

УДК 533.95

## О ГЕНЕРАЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПРИ СДВИГОВОМ ДВИЖЕНИИ ПРОВОДЯЩИХ СЛОЕВ

С. В. Федоров

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, 107005 Москва

Рассмотрена генерация продольного магнитного поля между жесткими проводящими слоями из материалов с различной электропроводностью при их сдвиговом движении с постоянной скоростью поперек линий индукции начального поля. Установлены пределы усиления генерируемого поля, обусловленные конечностью толщины проводящих слоев. Для описания эволюции магнитного поля при различных условиях генерации использованы схемы двух слоев конечной толщины, полубесконечного слоя и слоя конечной толщины, а также двух полубесконечных слоев.

**Постановка задачи.** Сдвиговое движение проводников поперек линий индукции созданного в них начального магнитного поля индуцирует в проводниках электрические токи и приводит к генерации магнитного поля, линии индукции которого ориентированы вдоль направления движения [1]. В определенных условиях такое движение проводников позволяет достичь существенного усиления начального поля, что может быть использовано при получении сильных магнитных полей [2].

В работе [2] рассмотрен эффект генерации магнитного поля в зазоре между жесткими (недеформируемыми) проводящими полупространствами с одинаковой электропроводностью при их сдвиговом движении. В настоящей работе результаты, полученные в [2], обобщаются на случай сдвигового движения жестких проводящих слоев конечной толщины из материалов с различной электропроводностью.

Задача решается в следующей постановке (рис. 1). Два абсолютно жестких слоя из проводящих материалов с удельными электропроводностями  $\sigma_1$  (правый слой) и  $\sigma_2$  (левый слой) расположены параллельно друг другу и разделены зазором шириной  $a$ . Толщины правого и левого слоев равны соответственно  $\delta_1$  и  $\delta_2$ . В материале слоев и окружающем их пространстве создано однородное магнитное поле с индукцией  $B_0$ , направленное перпендикулярно слоям. Слои движутся относительно друг друга в продольном направлении со скоростью  $v_0$ .

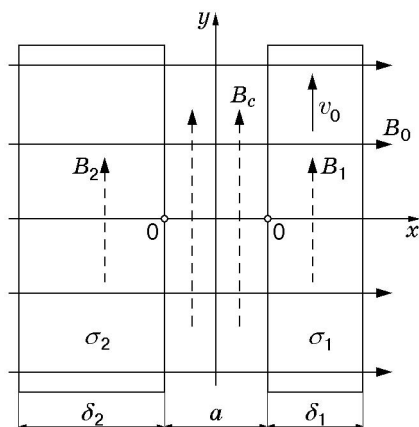


Рис. 1. Схема генерации магнитного поля при сдвиговом движении проводящих слоев

В результате движения в поперечном магнитном поле  $B_0$  в материале слоев индуцируются электрические токи, текущие вдоль слоев перпендикулярно линиям индукции поперечного поля и направлению сдвигового движения (т. е. направленные перпендикулярно плоскости рис. 1), и возникает продольное магнитное поле. Очевидно, в силу закона сохранения электрического заряда полные индукционные токи, протекающие в левом и правом слоях, должны быть противоположно направлены и равны по модулю (предполагается, что эти токи замыкаются друг на друга в бесконечности). Отсюда (на основании закона полного тока) следует, что генерируемое продольное поле существует только в материале слоев и в зазоре между ними, исчезая на поверхностях слоев, обращенных наружу (от зазора). Индукцию продольного магнитного поля в правом и левом слоях обозначим соответственно  $B_1$  и  $B_2$ , а в зазоре —  $B_c$ . Поле в зазоре  $B_c$  является однородным, а значения  $B_1$  и  $B_2$  переменны по толщинам слоев. Все эти величины являются функциями времени  $t$ . Индукция начального поперечного поля  $B_0$  при сформулированных условиях не меняется.

Без ограничения общности задачи выберем систему отсчета, в которой левый слой покоится, а правый движется параллельно ему в продольном направлении со скоростью  $v_0$  (рис. 1). Ось  $x$  системы координат направлена перпендикулярно слоям, ось  $y$  — вдоль направления продольного движения. В результате взаимодействия токов, индуцируемых в слоях за счет сдвигового движения, с поперечным полем  $B_0$  на слои будут действовать противоположно направленные продольные электромагнитные силы, стремящиеся уменьшить скорость их сдвигового движения. В рассматриваемой задаче действие этих сил не учитывается, т. е. предполагается, что они уравновешиваются какими-либо внешними силами, приложенными к слоям, так что скорость сдвигового движения слоев остается неизменной. Исключается также возможность движения слоев вдоль оси  $x$ .

Эволюция продольного магнитного поля в материале правого и левого слоев описывается соответственно следующими уравнениями диффузии [1]:

$$\frac{\partial B_1}{\partial t} = \nu_{m1} \frac{\partial^2 B_1}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial B_2}{\partial t} = \nu_{m2} \frac{\partial^2 B_2}{\partial x^2}, \quad (1)$$

где  $\nu_{m1} = 1/(\mu_0\sigma_1)$ ,  $\nu_{m2} = 1/(\mu_0\sigma_2)$  — магнитные вязкости материалов;  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  Гн/м — магнитная постоянная. Так как поле  $B_c$  в зазоре однородно, протяженность зазора вдоль оси  $x$  можно считать равной нулю, полагая, что области изменения координаты  $x$  для первого ( $0 < x < \delta_1$ ) и второго ( $-\delta_2 < x < 0$ ) уравнений системы (1) сопрягаются друг с другом при  $x = 0$ . При этом условия сопряжения функций  $B_1(x, t)$  и  $B_2(x, t)$  при  $x = 0$ , очевидно, должны задаваться соответствующими граничными условиями с учетом фактической ширины зазора  $a$  между слоями.

В рассматриваемой физической постановке задача предполагает формулировку следующих граничных условий. Так как продольное магнитное поле должно отсутствовать во внешнем по отношению к слоям пространстве, необходимо, чтобы оно исчезало на их наружных поверхностях при  $x = \delta_1$  и  $x = -\delta_2$ :

$$B_1(\delta_1, t) = 0, \quad B_2(-\delta_2, t) = 0. \quad (2)$$

Кроме того, при конечной проводимости материалов слоев ( $\nu_{m1} \neq 0$ ,  $\nu_{m2} \neq 0$ ) исключается протекание поверхностных токов, поэтому продольное поле должно быть непрерывным на поверхностях слоев, обращенных к зазору. Отсюда следует одно из граничных условий при  $x = 0$

$$B_1(0, t) = B_2(0, t) = B_c(t). \quad (3)$$

Другое граничное условие при  $x = 0$ , так же как в [2], может быть получено на основе закона электромагнитной индукции и закона Ома в дифференциальной форме. Движение

правого слоя в поперечном магнитном поле  $B_0$  (рис. 1) и изменение продольного поля в зазоре  $B_c$  должны индуцировать на обращенных друг к другу поверхностях слоев электрические токи с объемными плотностями  $j_1 = (\partial B_1/\partial x)/\mu_0$  и  $j_2 = (\partial B_2/\partial x)/\mu_0$ . Связывая с помощью закона Ома ЭДС индукции в контуре, охватывающем зазор, с этими токами (с учетом их направлений на поверхностях правого и левого слоев), приходим к еще одному граничному условию при  $x = 0$

$$a \frac{dB_c}{dt} = B_0 v_0 + \nu_{m1} \frac{\partial B_1}{\partial x} - \nu_{m2} \frac{\partial B_2}{\partial x}. \quad (4)$$

Начальные условия для генерируемого поля являются нулевыми:  $B_2(x, 0) = B_1(x, 0) = B_c(0) = 0$ .

Индукционные токи, возникающие в слоях при сдвиговом движении, сначала концентрируются вблизи их внутренних поверхностей, а затем в результате диффузии проникают в глубь материалов слоев. Соответственно создаваемое этими токами продольное поле, генерируемое в зазоре, постепенно диффундирует из него в материал слоев. Очевидно, если рассматриваемое время движения слоев существенно меньше времени диффузии поля по толщине их материала, то конечные поперечные размеры слоев не влияют на генерацию поля, что позволяет считать их протяженность вдоль оси  $x$  неограниченной. С учетом данного обстоятельства рассматриваются три возможных варианта задачи: генерация поля между двумя слоями конечной толщины, между полубесконечным слоем и слоем конечной толщины, а также между двумя полубесконечными слоями.

**Слой конечной толщины.** Вводя безразмерные координату  $x' = x/\sqrt{\delta_1\delta_2}$  и время  $t' = t\sqrt{\nu_{m1}\nu_{m2}}/(\delta_1\delta_2)$ , систему уравнений (1) запишем в виде

$$\frac{\partial B'_1}{\partial t'} = \gamma \frac{\partial^2 B'_1}{\partial (x')^2}, \quad \frac{\partial B'_2}{\partial t'} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 B'_2}{\partial (x')^2}, \quad (5)$$

где в качестве масштаба индукции генерируемого поля принята индукция начального поперечного поля  $B_0$ , а безразмерный параметр  $\gamma$  характеризует соотношение магнитных вязкостей слоев:  $\gamma = \sqrt{\nu_{m1}/\nu_{m2}}$ .

Граничные условия (2)–(4) примут вид

$$\begin{aligned} x' = \infty: \quad B'_1(\infty, t') = 0, \quad x' = -1/\infty: \quad B'_2(-1/\infty, t') = 0, \\ x' = 0: \quad B'_2(0, t') = B'_1(0, t') = B'_c(t'), \end{aligned} \quad (6)$$

$$a' \frac{dB'_c}{dt'} = \text{Re}_m + \gamma \frac{\partial B'_1}{\partial x'} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial B'_2}{\partial x'},$$

где  $a' = a/\sqrt{\delta_1\delta_2}$  — безразмерная ширина зазора между слоями; безразмерный параметр  $\infty = \sqrt{\delta_1/\delta_2}$  характеризует соотношение толщин слоев; магнитное число Рейнольдса  $\text{Re}_m = v_0\sqrt{\delta_1\delta_2}/(\nu_{m1}\nu_{m2})$  определяет соотношение скорости генерации поля (характеризуемого скоростью сдвигового движения  $v_0$ ) и его диффузии сквозь материалы слоев.

Применяя интегральное преобразование Лапласа [3] по времени к системе уравнений (5), для изображений функций генерируемого поля

$$B_1^*(x', p) = \int_0^\infty B'_1(x', t') \exp(-pt') dt', \quad B_2^*(x', p) = \int_0^\infty B'_2(x', t') \exp(-pt') dt'$$

получаем обыкновенные линейные дифференциальные уравнения второго порядка

$$\gamma \frac{d^2 B_1^*}{d(x')^2} - p B_1^* = 0, \quad \frac{1}{\gamma} \frac{d^2 B_2^*}{d(x')^2} - p B_2^* = 0, \quad (7)$$

общее решение которых может быть записано в виде

$$B_1^* = A_1 \operatorname{sh}(\sqrt{p/\gamma} x') + A_2 \operatorname{ch}(\sqrt{p/\gamma} x'), \quad B_2^* = A_3 \operatorname{sh}(\sqrt{\gamma p} x') + A_4 \operatorname{ch}(\sqrt{\gamma p} x').$$

Постоянные интегрирования  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , входящие в это решение, определяются на основе граничных условий задачи (6), к которым также применено преобразование Лапласа. В результате изображения искомых функций записываются в виде

$$\begin{aligned} B_1^* &= \frac{\operatorname{Re}_m}{pZ(p)} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\varepsilon} \sqrt{p}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{p}\left(1 - \frac{x'}{\varepsilon}\right)\right), \\ B_2^* &= \frac{\operatorname{Re}_m}{pZ(p)} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\varepsilon} \sqrt{p}(1 + \varepsilon x')\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{p}\right), \\ B_c^* &= \frac{\operatorname{Re}_m}{pZ(p)} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\varepsilon} \sqrt{p}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{p}\right), \end{aligned}$$

где  $Z(p) = a'p \operatorname{sh}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{p}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\varepsilon} \sqrt{p}\right) + \sqrt{\gamma p} \operatorname{ch}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{p}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\varepsilon} \sqrt{p}\right) + \sqrt{\frac{p}{\gamma}} \operatorname{sh}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{p}\right) \times \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\varepsilon} \sqrt{p}\right)$ .

Полученные изображения являются однозначными функциями параметра  $p$ . Как показывает анализ корней уравнения  $Z(p) = 0$ , рассматриваемого в комплексной области, особыми точками данных изображений является только бесконечное число полюсов первого порядка [3], один из которых расположен в точке  $p = 0$ , а остальные лежат на отрицательной части действительной оси. Осуществляя переход к оригиналам путем суммирования вычетов соответствующих изображений по всем этим полюсам [3], получим следующие выражения для функций генерируемого поля:

$$\begin{aligned} B_1'(x', t') &= \operatorname{Re}_m \left[ \frac{\varepsilon\gamma(1 - x'/\varepsilon)}{\varepsilon^2 + \gamma^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\exp(-q_k^2 t')}{q_k^2 Z_1(q_k)} \sin\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}} q_k \left(1 - \frac{x'}{\varepsilon}\right)\right) \sin\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\varepsilon} q_k\right) \right], \\ B_2'(x', t') &= \operatorname{Re}_m \left[ \frac{\varepsilon\gamma(1 + \varepsilon x')}{\varepsilon^2 + \gamma^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\exp(-q_k^2 t')}{q_k^2 Z_1(q_k)} \sin\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}} q_k\right) \sin\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\varepsilon} q_k(1 + \varepsilon x')\right) \right], \quad (8) \\ B_c'(t') &= \operatorname{Re}_m \left[ \frac{\varepsilon\gamma}{\varepsilon^2 + \gamma^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\exp(-q_k^2 t')}{q_k^2 Z_1(q_k)} \sin\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}} q_k\right) \sin\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\varepsilon} q_k\right) \right], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Z_1(q_k) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\gamma} \right) \cos\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}} q_k\right) \cos\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\varepsilon} q_k\right) - \left( a' + \frac{1}{2} \left( \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right) \right) \sin\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}} q_k\right) \sin\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\varepsilon} q_k\right) + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{\gamma} q_k} \left( 1 - a' \frac{\gamma}{\varepsilon} q_k^2 \right) \sin\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}} q_k\right) \cos\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\varepsilon} q_k\right) + \frac{\sqrt{\gamma}}{2q_k} \left( 1 - a' \frac{\varepsilon}{\gamma} q_k^2 \right) \cos\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}} q_k\right) \sin\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\varepsilon} q_k\right), \end{aligned}$$

$q_k$  — положительные корни уравнения

$$a'q \sin\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}} q\right) \sin\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\varepsilon} q\right) - \sqrt{\gamma} \cos\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}} q\right) \sin\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\varepsilon} q\right) - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \sin\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma}} q\right) \cos\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\varepsilon} q\right) = 0,$$

вытекающего из уравнения  $Z(p) = 0$  при замене  $p = -q^2$ .

Следует отметить, что ряды в соотношениях (8) быстро сходятся, так что при проведении расчетов можно ограничиться несколькими их первыми членами. Согласно полученным решениям при генерации магнитного поля сдвиговым движением слоев конечной

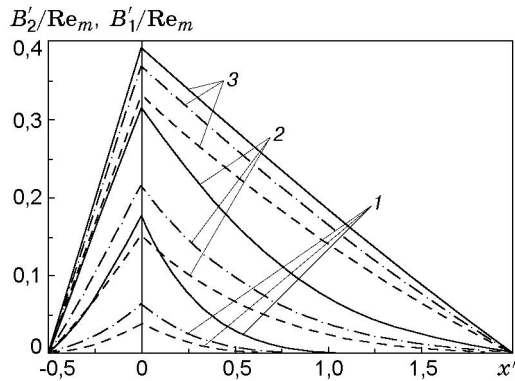


Рис. 2. Эволюция продольного магнитного поля в материалах слоев конечной толщины ( $\gamma = 1$ ,  $\varkappa = 2$ ):  
 1 —  $t' = 0,1$ ; 2 —  $t' = 0,5$ ; 3 —  $t' = 2$ ; сплошные линии —  $a' = 0$ ; штрихпунктирные —  $a' = 1$ ; штриховые —  $a' = 2$

толщины существует предельный уровень индукции генерируемого поля, к которому она монотонно стремится при  $t' \rightarrow \infty$ . Предельная интенсивность поля в зазоре не зависит от его ширины и составляет

$$B'_{c\lim} = \text{Re}_m / (\varkappa/\gamma + \gamma/\varkappa) \quad (9)$$

или при переходе к размерным величинам

$$B_{c\lim} = B_0 v_0 / (\nu_{m1}/\delta_1 + \nu_{m2}/\delta_2).$$

В соответствии с (9) при одном и том же значении  $\text{Re}_m$  максимальное предельное увеличение поля в зазоре достигается при  $\varkappa = \gamma$  (т. е. при  $\delta_1 \nu_{m2} = \delta_2 \nu_{m1}$ ). В этом случае  $B'_{c\lim} = 0,5 \text{Re}_m$ .

Распределения индукции генерируемого поля по толщинам слоев в пределе (при  $t' \rightarrow \infty$ ) стремятся к линейным (рис. 2):

$$B'_1 \approx \text{Re}_m (1 - x'/\varkappa) / (\varkappa/\gamma + \gamma/\varkappa), \quad B'_2 \approx \text{Re}_m (1 + \varkappa x') / (\varkappa/\gamma + \gamma/\varkappa),$$

что соответствует равномерному распределению в слоях плотности индукционных токов

$$j_1 = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_1}{\partial x} \approx -\frac{B_0 v_0}{\mu_0 \delta_1 (\nu_{m1}/\delta_1 + \nu_{m2}/\delta_2)}, \quad j_2 = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_2}{\partial x} \approx \frac{B_0 v_0}{\mu_0 \delta_2 (\nu_{m1}/\delta_1 + \nu_{m2}/\delta_2)}.$$

Таким образом, из проведенного анализа следует, что для описания эволюции генерируемого поля при его выходе на предельный уровень может быть принято допущение о равномерности распределений индукционных токов по толщинам слоев. Использование этого допущения (будем называть его приближением “электрически тонких” слоев) существенно упрощает решение задачи.

В рамках приближения “электрически тонких” слоев изменение магнитного поля  $B_c$  в зазоре описывается обыкновенным линейным дифференциальным уравнением

$$a \frac{dB_c}{dt} + \left( \frac{\nu_{m1}}{\delta_1} + \frac{\nu_{m2}}{\delta_2} \right) B_c = B_0 v_0, \quad (10)$$

вытекающим из граничного условия (4), если в нем положить  $\partial B_1/\partial x = -B_c/\delta_1$ ,  $\partial B_2/\partial x = B_c/\delta_2$ . Решение уравнения (10) с начальным условием  $B_c(0) = 0$  записывается в виде

$$B_c(t) = \frac{B_0 v_0}{\nu_{m1}/\delta_1 + \nu_{m2}/\delta_2} \left\{ 1 - \exp \left[ -\frac{1}{a} \left( \frac{\nu_{m1}}{\delta_1} + \frac{\nu_{m2}}{\delta_2} \right) t \right] \right\}. \quad (11)$$

На рис. 3 показано изменение магнитного поля в зазоре при различных значениях параметров  $a'$ ,  $\varkappa$ ,  $\gamma$ , полученное на основе точного решения (8) и при использовании приближения “электрически тонких” слоев. Из рис. 3 следует, что с увеличением ширины зазора  $a'$  уменьшается скорость выхода генерируемого поля на предельный уровень (9).

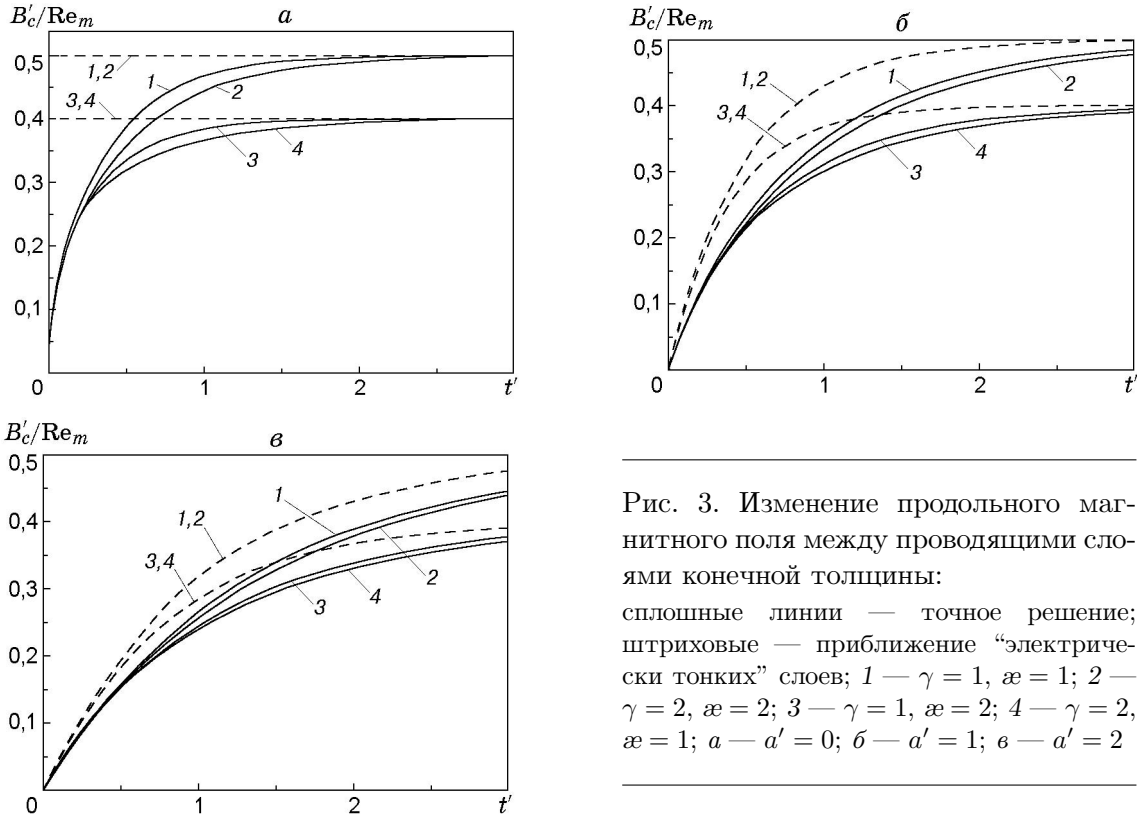


Рис. 3. Изменение продольного магнитного поля между проводящими слоями конечной толщины:

сплошные линии — точное решение; штриховые — приближение “электрически тонких” слоев; 1 —  $\gamma = 1, \varepsilon = 1$ ; 2 —  $\gamma = 2, \varepsilon = 2$ ; 3 —  $\gamma = 1, \varepsilon = 2$ ; 4 —  $\gamma = 2, \varepsilon = 1$ ; а —  $a' = 0$ ; б —  $a' = 1$ ; в —  $a' = 2$

При этом приближенное решение (11) дает завышенную скорость роста поля на начальных стадиях генерации, а в случае отсутствия зазора мгновенно устанавливается предельное значение продольного магнитного поля.

Следует отметить, что более близкий к точному решению результат с использованием приближения “электрически тонких” слоев получается, если закон электромагнитной индукции (10) записать не для контура, охватывающего зазор, а для контура шириной  $a + (\delta_1 + \delta_2)/2$ , проходящего через середины слоев. В этом случае соотношение (11) примет вид

$$B_c(t) = \frac{B_0 v_0}{\nu_{m1}/\delta_1 + \nu_{m2}/\delta_2} \left[ 1 - \exp \left( - \frac{\nu_{m1}/\delta_1 + \nu_{m2}/\delta_2}{a + (\delta_1 + \delta_2)/2} t \right) \right].$$

Если свойства слоев, определяющие экранировку генерируемого поля, существенно различны (существенно различаются характерные времена диффузии магнитного поля  $\delta_1^2/\nu_{m1}$  и  $\delta_2^2/\nu_{m2}$  для слоев), то приближение “электрически тонкого” слоя может быть использовано для одного из них (имеющего меньшее время диффузии). Если предположить, что правый слой (см. рис. 1) является “электрически тонким” с постоянной плотностью тока  $j_1 = -B_c/(\mu_0 \delta_1)$ , то задача сведется к решению уравнения диффузии поля лишь для левого слоя (второе уравнение в системе (1)) при граничных условиях

$$\begin{aligned} x = -\delta_2: \quad B_2(-\delta_2, t) &= 0, \\ x = 0: \quad a \frac{dB_c}{dt} &= B_0 v_0 - \frac{\nu_{m1}}{\delta_1} B_c - \nu_{m2} \frac{\partial B_2}{\partial x}, \end{aligned}$$

где  $B_c(t) = B_2(0, t)$ . Используя те же, что и ранее, безразмерные параметры, после применения преобразования Лапласа получаем следующее выражение для изображения индук-

ции продольного поля в левом слое:

$$B_2^*(x', p) = \operatorname{Re}_m \operatorname{sh} \left( \frac{\sqrt{\gamma}}{\varkappa} \sqrt{p}(1 + \varkappa x') \right) / \left[ p \left( \left( a'p + \frac{\gamma}{\varkappa} \right) \operatorname{sh} \left( \frac{\sqrt{\gamma}}{\varkappa} \sqrt{p} \right) + \sqrt{\frac{p}{\gamma}} \operatorname{ch} \left( \frac{\sqrt{\gamma}}{\varkappa} \sqrt{p} \right) \right) \right].$$

Множество особых точек данного изображения включает только бесконечное число полюсов первого порядка (в точке  $p = 0$  и на отрицательной части действительной оси). Суммируя вычеты по всем этим полюсам [3], находим оригинал поля

$$B_2'(x', t') = \operatorname{Re}_m \left\{ \frac{\varkappa \gamma (1 + \varkappa x')}{\varkappa^2 + \gamma^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \sin \left( \frac{\sqrt{\gamma}}{\varkappa} q_k (1 + \varkappa x') \right) \exp(-q_k^2 t') / \right. \\ \left. / \left[ q_k^2 \left( \frac{1}{2q_k} \frac{\sqrt{\gamma}}{\varkappa} \left( \frac{\gamma}{\varkappa} + \frac{\varkappa}{\gamma} - a' q_k^2 \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\gamma}}{\varkappa} q_k \right) - \left( a' + \frac{1}{2\varkappa} \right) \sin \left( \frac{\sqrt{\gamma}}{\varkappa} q_k \right) \right] \right\}, \quad (12)$$

где  $q_k$  — положительные корни уравнения

$$\left( \frac{\gamma}{\varkappa} - a' q^2 \right) \sin \left( \frac{\sqrt{\gamma}}{\varkappa} q \right) + \frac{q}{\varkappa} \cos \left( \frac{\sqrt{\gamma}}{\varkappa} q \right) = 0. \quad (13)$$

Закон изменения магнитного поля  $B_c'(t')$  в зазоре получается из (12) при  $x' = 0$ . Как и в приближении двух “электрически тонких” слоев, чтобы повысить точность решения (12) на ранних стадиях генерации, можно иначе выбрать контур для записи закона электромагнитной индукции (граничного условия при  $x = 0$ ). В данном случае более точный результат дает использование контура шириной  $a + \delta_1/2$ , проходящего через обращенную к зазору поверхность левого слоя (см. рис. 1) и середину правого (“электрически тонкого”) слоя. При таком выборе решение получается путем замены в (12) и (13) величины  $a'$  на  $a' + \varkappa/2$ .

Как отмечено выше, для поддержания постоянной скорости сдвигового движения  $v_0$  на слои должны действовать внешние силы, уравнивающие действие электромагнитных сил со стороны поперечного поля  $B_0$ . Для правого слоя электромагнитная сила направлена вниз. В расчете на единицу площади поверхности слоя ее абсолютное значение вычисляется по формуле

$$f_A = \int_0^{\delta_1} j_1 B_0 dx = \frac{B_0}{\mu_0} \int_0^{\delta_1} \frac{\partial B_1}{\partial x} dx = \left| \frac{B_0}{\mu_0} (B_1(\delta_1) - B_1(0)) \right| = \frac{B_0 B_c}{\mu_0}$$

и полностью определяется текущей интенсивностью поля в зазоре и индукцией поперечного поля. Очевидно, на левый слой действует такая же сила, направленная вверх.

Используем полученные результаты для оценки ограничений на предельное усиление магнитного поля при сдвиговом движении проводящих пластин, возникающих в реальных условиях из-за конечности их толщины. Для одинаковых пластин ( $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ ,  $\nu_{m1} = \nu_{m2} = \nu_m$ ) предельное усиление поля определяется следующим образом:  $B_{c \lim}/B_0 = 0,5v_0\delta/\nu_m$ . В случае медных пластин толщиной 1 см, движущихся с относительной скоростью, равной нескольким десяткам метров в секунду,  $B_{c \lim}/B_0 \approx 10$ , и для генерации полей мегагауссного уровня требуется создание начального поля  $B_0 \sim 10$  Тл.

**Полубесконечный слой и слой конечной толщины.** Будем считать, что время диффузии магнитного поля для одного из слоев настолько велико (по сравнению с другим слоем), что его толщина не оказывает влияния на генерацию. Тогда этот слой можно считать полубесконечным (например, левый слой на рис. 1).

В качестве пространственного масштаба выберем толщину правого (ограниченного) слоя  $\delta_1$ , определяя безразмерную координату как  $x' = x/\delta_1$ , а безразмерное время как

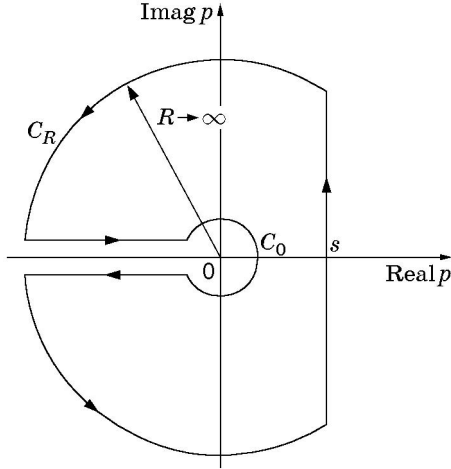


Рис. 4. Ориентированный контур в комплексной плоскости для вычисления интеграла Меллина

$t' = t\delta_1/\sqrt{\nu_{m1}\nu_{m2}}$ . При этом уравнения диффузии поля, записанные в безразмерных переменных, сохраняют свой вид (5). Что касается граничных условий (6), то при  $x' = 0$  они также имеют прежний вид, но при этом безразмерная ширина зазора  $a'$  и магнитное число Рейнольдса  $Re_m$  определяются иначе:

$$a' = a/\delta_1, \quad Re_m = v_0\delta_1/\sqrt{\nu_{m1}\nu_{m2}}.$$

Граничное условие на тыльной поверхности правого слоя ( $x = \delta_1$ ) в безразмерных переменных имеет вид

$$x' = 1, \quad B'_1(1, t') = 0.$$

Аналогичное условие на тыльной поверхности левого (полубесконечного) слоя исключается, заменяясь требованием ограниченности функции  $B'_2(x', t')$  при  $x' \rightarrow -\infty$ .

Общие решения уравнений (7) для изображений функций генерируемого поля (с учетом условия ограниченности решения для  $B'_2$  при  $x' \rightarrow -\infty$ ) примут вид

$$B_1^* = A_1 \operatorname{sh}(\sqrt{p/\gamma} x') + A_2 \operatorname{ch}(\sqrt{p/\gamma} x'), \quad B_2^* = A_3 \exp(\sqrt{\gamma p} x').$$

После определения на основе граничных условий постоянных интегрирования  $A_1, A_2, A_3$  для изображения функции продольного поля в зазоре получим следующее выражение:

$$B_c^*(p) = Re_m/[p(a'p + \sqrt{\gamma p} \operatorname{cth}(\sqrt{p/\gamma}) + \sqrt{p/\gamma})]. \quad (14)$$

Для обращения этого изображения используем формулу Меллина [3]

$$B'_c(t') = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} B_c^*(p) \exp(pt') dp, \quad (15)$$

где  $i$  — мнимая единица;  $s$  выбирается так, чтобы все особые точки подынтегральной функции лежали левее прямой  $\operatorname{Real}(p) = s$  (рис. 4).

Так как точка  $p = 0$  является точкой ветвления [3] изображения (14), для выделения его однозначной ветви при вычислении интеграла (15) в плоскости комплексного параметра  $p$  выберем ориентированный замкнутый контур интегрирования с разрезом вдоль отрицательной части действительной оси (рис. 4). Внутри этого контура особые точки функции  $B_c^*(p)$  (14) отсутствуют, поэтому интеграл по нему равен нулю [3]. При записи данного интеграла в виде суммы интегралов по отдельным участкам контура ненулевой вклад, помимо (15), дают интегралы по берегам разреза, а также интеграл по окружности  $C_0$  бесконечно малого радиуса, включающей начало координат, где расположен полюс



первого порядка функции (14). Записывая интегралы по берегам разреза и учитывая, что интеграл по окружности  $C_0$  (рис. 4) равен вычету подынтегральной функции в точке  $p = 0$ :

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\operatorname{Re}_m \exp(pt')}{p(a'p + \sqrt{\gamma p} \operatorname{cth}(\sqrt{p/\gamma}) + \sqrt{p/\gamma})}\right)_{p=0} = \frac{\operatorname{Re}_m}{\gamma},$$

получим закон изменения поля, генерируемого в зазоре:

$$B'_c(t') = \frac{\operatorname{Re}_m}{\gamma} \left(1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{\pi} \int_0^\infty \frac{\exp(-qt') dq}{\sqrt{q}((a'q - \sqrt{\gamma q} \operatorname{ctg}(\sqrt{q/\gamma}))^2 + q/\gamma)}\right). \quad (16)$$

При  $t' \rightarrow \infty$  интеграл в (16) стремится к нулю, и предельно достижимое значение поля в зазоре между полубесконечным слоем и слоем конечной толщины определяется выражением  $B'_{c\lim} = \operatorname{Re}_m/\gamma$ . При переходе к размерным величинам  $B_{c\lim} = B_0 v_0 \delta_1 / \nu_{m1}$  это значение зависит только от характеристик слоя конечной толщины.

Дальнейшее упрощение решения (16) с выходом на конечные соотношения может быть произведено для случая, когда слой конечной толщины считается “электрически тонким” (данное приближение, как отмечено выше, справедливо при  $t' \rightarrow \infty$ ). В этом случае изображение (14) поля в зазоре преобразуется:

$$B_c^*(p) = \operatorname{Re}_m / [p(a'p + \sqrt{p/\gamma} + \gamma)]. \quad (17)$$

Результат обращения изображения (17) зависит от вида корней квадратного уравнения

$$q^2 + q/(a'\sqrt{\gamma}) + \gamma/a' = 0. \quad (18)$$

При  $4a'\gamma^2 < 1$  данное уравнение имеет два действительных корня (оба корня отрицательные)

$$q_1 = -(1 + \sqrt{1 - 4a'\gamma^2}) / (2a'\sqrt{\gamma}), \quad q_2 = -(1 - \sqrt{1 - 4a'\gamma^2}) / (2a'\sqrt{\gamma}),$$

и оригинал поля в зазоре можно представить в виде [4]

$$B'_c(t') = \frac{\operatorname{Re}_m}{\gamma} \left[1 - \frac{2a'\gamma^2}{\sqrt{1 - 4a'\gamma^2}} \left(\frac{\exp(q_2^2 t') \operatorname{erfc}(|q_2|\sqrt{t'})}{1 - \sqrt{1 - 4a'\gamma^2}} - \frac{\exp(q_1^2 t') \operatorname{erfc}(|q_1|\sqrt{t'})}{1 + \sqrt{1 - 4a'\gamma^2}}\right)\right],$$

где  $\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty \exp(-\xi^2) d\xi$  — дополнительная функция ошибок Гаусса [5].

При  $4a'\gamma^2 = 1$  уравнение (18) имеет кратный корень  $q_{1,2} = -1/(2a'\sqrt{\gamma})$ , и оригинал для (17) записывается в виде [4]

$$B'_c(t') = \frac{\operatorname{Re}_m}{\gamma} \left[1 - \left(1 - 2\frac{\gamma}{a'} t'\right) \exp\left(\frac{\gamma}{a'} t'\right) \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{a'} t'}\right) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\gamma}{a'} t'}\right].$$

В случае  $4a'\gamma^2 > 1$  корни уравнения (18) являются комплексно-сопряженными, и изменение магнитного поля в зазоре описывается соотношением [4]

$$B'_c(t') = \frac{\operatorname{Re}_m}{\gamma} \left[1 - \operatorname{Real}\left(w\left(\frac{\sqrt{4a'\gamma^2 - 1 + i}}{2a'\sqrt{\gamma}} \sqrt{t'}\right)\right) - \frac{1}{\sqrt{4a'\gamma^2 - 1}} \operatorname{Imag}\left(w\left(\frac{\sqrt{4a'\gamma^2 - 1 + i}}{2a'\sqrt{\gamma}} \sqrt{t'}\right)\right)\right],$$

где  $w(z) = \exp(-z^2) \left(1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(\xi^2) d\xi\right)$  — интеграл вероятностей комплексного аргумента [5].

Используя приближение “электрически тонкого” слоя на ранних стадиях генерации, для увеличения точности расчетов в приведенных зависимостях (начиная с соотношения (17)) величину  $a'$  можно заменить на  $a' + 1/2$ , что соответствует при записи граничного условия (4) электрическому контуру, проходящему через середину “электрически тонкого” слоя.

**Полубесконечные слои.** Исследуя эволюцию генерируемого поля на ранних стадиях генерации при временах, существенно меньших времени диффузии для любого из слоев, толщины обоих слоев можно считать неограниченными. В этом случае безразмерные время  $t'$  и координату  $x'$  определим как  $t' = tv_0^2/\sqrt{\nu_{m1}\nu_{m2}}$ ,  $x' = xv_0/\sqrt{\nu_{m1}\nu_{m2}}$ , что позволяет сохранить неизменной запись уравнений диффузии поля для слоев в безразмерных переменных (5) с тем же, что и в (5), безразмерным параметром  $\gamma$ . Граничные условия для полубесконечных слоев формулируются только при  $x' = 0$  и в безразмерных переменных имеют вид

$$B'_2(0, t') = B'_1(0, t') = B'_c(t'), \quad a' \frac{dB'_c}{dt'} = 1 + \gamma \frac{\partial B'_1}{\partial x'} \Big|_{x'=0} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial B'_2}{\partial x'} \Big|_{x'=0},$$

где безразмерная ширина зазора определяется как  $a' = av_0/\sqrt{\nu_{m1}\nu_{m2}}$ . Дополнительно на функции  $B'_1(x', t')$  и  $B'_2(x', t')$  накладываются условия ограниченности при  $x' \rightarrow \infty$  и  $x' \rightarrow -\infty$  соответственно.

Удовлетворяющие условиям ограниченности на бесконечности и граничным условиям при  $x' = 0$  решения уравнений (7) для изображений искомым функций записываются в виде

$$B_1^* = \frac{\exp(-\sqrt{p/\gamma} x')}{p(a'p + (\sqrt{\gamma} + 1/\sqrt{\gamma})\sqrt{p})}, \quad B_2^* = \frac{\exp(\sqrt{\gamma p} x')}{p(a'p + (\sqrt{\gamma} + 1/\sqrt{\gamma})\sqrt{p})}. \quad (19)$$

Из обращения записанных изображений [4] следуют законы изменения продольного поля в материалах правого и левого слоев

$$B'_1(x', t') = \frac{\sqrt{\gamma}}{\gamma + 1} \left[ 2\sqrt{\frac{t'}{\pi}} \exp\left(-\frac{(x')^2}{4\gamma t'}\right) - \left(\frac{a'\sqrt{\gamma}}{\gamma + 1} + \frac{x'}{\sqrt{\gamma}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x'}{2\sqrt{\gamma t'}}\right) + \frac{a'\sqrt{\gamma}}{\gamma + 1} \exp\left(\frac{(\gamma + 1)^2 t'}{(a')^2 \gamma} + \frac{(\gamma + 1)x'}{a'\gamma}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{(\gamma + 1)\sqrt{t'}}{a'\sqrt{\gamma}} + \frac{x'}{2\sqrt{\gamma t'}}\right) \right], \quad x' \geq 0, \quad (20)$$

$$B'_2(x', t') = \frac{\sqrt{\gamma}}{\gamma + 1} \left[ 2\sqrt{\frac{t'}{\pi}} \exp\left(-\frac{(x')^2 \gamma}{4t'}\right) - \left(\frac{a'\sqrt{\gamma}}{\gamma + 1} - x'\sqrt{\gamma}\right) \operatorname{erfc}\left(-\frac{x'\sqrt{\gamma}}{2\sqrt{t'}}\right) + \frac{a'\sqrt{\gamma}}{\gamma + 1} \exp\left(\frac{(\gamma + 1)^2 t'}{(a')^2 \gamma} - \frac{(\gamma + 1)x'}{a'}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{(\gamma + 1)\sqrt{t'}}{a'\sqrt{\gamma}} - \frac{x'\sqrt{\gamma}}{2\sqrt{t'}}\right) \right], \quad x' \leq 0.$$

Полагая в изображениях (19)  $a' = 0$ , после возвращения к оригиналам устанавливаем, как изменяется продольное поле в слоях в отсутствие зазора между ними:

$$B'_1(x', t') = \frac{\sqrt{\gamma}}{\gamma + 1} \left[ 2\sqrt{\frac{t'}{\pi}} \exp\left(-\frac{(x')^2}{4\gamma t'}\right) - \frac{x'}{\sqrt{\gamma}} \operatorname{erfc}\left(\frac{x'}{2\sqrt{\gamma t'}}\right) \right], \quad x' \geq 0, \quad (21)$$

$$B'_2(x', t') = \frac{\sqrt{\gamma}}{\gamma + 1} \left[ 2\sqrt{\frac{t'}{\pi}} \exp\left(-\frac{(x')^2 \gamma}{4t'}\right) + x'\sqrt{\gamma} \operatorname{erfc}\left(-\frac{x'\sqrt{\gamma}}{2\sqrt{t'}}\right) \right], \quad x' \leq 0.$$

Закон генерации поля в зазоре между полубесконечными слоями получается, если любое из соотношений (20) рассмотреть при  $x' = 0$ . Этот закон имеет вид

$$B'_c(t') = \frac{a'\gamma}{(\gamma + 1)^2} \left[ \exp\left(\frac{(\gamma + 1)^2}{(a')^2 \gamma} t'\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\gamma + 1}{a'\sqrt{\gamma}} \sqrt{t'}\right) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\gamma + 1}{a'\sqrt{\gamma}} \sqrt{t'} - 1 \right]. \quad (22)$$

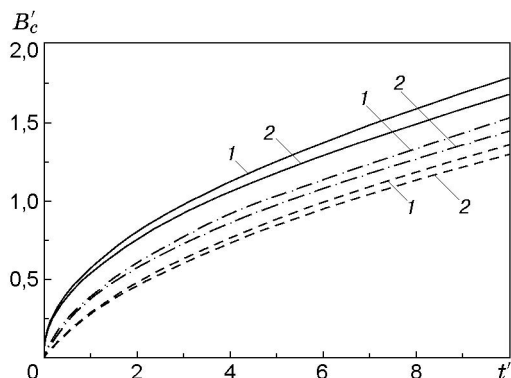


Рис. 5. Изменение продольного магнитного поля между проводящими полубесконечными слоями:

1 —  $\gamma = 1$ ; 2 —  $\gamma = 2$ ; сплошные линии —  $a' = 0$ ; штрихпунктирные —  $a' = 1$ ; штриховые —  $a' = 2$

Полученное решение (22) для поля в зазоре не меняет своего вида при замене  $\gamma$  на  $1/\gamma$  (симметрично относительно электропроводности слоев): перемена мест левого и правого слоев, очевидно, не должна оказывать влияния на генерацию поля в зазоре.

В соответствии с (20)–(22) магнитное поле, генерируемое при сдвиговом движении полубесконечных слоев, растет неограниченно [2]. Динамика генерации поля в пространстве между слоями для различных значений  $a'$  и  $\gamma$  показана на рис. 5. Увеличение зазора между слоями приводит к уменьшению скорости роста поля на начальных стадиях генерации. Наиболее быстрый рост поля происходит при скольжении слоев друг по другу в отсутствие зазора. В этом случае закон изменения генерируемого поля на границе контакта слоев, вытекающий из (21) при  $x' = 0$ , имеет вид

$$B'_c(t') = (2/\sqrt{\pi})\sqrt{\gamma t'}/(\gamma + 1).$$

Нетрудно установить, что данное соотношение является главным членом асимптотики для (22) при  $t' \rightarrow \infty$ . Из этого решения следует, что наличие зазора между полубесконечными слоями оказывает влияние на эволюцию генерируемого при сдвиговом движении магнитного поля лишь на ограниченном временном интервале. При  $t' \rightarrow \infty$  скорость генерации поля не зависит от величины зазора. Что касается влияния параметра  $\gamma$ , то при постоянном значении произведения магнитных вязкостей (определяющем выбранный временной масштаб) наиболее быстрое увеличение поля между слоями достигается для слоев с одинаковой электропроводностью  $\gamma = 1$  (рис. 5).

Автор выражает благодарность А. В. Аттеткову за полезные советы и замечания, высказанные при обсуждении данной работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
2. Биченков Е. И. Две альтернативы магнитной кумуляции // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 5. С. 32–47.
3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.
4. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. М.: Высш. шк., 1965.
5. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции: Формулы, графики, таблицы. М.: Наука, 1977.