr = I/2\pi.$$

На поверхности анода значение токопроводящего радиуса r_a анодного пятна привязки определяется непосредственно в процессе численного счета, вне пятна полагается $\chi = I/2\pi$.

Значения температуры T_e и концентрации N_e электронов на внешней границе расчетной области $ABCD$ для холодного неионизованного газа полагаются равными: $T_e = T_e^{\min} = 3,5$ кК, $N_e = N_e^{\min} = 10^{17}$ м⁻³. Заметим, что в областях электродов электронный газ отсутствует, и температуру и концентрацию электронов можно было не рассчитывать. Однако для внутреннего единства вычислительного алгоритма электроды не выделяются специальным образом из общей расчетной области.

Значение температуры T на торцевой границе катода BB_1 и значение энтальпии на границе анода AD полагаются равными $T = T^0$ и $h = h_0$ соответственно, где h_0 — значение энтальпии анода при температуре $T_0 = 300$ К.

В уравнениях движения давление газа P (либо расплава) является величиной аддитивной, поэтому не обязательно задавать на внешней границе расчетной области абсолютные значения давления (в частности, одну атмосферу), а достаточно использовать, следуя рекомендациям [44, 45], некоторое условное относительное значение, например, полагать $P = P_0 = 1$ Па.

В непроницаемых для газа областях катода и анода скорость можно полагать равной нулю. Однако, как уже отмечалось выше, с целью единства вычислительного алгоритма области электродов не выделяются из общей расчетной области. Действительно, в рамках метода фиктивных областей при использовании фиктивной вязкости в твердом теле электродов, расчетная скорость газа в электродах будет сама по себе практически равна нулю.

На границе AB расчетной области для рассчитываемых переменных ставятся условия ограниченности, либо осевой симметрии.

Отметим, что на границах дуги с электродами не потребовалось применения каких-либо специальных условий согласования. Это обусловлено тем, что, во-первых, в областях дуги и электродов, включая расплав, дифференциальные уравнения являются уравнениями одного и того же типа. Во-вторых, исходная система уравнений записана в дивергентной форме, дискретизация дифференциальных уравнений осуществляется методом контрольного объема, а для решения разностного аналога используется консервативная разностная схема. Кроме того, вычисление коэффициентов переноса и теплофизических свойств на гранях контрольного объема проводится по формуле среднего гармонического, что в определенной степени позволяет учесть скачкообразное изменение коэффициентов, не прибегая при этом к чрезмерно мелкой расчетной сетке.

Для постановки начальных условий необходимо знать, в общем случае, способ зажигания дуги, определяющий характер быстропротекающих процессов в течение некоторого начального промежутка времени Δt , когда между электродами формируется высокотемпературный токопроводящий канал дуги. Если интерес представляет только стационарное состояние дуги, можно воспользоваться достаточно произвольными начальными условиями и методом установления рассчитать

стационарные характеристики дуги [51]. Вместе с тем, задавая начальные условия, близкие к реальным, можно проследить эволюцию характеристик дуги, что представляет определенный интерес.

Существуют различные способы зажигания дуги [29, 52], но для любого из них используемая в настоящей работе математическая модель не может рассчитать физические процессы в течение Δt , и, следовательно, этот промежуток времени нельзя включать в вычислительный процесс. О продолжительности Δt можно косвенно судить, например, по результатам экспериментов с периодически разрываемой дугой силой тока 200 А, горящей между угольными электродами (см. ссылки в [52]). Продолжительность периода разрыва выбиралась такой, чтобы успевало исчезнуть предыдущее ядро столба дуги. Установлено, что при повторном зажигании в межэлектродном зазоре в течение $\Delta t = 70\text{--}90$ мкс вновь формировался столб дуги, а сила тока и напряжение почти достигали стационарных значений.

С учетом сказанного, в вычислительном алгоритме в течение первых $\Delta t \approx 70$ мкс при значении временного шага $\tau = 10^{-6}$ с формируются начальные условия для рассчитываемых переменных, и только после этого начинается отсчет реального времени. Причем до $\Delta t = 20$ мкс проводится решение только тепловой и электромагнитной части задачи, и только после 20 мкс подключается динамическая часть задачи. При формировании начальных условий полагается, что между электродами уже существует токопроводящая высокотемпературная ($T = 9$ кК) зона в форме цилиндра радиусом r_c с неподвижным газом.

Добиться низкой погрешности $\varepsilon = 10^{-4}$ внутренних итераций в течение Δt не удастся, поэтому число внутренних итераций ограничивалось 10, при этом итерационная погрешность внутреннего цикла составляла $\varepsilon = 10^{-3}\text{--}10^{-2}$. Некоторые из характеристик столба дуги после $\Delta t = 70$ мкс приведены на рис. 2, 3, и эти распределения приняты за начало времени отсчета, т. е. $t = 0$.

Заданные таким образом начальные условия, на наш взгляд, вполне реалистичны, и их использование позволит проследить эволюцию (по крайней мере, качественную) характеристик дуги до выхода на стационарный режим.

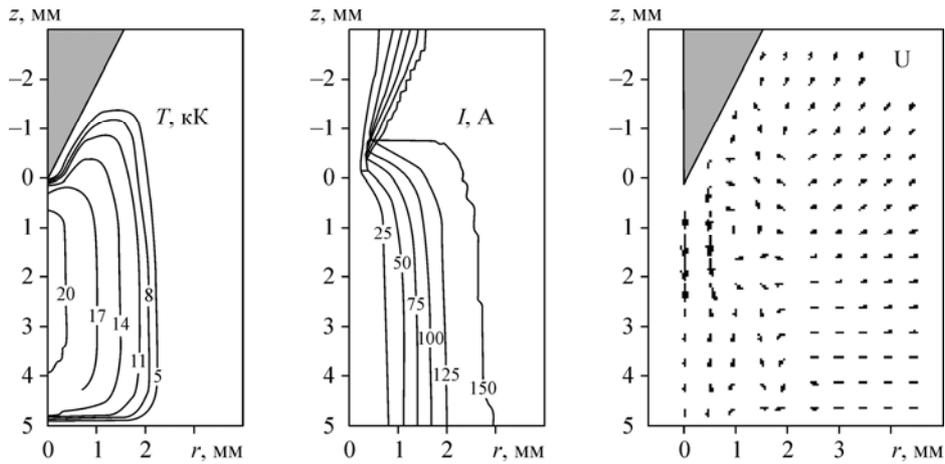


Рис. 2. Начальное приближение для некоторых из рассчитываемых переменных: изолинии температуры газа T и электрического тока I , векторное поле скорости газа U (масштаб векторов не выдержан).

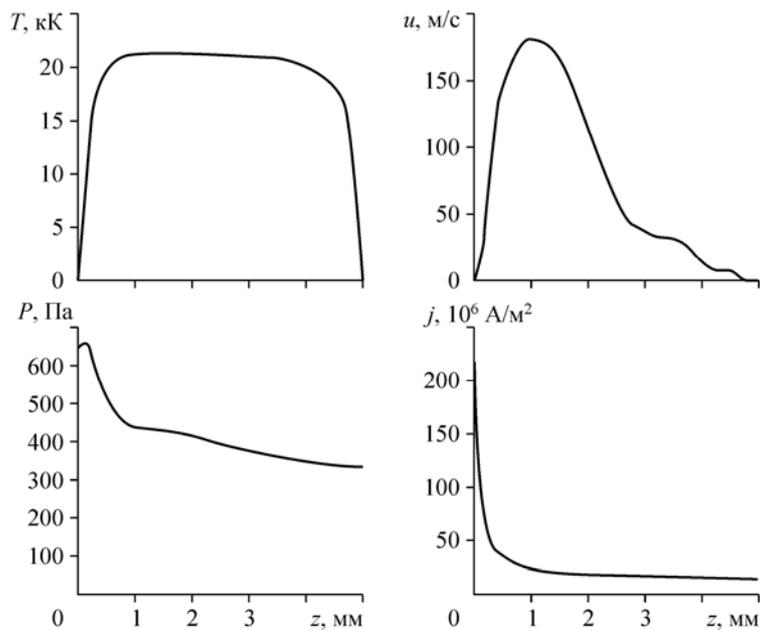


Рис. 3. Начальное приближение для некоторых из рассчитываемых переменных: аксиальные распределения на оси дуги температуры T , скорости u , давления P и плотности электрического тока j .

5. Тестирование вычислительного алгоритма

С целью тестирования математической модели, методики расчета и компьютерной программы было рассмотрено влияние на расчетные характеристики величины временного шага, итерационной погрешности внутреннего цикла и величины сеточного шага. Также проведены расчеты при очень большом значении временного шага, в частности, $\tau = 10^{10}$ с, что эквивалентно расчетам в рамках стационарной математической модели. Кроме этого, проведено сравнение результатов расчета характеристик дуги после выхода на стационарный режим с расчетными данными в рамках стационарной математической модели дуги [28] и данными эксперимента [32].

Выбор величины временного шага τ продиктован требуемым уровнем детализации рассматриваемых физических процессов и приемлемым общим временем счета, не превышающим 10–15 часов. После проведения тестовых расчетов на пространственной сетке с шагом $\Delta = 0,1$ мм для значений $\tau = 10^{-6}$, 10^{-5} , 10^{-4} с выбор был сделан в пользу величины $\tau = 10^{-5}$ с при расчете характеристик столба дуги и $\tau = 10^{-4}$ с при расчете теплового состояния анода. При значениях $\tau = 10^{-6}$ и 10^{-5} с расчетные характеристики дуги в одинаковые моменты времени (например, $t = 1, 2, 3$ мс и т. д.) близки между собой как качественно, так и количественно. Общее время компьютерного счета при указанных значениях τ составляет примерно 10 и 4 часа соответственно (ПК Pentium 4, CPU 2,4 ГГц). Использование большего значения $\tau = 10^{-4}$ с, соизмеримого со временем выхода дуги на стационарный режим, приводит к снижению уровня детализации физических процессов. Вследствие сравнительно большого τ требуется примерно на порядок больше

итераций внутреннего цикла для достижения заданной погрешности. Вместе с тем, результаты при большом значении $\tau = 10^{10}$ с полностью совпадают с таковыми при $\tau = 10^{-5}$ с после выхода на стационарный режим.

Итерационная погрешность внутреннего цикла принята равной $\varepsilon = 10^{-4}$ при расчете всех характеристик, за исключением энтальпии анода, для которой задано $\varepsilon = 10^{-5}$ (расчеты проведены для значений $\varepsilon = 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}$ при $\tau = 10^{-5}$ с и $\Delta = 0,1$ мм). Вначале расчета ($t = 0-0,2$ мс) для достижения заданной погрешности требовалось выполнить сравнительно много итераций — до 1000 внутреннего цикла, но затем количество внутренних итераций существенно уменьшалось и к моменту времени $t \approx 10$ мс составляло 2–10. При величине $\varepsilon = 10^{-3}$ (и особенно при $\varepsilon = 10^{-2}$) временная эволюция рассчитываемых характеристик и уровень детализации процессов были весьма незначительными. Начиная с момента времени $t \approx 0,5-1$ мс число итераций внутреннего цикла не превышало 1–3, а итерационный процесс в целом был очень похож на таковой в рамках стационарной математической модели. Другая крайность — расчет при значении $\varepsilon = 10^{-5}$ — требовал заметного увеличения числа внутренних итераций и, как следствие, вдвое больше компьютерного времени счета без явного улучшения качества решения.

Величина сеточного шага при значениях $\Delta = 0,1, 0,075$ и $0,05$ мм не оказала существенного влияния на расчетные характеристики столба дуги, количественное различие которых не превышало нескольких процентов, а качественное поведение было практически одинаково. Вместе с тем, на геометрические размеры сварочной ванны влияние сеточного шага более заметное — различие достигало 30 %. Разумеется, общее время компьютерного счета при указанных значениях сеточного шага Δ заметно различается. Так, например, для расчета характеристик столба дуги на временном интервале $t = 0-10$ мс при $\tau = 10^{-5}$ с время счета составляло примерно 4 часа при $\Delta = 0,1$ мм, 10 часов при $\Delta = 0,075$ мм, и 14 часов при $\Delta = 0,05$ мм. Для расчета теплового состояния анода и течения расплава в интервале $t = 0-20$ с при $\tau = 10^{-4}$ с и значении сеточного шага $\Delta = 0,1$ мм потребовалось примерно 10 часов, при $\Delta = 0,075$ мм — 30 часов, и при $\Delta = 0,05$ мм — 90 часов. В этой связи заметим, что несколько десятков часов компьютерного времени счета выходят за рамки разумного и дальнейшие расчеты проводились при сеточном шаге $\Delta = 0,1$ мм.

Сравнение характеристик дуги ($I = 200$ А, $L = 10$ мм, аргон атмосферного давления) после выхода на стационарный режим с данными расчета в рамках стационарной математической модели [28] и результатами измерений температуры [32] показало удовлетворительную согласованность: наибольшее отличие составляет 10–12 %.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА

Эволюция течения электродуговой плазмы на временном интервале $t = 1-10$ мс представлена на рис. 4. Поясним, что для изображения течения газа используются линии равного расхода G , которые восстанавливаются из рассчитанной аксиальной

компоненты скорости u по формуле $G = 2\pi \int_0^R \rho u r dr$. Дело в том, что изображе-

ние течения в виде векторного поля скорости требует графиков достаточно больших размеров, что заметно увеличило бы объем статьи. В качестве примера на рис. 5 представлено векторное поле скорости при $t = 1$ мс, причем показаны не все точки расчетной области, а только каждая пятая в направлениях r и z .

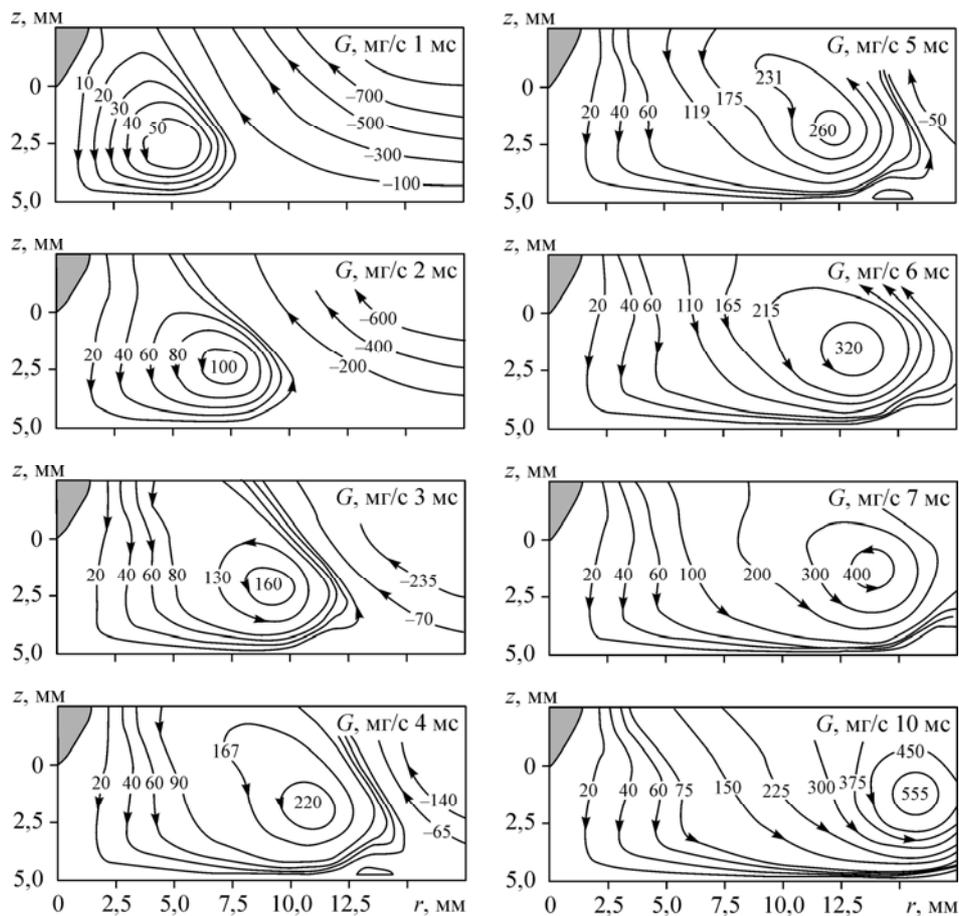
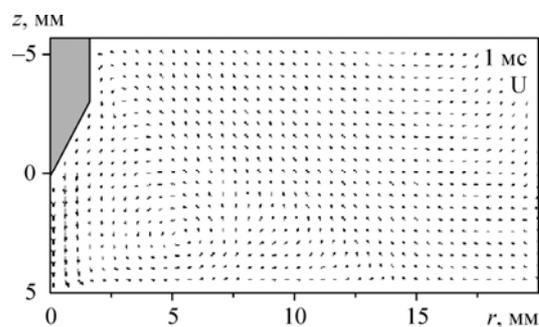


Рис. 4. Изолинии тока газа G в различные моменты времени t .

Анализ показывает, что в результате воздействия электромагнитных сил холодный окружающий газ вовлекается в дуговой разряд, прогревается и ускоряется в аксиальном направлении. Вблизи анода происходит торможение плазменного потока и его растекание по поверхности анода. Наибольшие значения скорости наблюдаются в приосевой области дуги (рис. 6).

Уже с момента времени $t > 0,5$ мс течение дуговой плазмы аналогично такому в рамках стационарной модели за исключением одной особенности — в нестационарном случае на периферии дуги формируется тороидальный вихрь, который движется от дуги в радиальном направлении. По изменению во времени координат центра вихря можно оценить его среднюю скорость движения. Как показывают оценки, в интервале времени 1–2 мс скорость движения вихря составляет $v \approx 2,5$ м/с, в интервале времени 4–5 мс уменьшается до $\approx 1,5$ м/с, а к моменту $t = 10$ мс падает до $v \approx 0,5$ м/с.

Рис. 5. Векторное поле скорости газа U при $t = 1$ мс.



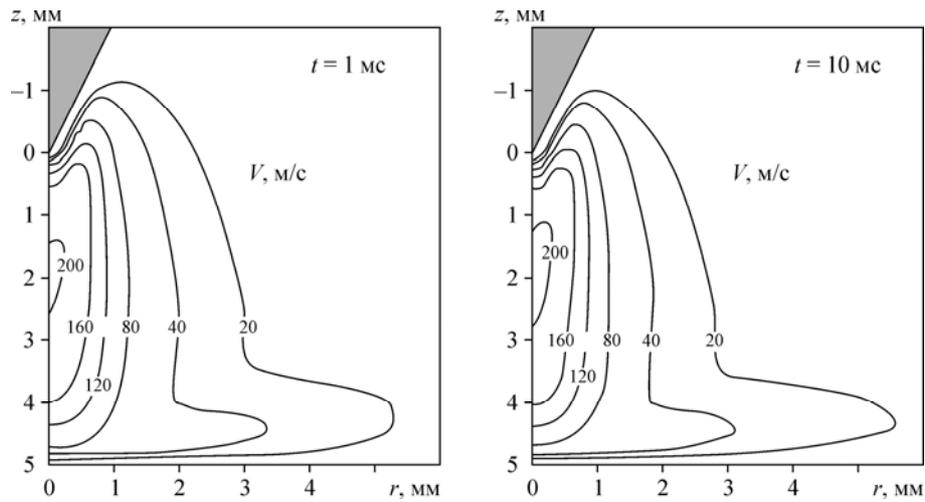


Рис. 6. Изолинии скорости $V = \sqrt{u^2 + v^2}$ в различные моменты времени.

На рис. 7 приведены расчетные поля температуры газа T в различные моменты времени t . Сравнение показывает, как происходит эволюция распределения температуры столба дуги: от цилиндрической формы в начальный момент (см. рис. 2) до характерной колоколообразной формы дуги к моменту $t = 10$ мс.

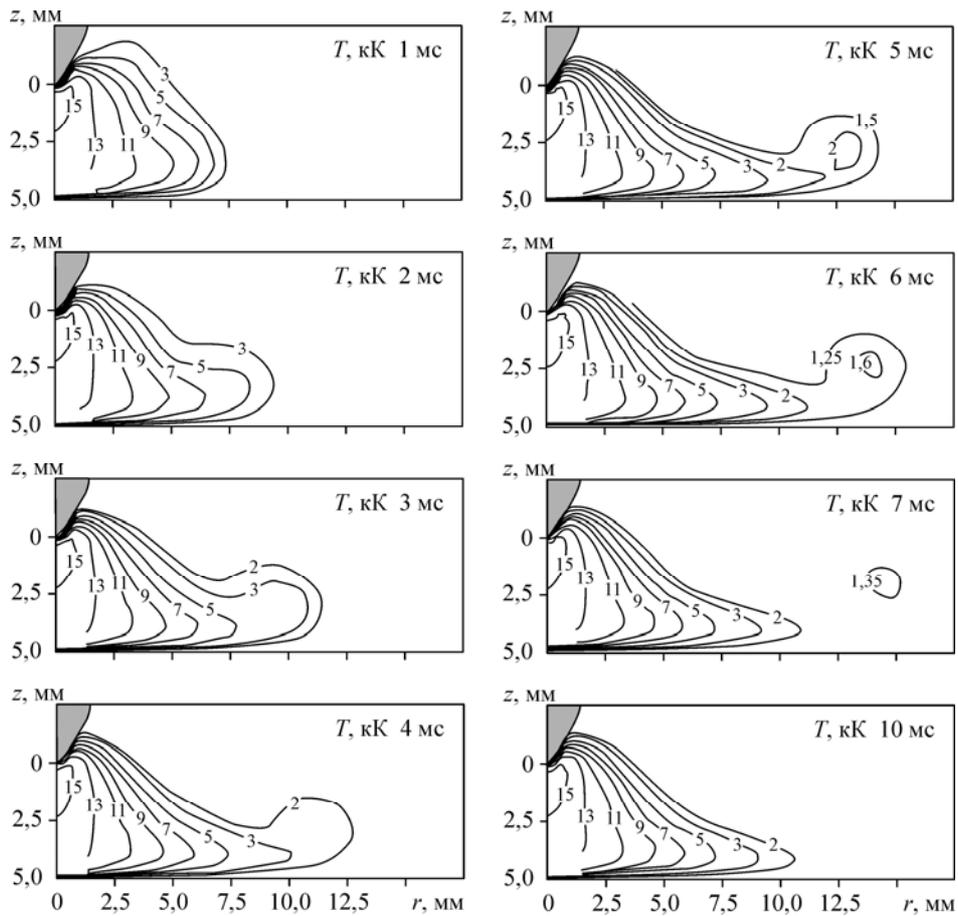


Рис. 7. Поля температуры газа T в различные моменты времени t .

Рис. 8. Поле температуры газа T . $I = 200$ А,
 $L = 10$ мм.

Особенности гидродинамики течения плазмы таковы, что тороидальный газовый вихрь (см. рис. 4) способствует выносу тепла в радиальном направлении. К моменту времени $t \approx 4$ мс вокруг столба дуги формируется одиночный тепловой тор, который сравнительно быстро, за 2–4 мс, охлаждается и рассеивается в окружающей среде. По-видимому, данное образование представляет собой некий гидродинамический аналог тепловой волны [53] сильноточного импульсного разряда.

Напомним, что на этапе тестирования математической модели был проведен расчет характеристик дуги силой тока $I = 200$ А от момента зажигания до выхода на стационарный режим. В этом случае также наблюдалось формирование тороидального вихря и одиночного теплового тора (рис. 8), движущегося от дуги в радиальном направлении. Причем при токе $I = 200$ А размеры, скорость движения и температура в центре вихря в 1,5–2 раза превышают соответствующие значения для $I = 150$ А.

Интересно отметить, что при выполнении тестовых расчетов с погрешностью $\varepsilon = 10^{-3} - 10^{-2}$, а также при значении временного шага $\tau = 10^{-4}$ с тепловой тор был весьма незначительным, а в рамках стационарной математической модели он полностью отсутствовал.

Изменения токопроводящей области дуги после $t > 0,5$ мс (рис. 9) не столь существенны: форма и радиальные размеры канала, через который протекает

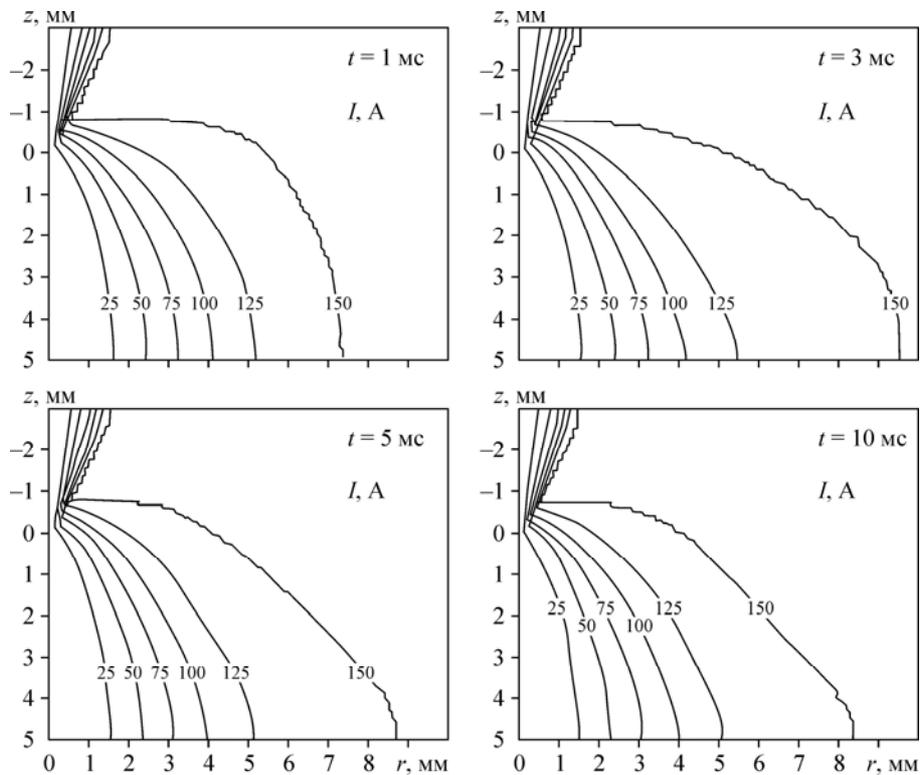
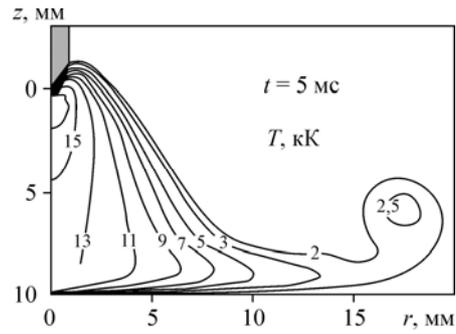


Рис. 9. Изолинии электрического тока I в различные моменты времени.

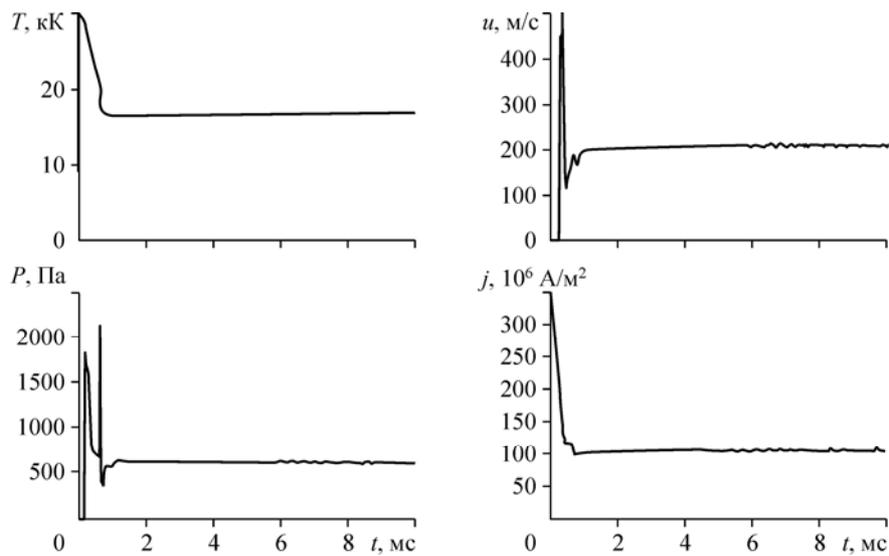


Рис. 10. Максимальные значения на оси дуги температуры T , скорости u , давления P и плотности тока j в различные моменты времени t .

более 80 % электрического тока, остаются практически неизменными. Незначительное расширение токопроводящей области (изолиния 150 А) к моменту времени $t \approx 3$ мс обусловлено формированием теплового тора, а после его рассеивания в окружающем пространстве происходит некоторое сужение и стабилизация токопроводящей границы.

На рис. 10 приведены осевые распределения максимальных значений температуры T , аксиальной компоненты скорости u , давления P и плотности электрического тока j в течение первых 10 мс горения дуги. Видно, что к моменту времени $t \approx 1$ мс максимальные значения переменных T , u , P , j выходят на стационарный режим. Однако общая картина тепломассопереноса еще далека от выхода на стационарный режим, который достигается лишь к моменту времени $t \approx 10$ мс.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлена двумерная нестационарная математическая модель в приближении частичного локального термодинамического равновесия плазмы для численного расчета характеристик электрической дуги и сопряженного теплообмена потока плазмы с анодом, включая плавление последнего.

Результаты тестирования свидетельствуют в целом о корректности модели и методики расчета, а также об отсутствии серьезных ошибок в компьютерной программе.

Приведены результаты расчета характеристик дуги с условного момента зажигания до выхода на стационарный режим. Для рассмотренных внешних параметров разряда уже с момента времени $t \approx 1$ мс характеристики в приосевой области практически не меняются, а к моменту времени $t \approx 10$ мс достигается общий стационарный режим горения дуги.

Установлено, что вокруг дуги формируется тороидальный вихрь, отходящий от дуги в радиальном направлении. Увеличение силы тока влечет увеличение размеров, скорости движения и температуры в центре вихря. Данная особенность гидродинамики плазмы обуславливает формирование вокруг столба дуги одиночного теплового тора, который достаточно быстро, за $t = 2-4$ мс, рассеивается в окружающей среде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Быховский Д.Г.** Плазменная резка. Л: Машиностроение, 1972. 168 с.
2. **Фарнасов Г.А., Фридман А.Г., Каринский В.Н.** Плазменная плавка. М: Metallurgy, 1968. 180 с.
3. **Ерохин А.А.** Основы сварки плавлением. М: Машиностроение, 1973. 448 с.
4. **Демянцевич В.П., Матюхин В.И.** Особенности движения жидкого металла в сварочной ванне при сварке неплавящимся электродом // Сварочное производство. 1972. № 10. С. 1–3.
5. **Рыкалин Н.Н., Кубланов В.Я., Жеребович А.С. и др.** Исследование гидродинамических потоков в модели ванны применительно к плазменно-дуговому переплаву // Физика и химия обработки материалов. 1974. № 6. С. 33–37.
6. **Ковалев И.М.** Изучение потоков жидкого металла при аргоно-дуговой сварке неплавящимся электродом // Сварочное производство. 1974. № 9. С. 10–12.
7. **Оботуров В.И., Покладов Ю.П.** Характер движения металла жидкой ванны при сварке алюминиевых сплавов // Сварочное производство. 1977. № 8. С. 7–9.
8. **Мокрышев Л.И., Пак В.В., Харин С.К.** Физико-химические процессы в зоне расплава циркониевого катода // Нестационарные дуговые и приэлектродные процессы в электрических аппаратах и плазматронах: Сб. докл. Всесоюз. сем. Улан-Удэ, 24–29 июня 1991. Алма-Ата. 1991. С. 60–67.
9. **Мессерле В.Е., Мурзакулов Г.Т., Перегудов В.С., Сорокин А.Л.** Расчет технологических параметров при плазменной резке металлов // Теплофизика и аэромеханика. 2001. Т. 8, № 2. С. 311–316.
10. **Тарасов Н.М., Горлов А.К., Лашко С.Н.** Численное моделирование процесса формирования капли расплавленного металла на торце плавящегося электрода // Автоматическая сварка. 2002. № 6. С. 24–27.
11. **Варуха Е.Н., Морозов А.А.** Расчет глубины проплавления изделия при сварке в углекислом газе // Автоматическая сварка. 2002. № 8. С. 20–23.
12. **Кархин В.А., Ильин А.С., Плошихин В.В., Приходовский А.А.** Влияние теплоты плавления алюминиевого сплава на форму и размеры сварочной ванны // Автоматическая сварка. 2004. № 1. С. 3–7.
13. **Попов В.Н.** Моделирование затвердевания металлической капли на холодной подложке // Математическое моделирование. 2001. Т. 13, № 9. С. 119–127.
14. **Исаев В.И., Шапеев В.П., Черепанов А.Н.** Численное моделирование лазерной сварки тонких металлических пластин с учетом конвекции в сварочной ванне // Теплофизика и аэромеханика. 2010. Т. 8, № 3. С. 451–466.
15. **Солоненко О.П., Головин А.А.** Нестационарный сопряженный теплообмен и фазовые превращения при высокоэнергетической обработке поверхности. Ч.2. Моделирование технологических процессов // Теплофизика и аэромеханика. 2007. Т. 14, № 4. С. 623–638.
16. **Tanaka M., Terasaki H., Ushio M., Lowke J.J.** Numerical study of a free-burning argon arc with anode melting // Plasma Chemistry and Plasma Process. 2003. Vol. 23, No. 3. P. 585–606.
17. **Hu J., Tsai H.L.** Effects of current on droplet generation and plasma in gas metal arc welding // J. Appl. Phys. 2006. Vol. 100. No. 5. P. 053304–053304-12.
18. **Рычков А.Д., Милошевич Х., Тимошевский А.Н., Саломатов В.В.** Математическое моделирование самовосстановления поверхности катода в электродуговом плазмогенераторе // Низкотемпературная плазма: в 20 т. Т. 20. Генерация низкотемпературной плазмы и плазменные технологии. Новосибирск: Наука. 2004. С. 55–64.
19. **Васильев Е.Н., Нестеров Д.А.** Вычислительная модель радиационно-конвективного теплообмена в неоднородных магнитогидродинамических течениях // Вычислительные технологии. 2005. Т. 10, № 6. С. 13–28.
20. **Kovita P., Lowke J.J.** Two-dimensional calculation of welding arc in argon // Urania, I.I.W. Doc. 1982. Vol. 53, No. 11. P. 20–24.
21. **Энгельшт В.С., Гурович В.Ц., Десятков Г.А. и др.** Низкотемпературная плазма. Т. 1. Теория столба электрической дуги. Новосибирск: Наука, 1990. 374 с.
22. **Кулумбаев Э.Б.** Развитие теплофизических моделей дугового, индукционного, свч и оптического разрядов: автореф. дис. ... докт. физ.мат. наук. Бишкек, Кыргызско-Российский Университет, 1999. 42 с.
23. **Лелевкин В.М., Семенов В.Ф.** Множественная контракция дуги в прианодной области // Теплофизика высоких температур. 2002. Т. 40, № 5. С. 698–701.
24. **Урусов Р.М.** О некоторых методах расчета характеристик электрической дуги в многосвязной области // Теплофизика и аэромеханика. 2005. Т. 12, № 3. С. 491–499.
25. **Bini R., Monno M., Boulos M.I.** Numerical and experimental study of transferred arcs in argon // J. Phys. D: Appl. Phys. 2006. Vol. 39, No. 15. P. 3253–3266.
26. **Park J., Heberlein J., Pfender E., Candler G., Chang C.H.** Two-dimensional numerical modeling of direct-current electric arcs in nonequilibrium // Plasma Chem. Plasma Process. 2008. Vol. 28. P. 213–231.
27. **Benilov M.S.** Understanding and modeling plasma-electrode interaction in high-pressure arc discharges: a review // J. Phys. D: Appl. Phys. 2008. Vol. 41, No. 14. P. 144001-1–30.
28. **Hsu K.C., Pfender E.** Two-temperature modeling of the free-burning, high-intensity arcs // J. Appl. Phys. 1983. Vol. 54, No. 8. P. 4359–4366.
29. **Чередищенко В.С., Аньшаков А.С., Кузьмин М.Г.** Плазменные электротехнологические установки. Новосибирск: НГТУ, 2005. 508 с.

30. Пустогаров А.В. Экспериментальные исследования тугоплавких катодов плазмотронов // Экспериментальные исследования плазмотронов. Новосибирск: Наука, 1977. С. 315–340.
31. Lowke J.J., Tanaka M. LTE-diffusion approximation for arc calculations // J. Phys. D: Appl. Phys. 2006. Vol. 39, No. 16. P. 3634–3643.
32. Hsu K.S., Etemadi K., Pfender E. Study of the Free-Burning High-Intensity Argon Arc // J. Appl. Phys. 1983. Vol. 54, No 3. P. 1293–1304.
33. Паневин И.Г., Хвесьюк В.И., Назаренко И.П. и др. Низкотемпературная плазма. Т. 10. Теория и расчет приэлектродных процессов. Новосибирск: Наука, 1992. 194 с.
34. Дюжев Г.А., Митрофанов Н.К., Школьник С.М. Анодная область свободно горящей дуги атмосферного давления в благородных газах при малых и средних токах / Материалы конф. Физика и техника плазмы. Минск. 1994. Т. 1. С. 143–146.
35. Месяц Г.А. Эктон-лавина электронов из металла // Успехи физических наук. 1995. Т. 165, № 6. С. 601–626.
36. Заятуев Х.Ц. Электрический ток и теплообмен на катодах дуговых разрядов // Низкотемпературная плазма. Т. 20. Генерация низкотемпературной плазмы и плазменные технологии. Новосибирск: Наука, 2004. С. 86–104.
37. Аньшаков А.С., Урбах Э.К. Исследование теплового механизма эрозии цилиндрического катода в технологических плазматронах // Низкотемпературная плазма. Т. 20. Генерация низкотемпературной плазмы и плазменные технологии: Проблемы и перспективы. Новосибирск: Наука, 2004. С. 424–432.
38. Бобров Ю.К., Быстров В.П., Рухадзе А.А. О физической модели обратного движения катодного пятна // Журнал технической физики. 2006. Т. 76, № 5. С. 35–41.
39. Митрофанов Н.К., Школьник С.М. Две формы привязки атмосферной дуги постоянного тока в аргоне к термоэмиссионному катоду // Журнал технической физики. 2007. Т. 77, № 6. С. 34–44.
40. Самарский А.А. Теория разностных схем. М: Наука, 1983. 616 с.
41. Шоек П. Исследование баланса энергии на аноде сильноточных дуг, горящих в атмосфере аргона // Современные проблемы теплообмена. М.: Энергия, 1966. С. 110–139.
42. Шпильрайн Э.Э., Фомин В.А., Сквородько С.Н., Сокол Г.Ф. Исследование вязкости жидких металлов. М: Наука, 1983. 243 с.
43. Калажиков Х.Х., Калажиков З.Х., Хокогов Х.Б. Поверхностное натяжение расплава чистого алюминия // Журнал технической физики. 2003. Т. 73, № 2. С. 141–143.
44. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 146 с.
45. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.
46. Вабишевич П.Н. Метод фиктивных областей для задач математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1991. 156 с.
47. Данаев Н.Т. Эффективные методы численного решения уравнений гидродинамики в сложных областях: дисс. ... док. физ.-мат. наук. КазГУ им. Аль-Фараби. Алматы, 1994.
48. Смагулов Ш., Сироченко В.П., Орунханов М.К. Численное исследование течений жидкости в нерегулярных областях. Алма-Ата, 2001. 276 с.
49. Урусов Р.М., Урусова Т.Э. Применение метода фиктивных областей для расчета характеристик электрической дуги // Теплофизика высоких температур. 2004. Т. 42, № 3. С. 374–382.
50. Жайнаков А., Урусов Р.М., Урусова Т.Э. Численный анализ электрических дуг в нерегулярных областях. Бишкек, 2007. 194 с.
51. Валеева А.А., Жайнаков А., Лелевкин В.М., Энгельшт В.С. Расчет электрической дуги в канале методом установления // IX Всесоюз. конф. по ГНТП, Фрунзе, 1983. С. 44–45.
52. Финкельбург В., Меккер Г. Электрические дуги и термическая плазма. М.: ИЛ, 1961. 370 с.
53. Гурович В.Ц., Десятков Г.А., Спекторов В.Л., Энгельшт В.С. Нелинейные модели нестационарной дуги // VIII Всесоюз. конф. ГНТП. Новосибирск, 1980. С. 16–23.

Статья поступила в редакцию 20 октября 2010 г.