

УДК 539.3:624.131

АНАЛИЗ ПРИМЕНИМОСТИ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА КОЛЬСКОГО ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ ГРУНТОВЫХ СРЕД В ДЕФОРМИРУЕМОЙ ОБОЙМЕ

В. Г. Баженов, А. М. Брагов, В. Л. Котов, С. В. Зефиоров,
А. В. Кочетков, С. В. Крылов, А. К. Ломунов

Научно-исследовательский институт механики Нижегородского государственного университета,
603600 Нижний Новгород

Представлены результаты экспериментально-теоретического анализа метода Кольского для динамических испытаний мягких грунтов в упругой обойме. В качестве модели грунта взята предложенная С. С. Григорьяном модель пластически сжимаемой среды с параметрами, определяемыми из ударно-волновых экспериментов. Моделирование процессов высокоскоростного деформирования грунта проведено с помощью модифицированного программного комплекса "Динамика-2". Выполненные численные расчеты позволили установить, что податливость обоймы и трение практически не влияют на измеряемые характеристики грунтовых сред, а основные предпосылки метода Кольского с удовлетворительной точностью выполняются и для мягких грунтов.

Поведение грунтовых сред при воздействии на них интенсивных динамических нагрузок представляет интерес при получении уравнений состояния, анализе волновых процессов в грунтах, а также разработке численных методов расчетов взаимодействия наземных и подземных сооружений с грунтами при сильных землетрясениях, взрывах и ударах.

Подробно изучены динамические свойства грунтов при скоростях деформации до 10^2 с^{-1} . Для более высоких скоростей эти свойства изучены недостаточно, что связано с отсутствием разработанных и обоснованных методов динамических испытаний грунтов. Одним из эффективных экспериментальных методов изучения динамических свойств материалов является метод Кольского [1]. В работах [2, 3] предложена модификация метода Кольского, которая позволяет проводить динамические испытания грунтов и других несвязных малоплотных материалов в упругой обойме, строить диаграммы деформирования и определять коэффициент бокового давления K_σ . В этих работах изучался вопрос о выполнимости основных предпосылок этого метода. Данная статья посвящена численному анализу применимости метода для испытаний грунтов при высоких скоростях деформации. Анализ динамического деформирования грунта осуществляется на базе модели С. С. Григорьяна пластической сжимаемой среды [4]. Оценивается обоснованность основных предпосылок метода Кольского для получения достоверных характеристик объемного и сдвигового деформирования грунтов: однородность напряженно-деформированного состояния в образце, влияние сил трения и деформативности обоймы на волновые процессы в системе.

Работа выполнена в рамках программы поддержки ведущих научных школ России (код проекта 96-15-98156) и программы Министерства образования Российской Федерации по фундаментальным исследованиям в области горных наук при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 97-01-00605; 99-01-00132).

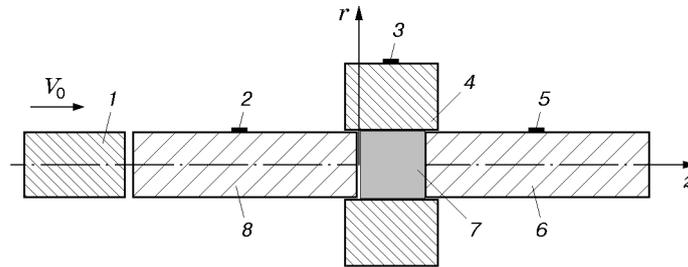


Рис. 1

Постановка задачи. Математическое моделирование процессов высокоскоростного деформирования мягких грунтов в ограничивающей обойме проводится в осесимметричной постановке (рис. 1), что соответствует условиям проведения эксперимента [3]. Образец грунта 7 размещается в стальной обойме 4 между торцами нагружающего 8 и опорного 6 мерных стержней. Стальной ударник 1, разогнанный в стволе газовой пушки, наносит удар со скоростью V_0 по первому стержню 8, возбуждая в нем плоскую одномерную упругую волну сжатия. Эта волна, достигнув образца, деформирует его. При этом часть волны отражается в стержень 8 волной растяжения, а часть проходит через образец в опорный стержень 6 в виде волны сжатия. Тензодатчик 2, расположенный в середине нагружающего стержня на его боковой поверхности, фиксирует импульс продольной деформации при прохождении падающей и отраженной от образца волн, а тензодатчик 5, расположенный в середине опорного стержня, фиксирует прошедший через образец импульс деформации. Форма импульса, отраженного от образца, характеризует процесс изменения скорости деформации, его интегрирование определяет развитие деформации образца во времени. Форма импульса, прошедшего через образец, характеризует изменение продольной компоненты напряжения. Тензодатчик 3, расположенный на внешней поверхности обоймы, регистрирует окружную деформацию, необходимую для определения бокового давления грунта и сопротивления сдвигу.

Для описания ударно-волнового процесса деформирования системы (рис. 1) используется вариационно-разностная методика [5], основанная на соотношениях динамики упруго-пластических сред. Исходная система уравнений записывается в цилиндрической системе координат rOz , где ось симметрии Oz совпадает с осями вращения стержней, а ось Or ($r \geq 0$) проходит перпендикулярно к ней вдоль границы контакта первого стержня с грунтом. Вариационное уравнение движения формулируется в переменных Лагранжа исходя из принципа возможных перемещений в форме Журдена

$$\iint_{\Omega} (\sigma_{rr} \delta \dot{e}_{rr} + \sigma_{\theta\theta} \delta \dot{e}_{\theta\theta} + \sigma_{zz} \delta \dot{e}_{zz} + 2\sigma_{rz} \delta \dot{e}_{rz}) r d\Omega - \\ - \int_G (p_r \delta \dot{u}_r + p_z \delta \dot{u}_z + q_r \delta \dot{u}_r + q_z \delta \dot{u}_z) r ds + \iint_{\Omega} \rho (\ddot{u}_r \delta \dot{u}_r + \ddot{u}_z \delta \dot{u}_z) r d\Omega = 0.$$

Здесь σ_{ij} — компоненты тензора напряжений ($i, j = r, z, \theta$); p_α, q_α ($\alpha = r, z$) — компоненты поверхностной нагрузки и контактного давления; ρ — плотность; точки обозначают дифференцирование по времени. Связь тензора скоростей деформаций со скоростями перемещений строится в метрике текущего состояния, что позволяет при пошаговой перестройке геометрии (координат r, z) описывать большие перемещения:

$$\dot{e}_{rr} = \dot{u}_{r,r}, \quad \dot{e}_{zz} = \dot{u}_{z,z}, \quad \dot{e}_{\theta\theta} = \dot{u}_r/r, \quad \dot{e}_{rz} = 0,5(\dot{u}_{z,r} + \dot{u}_{r,z}), \quad (1)$$

где индекс после запятой обозначает дифференцирование по соответствующей переменной. Значения компонент тензора деформаций определяются интегрированием по времени

соответствующих компонент тензора скоростей деформаций в (1). Связь компонент тензоров напряжений и деформаций в упругих стержнях и обойме представляет собой закон Гука.

При описании динамического деформирования пластически сжимаемого грунта тензор деформации представляется в виде суперпозиции шарового тензора и девиатора. Шаровой тензор напряжений (давление) связан с объемной деформацией (плотностью) нелинейным законом вида

$$p = \begin{cases} f_1(\rho), & dp/dt > 0, \\ f_2(\rho, \rho^*), & dp/dt \leq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Первое уравнение в (2) описывает кривую сжатия (ударную адиабату) на участке активного нагружения, второе уравнение определяет кривые разгрузки от достигнутой максимальной плотности ρ^* . Соответствующее максимальное давление, которое достигается при сжатии рассматриваемой частицы в процессе нагружения, определяется из уравнения ударной адиабаты $p^* = f_1(\rho^*)$. Если после нагружения до p^* давление в частице уменьшается (процесс разгрузки), то связь между давлением и плотностью описывается вторым уравнением в (2). Если давление вновь увеличивается (догрузка), не превышая при этом p^* , то зависимость между давлением и плотностью также описывается вторым уравнением (2). Таким образом, для данной частицы параметры p^* и ρ^* могут лишь возрастать, причем только при необратимой объемной деформации; при упругих же изменениях объема они не меняются.

Сдвиговые деформации в грунте описываются соотношениями теории пластического течения [6]. Составляющие тензора-девиатора скоростей деформации представляются в виде $\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p$, где $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$, $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ — упругие и пластические деформации соответственно. Девиаторные составляющие тензора упругой деформации связаны с составляющими девиатора напряжений законом Гука $s_{ij} = 2G\varepsilon_{ij}^e$, где G — модуль сдвига. Пластические деформации определяются ассоциированным законом пластического течения $\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda s_{ij}$ и условием текучести Мизеса

$$J_2 = s_{ij}s^{ij}/2 = \sigma_T^2(p)/3, \quad (3)$$

где σ_T — предел текучести, в общем случае зависящий от давления p ; λ — скалярный множитель, пропорциональный скорости приращения работы пластических деформаций или равный нулю при упругом деформировании [6].

На поверхностях контакта стержней и обоймы с грунтом ставятся условия непротекания по нормали и скольжения с кулоновским трением в касательном направлении. На свободных поверхностях стержней и обоймы напряжения отсутствуют. На ударяемом торце стержня 8 (рис. 1) задается зависимость $\sigma_{zz}(t)$, полученная в эксперименте. В начальный момент времени ($t = 0$) система находится в покое, напряжения и деформации равны нулю.

Метод решения и результаты расчетов. Для решения сформулированной выше нелинейной волновой задачи применяется явная вариационно-разностная схема типа “крест” второго порядка точности [5], реализованная в рамках пакета прикладных программ “Динамика-2” [7]. Скорости перемещений и координаты узлов дискретной модели определяются по рекуррентным соотношениям

$$\dot{u}_\alpha^{k+1/2} = \dot{u}_\alpha^{k-1/2} + (F_\alpha + Q_\alpha) \frac{\Delta t^{k+1/2}}{F_m}, \quad \alpha^{k+1} = \alpha^k + \dot{u}_\alpha^{k+1/2} \Delta t^{k+1}, \quad \alpha = r, z,$$

где F_α , F_m — обобщенные узловые силы и масса; Q_α — контактные усилия; Δt^{k+1} — временной шаг, выбираемый близким к числу Куранта, равному единице, относительно минимального размера ячейки [7].

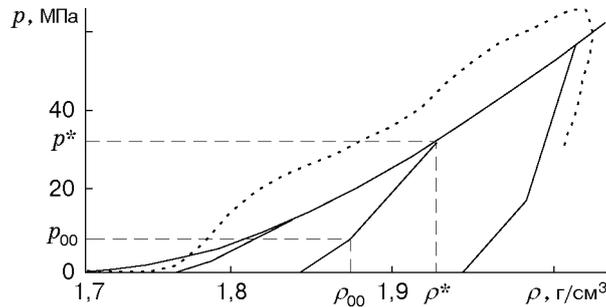


Рис. 2

Элементы экспериментальной установки имели следующие размеры: длина ударника 150 мм, диаметр 20 мм; длина мерных стержней 1000 мм, диаметр 20 мм; внешний диаметр обоймы 42 мм, внутренний 20 мм, длина 15 мм; длина цилиндрического образца грунта 9 мм, диаметр 20 мм. Расчеты проводились при следующих значениях механических параметров материалов стержней: модуль Юнга $E = 185$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, плотность $\rho = 7,87$ г/см³; для обоймы соответственно $E = 200$ ГПа, $\nu = 0,3$, $\rho = 7,8$ г/см³. Скорость соударения $V_0 = 25$ м/с. Начальная плотность грунта (песок влажности 11 %) $\rho_0 = 1,71$ г/см³. Уравнение ударной адиабаты в (2) задавалось в виде [8]

$$f_1(\rho) = M\varepsilon^n,$$

где $\varepsilon = 1 - \rho_0/\rho$ — объемная деформация; ρ — текущая плотность; $M = 2,1$ ГПа; $n = 1,9$. Эта зависимость (сплошная линия на рис. 2) аппроксимирует экспериментальную зависимость $p = \sigma_{zz}(\rho)$ (точки на рис. 2). Функция $f_2(\rho, \rho^*)$ в (2) принимается в виде двухзвенной ломаной [9]:

$$p = \begin{cases} p^* + C_1^2(\rho - \rho^*), & p > p_{00}, \\ p^* + C_2^2(\rho - \rho^*), & p < p_{00}. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь C_1 и C_2 — скорости звука, определяющие наклоны к оси ρ первого и второго звеньев ломаной (4) соответственно; $p_{00} = p^*/\gamma_p$ характеризует отношение длин участков ломаных; (ρ_{00}, p_{00}) — точка излома кривой разгрузки в координатах (ρ, p) . Скорости звука C_1 и C_2 как функции от ρ^* определяются следующим образом:

$$C_1 = C_0 + \frac{\rho^* - \rho_0}{\rho_g - \rho_0} (C_g - C_0), \quad C_2 = C_1 \left(1 + \frac{1 - \gamma_c}{\gamma_c} \frac{\rho^* - \rho_0}{\rho_g - \rho_0} \right). \quad (5)$$

Параметр γ_c задает отношение C_1 к C_2 при $\rho^* = \rho_g$, где ρ_g — значение плотности, при достижении которого материал приобретает свойства, подобные жидкости. В точке (ρ_g, p_g) наклон первого звена ломаной (4) совпадает с наклоном касательной к ударной адиабате в (2). Таким образом, задается линейное изменение C_1 от C_0 до C_g и C_2 от C_0 до C_1/γ_c при изменении плотности ρ^* от ρ_0 до ρ_g . Здесь C_0 — скорость звука в грунте в отсутствие возмущений (или при $\rho = \rho_0$). В расчетах полагалось $\gamma_p = 3$, $\gamma_c = 3$, $C_0 = 30$ м/с, $\rho_g = 2,5$ г/см³. Зависимость $\sigma_T(p)$ в условии текучести (3) является неубывающей функцией давления и определяется на основе экспериментальных данных следующим образом:

$$\sigma_T(p) = Y_0 + \frac{\mu p}{1 + \mu p / (Y_* - Y_0)}, \quad (6)$$

где Y_0 , μ и Y_* — сцепление, коэффициент внутреннего трения и максимальное значение предела пластичности, равные соответственно 0,1; 0,8 и 5,0 МПа. Модуль сдвига $G = 5$ МПа, коэффициент трения грунта о поверхность обоймы равен 0,3 [10].

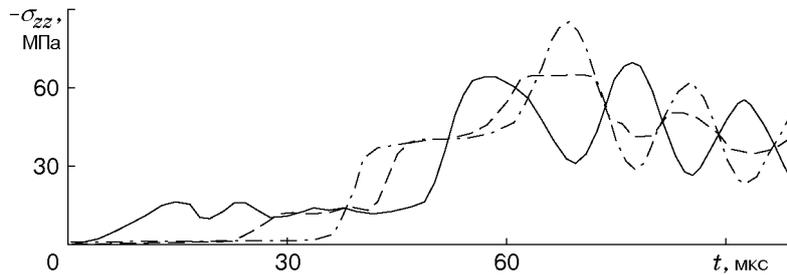


Рис. 3

Мерные стержни покрываются сеткой с 5 ячейками по радиусу и 500 ячейками по длине. Образец грунта разбивается на 10 ячеек по линии контакта со стержнями и 9 ячеек по линии контакта с обоймой. Сетка обоймы составляет 20×15 ячеек.

Опишем кратко волновые процессы, происходящие в системе ударник — стержень 8 — образец грунта — обойма — стержень 6 (см. рис. 1). С момента удара в мерном стержне формируется почти одномерный импульс сжатия длительностью около 70 мкс, который, распространяясь по нагружающему стержню практически без изменений до линии контакта с образцом грунта, частично проходит в грунт, а частично отражается, образуя отраженный импульс растяжения, фиксируемый датчиком 2. Из-за малой акустической жесткости образца грунта по сравнению с акустической жесткостью мерного стержня отражение импульса сжатия происходит практически как от свободной поверхности, т. е. импульс инвертируется. Импульс, прошедший в грунт, распространяется до взаимодействия с торцом второго мерного стержня. Происходит отражение импульса от торца и увеличение его амплитуды не менее чем в два раза, что определяется нелинейностью диаграммы в данном диапазоне напряжений.

Импульс сжатия распространяется в стержень 6 (см. рис. 1), образуя первый локальный максимум, фиксируемый в эксперименте датчиком 5, и в образец грунта до отражения от торца первого стержня, где продолжает действовать ударный импульс сжатия. Вторично отраженный импульс увеличенной амплитуды проходит через линию контакта грунт — стержень 6, образуя второй максимум. Длительность импульса сжатия, распространяющегося вдоль первого стержня, подобрана таким образом, чтобы после второго отражения импульса в образце грунта и приближения его к торцу второго стержня его догоняла распространяющаяся с большей скоростью волна разгрузки, частично уменьшающая максимум напряжения в стержне 6. Напряжения в обойме возникают под действием компоненты σ_{rr} тензора напряжений в грунте и касательного напряжения σ_{rz} и фиксируются датчиком 3.

В отсутствие трения напряженно-деформированное состояние образца грунта в поперечном сечении достаточно однородно. Представленные на рис. 3 кривые $\sigma_{zz}(t)$ в образце грунта в точках $z = 0$ (сплошная кривая), $z = 4,5$ мм (штриховая), $z = 9$ мм (штрихпунктирная) при $r = 0$ практически совпали с аналогичными кривыми при $r = 5$ мм и $r = 10$ мм. Учет трения нарушает однородность лишь в узкой зоне, примыкающей к границе контакта грунта с обоймой. В результате прохождения импульсов через слой грунта и неоднократных отражений от торцов стержней имеет место неоднородность распределения параметров. В этом случае можно говорить лишь о среднем давлении, меняющемся со временем.

На рис. 4 приведены экспериментальные (сплошные кривые) и расчетные (штриховые) зависимости $\sigma_{zz}(t)$ в отраженном импульсе, регистрируемом датчиком 2 (рис. 4,а), прошедшем импульсе, фиксируемом датчиком 5 (рис. 4,б) и окружной деформации обоймы $\varepsilon_{\theta\theta}(t)$, регистрируемой датчиком 3 (рис. 4,в). Время на графиках отсчитывается

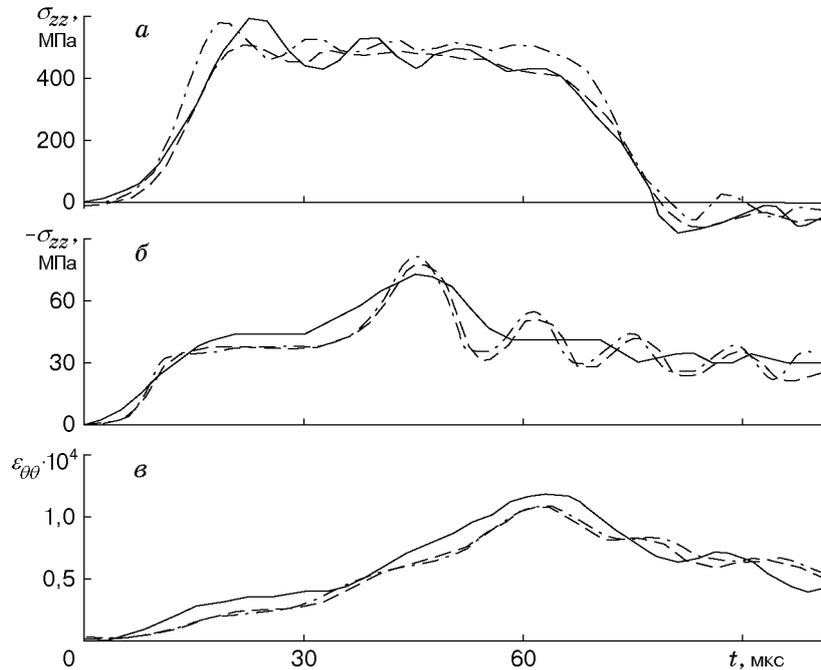


Рис. 4

с момента прихода возмущения на датчики. Для сравнения с отраженным импульсом на рис. 4, *a* штрихпунктирной кривой показан падающий импульс (инвертированный и смещенный во времени). В целом наблюдается удовлетворительное соответствие численных и экспериментальных кривых. Для оценки влияния сил трения проводились расчеты и с коэффициентом трения, равным нулю, что соответствует идеальному проскальзыванию грунта относительно обоймы и торцов стержней. Полученные результаты (штрихпунктирные линии на рис. 4, *б, в*) свидетельствуют о незначительном влиянии сил трения на отраженный и прошедший импульсы и окружную деформацию в обойме, хотя градиент окружной деформации по длине обоймы увеличивается. Также незначительное влияние на волновые процессы в грунте оказывает податливость обоймы, что следует из сравнения с решением задачи в предположении абсолютно жесткой обоймы.

Для определения динамических прочностных характеристик грунтов необходимо по окружной деформации $\varepsilon_{\theta\theta}(t)$, регистрируемой в обойме, определить боковую нагрузку со стороны грунта, характеризующую компонентой напряжения $\sigma_{rr}(t)$. Наиболее простое представление заключается в использовании известного аналитического решения о напряженно-деформированном состоянии отрезка толстостенной трубы под действием постоянного внутреннего давления. Окружное и радиальное напряжения в трубе с внутренним диаметром a и внешним диаметром b под действием внутреннего давления q выражаются формулами [11]

$$\sigma_{\theta\theta} = A - B/r^2, \quad \sigma_{rr} = A + B/r^2,$$

где $A = qa^2/(a^2 - b^2)$; $B = -qa^2b^2/(a^2 - b^2)$. Таким образом, на внешней поверхности отрезка трубы

$$\sigma_{rr} = \sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{\theta\theta} = 2q \frac{a^2}{b^2 - a^2}. \quad (7)$$

Окружная деформация на поверхности трубы определяется из закона Гука с учетом (7):

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E} \sigma_{\theta\theta} = \frac{2q}{E} \frac{a^2}{b^2 - a^2}. \quad (8)$$

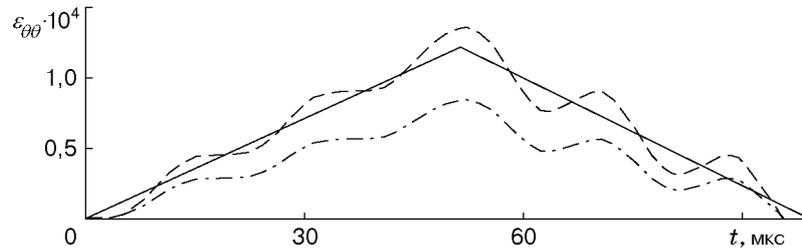


Рис. 5

Используя соотношение (8) и значение окружной деформации на поверхности обоймы из эксперимента [3], можно вычислить действующее внутреннее давление q :

$$q = \frac{E}{2} \frac{b^2 - a^2}{a^2} \varepsilon_{\theta\theta}. \quad (9)$$

В эксперименте роль внутреннего давления q играет напряжение σ_{rr} в грунте, следовательно, можно получить значение коэффициента бокового давления $K_\sigma = \sigma_{rr}/\sigma_{zz}$. В диапазоне напряжений $0 \div 50$ МПа среднее значение K_σ составило 0,5, коэффициент Пуассона $\nu = K_\sigma/(1 + K_\sigma) = 1/3$, среднее значение модуля объемного сжатия $K = \rho_0 c^2(p) = \rho_0 df_1(p)/dp = 160$ МПа. Модуль сдвига G можно определить по формуле теории упругости $G = 3K(1 - 2\nu)/(2(1 + \nu)) = 3K/8 = 60$ МПа. В эксперименте нагрузка приложена не ко всей поверхности обоймы, так как участки длиной по 3 мм с каждой стороны оставлены для центровки обоймы относительно мерных стержней и с грунтом не контактируют. С целью проверки справедливости формул (8), (9) проведены модельные расчеты по определению напряженно-деформированного состояния обоймы длиной $L = 15$ мм с внутренним радиусом 10 мм и внешним радиусом 21 мм под действием внутренней нагрузки q в виде треугольного импульса длиной 100 мкс с максимальной амплитудой 35 МПа, имитирующего реальное воздействие. В расчетах варьировался размер области приложения нагрузки l , который в первом случае совпадал с длиной обоймы L , во втором — с длиной образца, равной 9 мм. Результаты тестового расчета представлены на рис. 5. Сплошной кривой показано точное решение по формуле (7), штриховой и штрихпунктирной — расчет с использованием программного комплекса “Динамика-2” [7] при $l = 15; 9$ мм соответственно. Видно, что различие максимальных значений существенно, их разность пропорциональна L/l . Таким образом, для корректного использования соотношений (7), (9), устанавливающих связь между окружной деформацией на поверхности обоймы и давлением грунта σ_{rr} , необходимо учитывать различие в длинах обоймы и образца грунта.

Проводился также численный анализ распространения импульса сжатия в системе разрезных стержней Гопкинсона в постановке, соответствующей эксперименту (см. рис. 1), где длина обоймы была больше размера образца грунта в 1,7 раза. Если при определении K_σ это не учитывать, то значение коэффициента бокового давления в диапазоне напряжений $0 \div 50$ МПа составит приблизительно 0,5. Для того чтобы удовлетворить этому условию, значения начального Y_0 и максимального Y_* пределов текучести в (6) выбирались достаточно большими (40 и 60 МПа соответственно), $G = 60$ МПа. В расчетах коэффициент K_σ менялся от 0,45 до 0,55, при этом значение окружной деформации в обойме было меньше полученного в эксперименте в 1,5–2 раза. Если в формуле (6) положить $Y_0 = 0,1$ МПа, $Y_* = 5$ МПа, $G = 5$ МПа, то получим $K_\sigma \approx 1$. Результаты расчетов, проведенных с K_σ , близким к единице, изображены на рис. 3, 4 и хорошо согласуются с данными эксперимента.

Таким образом, для определения значения бокового давления в образце грунта по значению окружной деформации с внешней поверхности обоймы возможно использование

формулы (9). При этом боковое давление следует вычислять с учетом различия в размерах обоймы и образца грунта. Для удовлетворения условию однородности напряженно-деформированного состояния в образце грунта и обойме необходимо, чтобы длина обоймы превышала размер цилиндрического образца грунта не более чем вдвое ($1 \leq L/l \leq 2$). Если продольная деформация в грунте больше 10%, необходимо учитывать изменение нагруженной части обоймы за счет сближения торцов мерных стержней.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кольский Г.** Исследование механических свойств материалов при больших скоростях нагружения // Механика. 1950. Вып. 4. С. 108–119.
2. **Bragov A. M., Grushevsky G. M.** Compressibility of soft soils under shock load within the pressure range up to 3 GPa // Abstr. of the Europ. mech. colloquium Euromech 295 "Wave processes in machinery and structures", Nizhny Novgorod, Russia, Sept. 14–18, 1992. N. Novgorod, 1992. P. 40.
3. **Брагов А. М., Гандурин В. П., Грушевский Г. М., Ломунов А. К.** Новые возможности метода Кольского для исследования динамических свойств мягких грунтов // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 3. С. 179–186.
4. **Григорян С. С.** Об основных представлениях динамики грунтов // Прикл. математика и механика. 1960. Вып. 4. С. 1057–1072.
5. **Баженов В. Г., Зефирова С. В., Кибец А. И.** О численной реализации вариационно-разностной моментной схемы решения нелинейных задач динамики нетонких оболочек при импульсных воздействиях // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения: Всесоюз. межвуз. сб. Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1988. С. 66–73.
6. **Качанов Л. М.** Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. С. 49–53.
7. **Баженов В. Г., Батанин М. А., Зефирова С. В. и др.** Пакет прикладных программ для решения нестационарных задач аэрогидроупругопластичности. Комплексы программ математической физики // Материалы VII Всесоюз. семинара по комплексам программ мат. физики, Горький, 8–11 сент. 1981 г. Новосибирск: Ин-т теорет. и прикл. механики СО АН СССР, 1982. С. 216–220.
8. **Рыков Г. В.** Экспериментальное исследование поля напряжений при взрыве в песчаном грунте // ПМТФ. 1964. № 1. С. 85–89.
9. **Вовк А. А., Замышляев Б. В., Евтерев Л. С. и др.** Поведение грунтов под действием импульсных нагрузок. Киев: Наук. думка, 1984.
10. **Гердюков Н. Н., Иоилев А. Г., Новиков С. А.** Определение динамического коэффициента трения песчаного грунта о жесткую стенку // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 4. С. 185–187.
11. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. С. 280–282.

Поступила в редакцию 18/V 1999 г.