

УДК 532.517.013.4 : 537.2

## НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СТРУИ ЖИДКОСТИ В ПЕРЕМЕННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ ВЫСОКОЙ ЧАСТОТЫ

Е. А. Демехин, С. В. Полянских

Кубанский государственный университет, 350040 Краснодар

E-mail: mathf@rambler.ru

В предположении, что жидкость является идеальной, рассмотрена устойчивость жидкой струи-электролита, помещенной в тангенциальное электрическое поле, гармонически осциллирующее с высокой частотой. Показано, что в случае малости числа Пекле, вычисленного по толщине дебаевского слоя, возможно раздельное решение электродинамической и гидродинамической частей задачи внутри струи. Исследована линейная устойчивость тривиального решения задачи. Получено дисперсионное соотношение, с помощью которого изучено влияние амплитуды и частоты колебаний электрического поля на устойчивость струи. Показано, что увеличение амплитуды колебаний оказывает стабилизирующее действие, в то время как увеличение частоты незначительно дестабилизирует струю.

**Ключевые слова:** электрогидродинамика, электролит, линейная устойчивость, идеальная жидкость, микроструя.

**Введение.** Как известно, капиллярные струи являются неустойчивыми и распадаются на капли [1, 2]. Обзор и подробный вывод различных моделей поведения струи, имеющих в настоящее время, даны в работе [3].

Задача о поведении капиллярной струи во внешнем электрическом поле является классической задачей электрогидродинамики и имеет широкое практическое применение, в частности в качестве одного из способов распыления жидкости (принтеры, карбюраторы автомобилей, распыление топлива в форсунках и т. д.). Исследование струй и капель жидкости, находящихся под действием электрического поля, начато в работе [4], считающейся эталонной. В настоящее время построено большое количество моделей, описывающих различные особенности изучаемых процессов. Случай внешнего постоянного электрического поля и заряда на поверхности струи исследован во многих работах (см., например, [5–9]), в которых показано, что наличие заряда на свободной поверхности приводит к дестабилизации струи по отношению к длинноволновым возмущениям, а наличие внешнего тангенциального поля, наоборот, стабилизирует струю.

Поведение струи существенно зависит от того, чем является рабочая жидкость струи — диэлектриком, проводником или электролитом. В настоящее время наименее изучены электролиты, несмотря на то что они исследовались в экспериментах [4] и часто применяются на практике в целях электрораспыления.

В ряде экспериментальных работ, в частности в [10], предложено вместо постоянного поля использовать переменное электрическое поле. Преимуществами такого внешнего силового поля являются наличие нового контрольного параметра — частоты колебаний;

электронейтральность образующихся при распылении капель жидкости; отсутствие при достаточно больших частотах колебания (более 100 кГц) нежелательных химических реакций, сопровождающих процесс, вследствие того что период колебаний значительно меньше характерного времени реакции. Целью настоящей работы является создание теории, описывающей явления такого типа.

В данной работе теоретически исследуется устойчивость струи идеальной капиллярной жидкости в тангенциальном электрическом поле, колеблющемся с частотой порядка  $\tilde{\kappa}/\tilde{\varepsilon}$  ( $\tilde{\kappa}$  — электрическая проводимость;  $\tilde{\varepsilon}$  — диэлектрическая проницаемость жидкости). Возбужденное таким полем движение в системе включает медленно меняющуюся среднюю и быструю колебательную, или вибрационную, компоненты [12]. Результирующее движение представляет собой их суперпозицию, причем при  $\tilde{\omega} \rightarrow \infty$  вклад вибрационной составляющей стремится к нулю [12].

В результате линеаризации системы вблизи тривиального решения получаем задачу на собственные значения, зависящую от отношения диэлектрических проницаемостей сред, амплитуды и частоты колебаний внешнего поля, волнового числа и коэффициента линейного роста возмущений, а также от основных безразмерных параметров. При этом исследуется зависимость области устойчивости от указанных параметров. Показано, что увеличение амплитуды колебаний внешнего поля приводит к стабилизации струи за счет сужения диапазона неустойчивых длин волн, а также к уменьшению наиболее неустойчивого коэффициента линейного роста. В частности, наличие осциллирующего внешнего поля всегда стабилизирует струю. Увеличение частоты колебаний, наоборот, приводит к незначительной дестабилизации струи.

**1.** Рассмотрим струю идеальной жидкости-электролита, помещенную во внешнее тангенциальное электрическое поле. Процессы, происходящие внутри жидкой фазы, описываются двумя уравнениями переноса отрицательных и положительных ионов, уравнением Пуассона для потенциала электрического поля и гидродинамическими уравнениями Эйлера и неразрывности. Жидкость представляет собой простой бинарный электролит:  $z^+ = -z^- = 1$ . Коэффициенты диффузии отрицательных и положительных ионов полагаются равными:  $\tilde{D}^+ = \tilde{D}^- = \tilde{D}$ . Исследуем наиболее важный случай осесимметричных возмущений струи. Ось  $\tilde{x}$  направлена вдоль невозмущенной оси струи, ось  $\tilde{y}$  — по радиусу струи. В выбранной системе координат полная система уравнений имеет вид

$$\frac{\partial \tilde{c}^\pm}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{c}^\pm}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{c}^\pm}{\partial \tilde{y}} = \tilde{D} \left\{ \pm \frac{\tilde{F}}{\tilde{R}\tilde{T}} \left[ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left( \tilde{c}^\pm \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{x}} \right) + \frac{1}{\tilde{y}} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left( \tilde{y} \tilde{c}^\pm \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{y}} \right) \right] + \frac{\partial^2 \tilde{c}^\pm}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{1}{\tilde{y}} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left( \tilde{y} \frac{\partial \tilde{c}^\pm}{\partial \tilde{y}} \right) \right\}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\tilde{F}}{\tilde{\rho}} (\tilde{c}^- - \tilde{c}^+) \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{x}}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\tilde{F}}{\tilde{\rho}} (\tilde{c}^- - \tilde{c}^+) \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{y}}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{\tilde{y}} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} (\tilde{y} \tilde{v}) = 0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{1}{\tilde{y}} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left( \tilde{y} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{y}} \right) = \frac{\tilde{F}}{\tilde{\varepsilon}} (\tilde{c}^- - \tilde{c}^+). \quad (5)$$

Здесь знаком “ $\sim$ ” отмечены размерные величины;  $\tilde{c}^+$ ,  $\tilde{c}^-$  — молярные концентрации катионов и анионов соответственно;  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$  — осевая и радиальная компоненты скорости;  $\tilde{F}$  —

число Фарадея;  $\tilde{R}$  — универсальная газовая постоянная;  $\tilde{T}$  — температура;  $\tilde{\Phi}$  — потенциал электрического поля;  $\tilde{p}$  — давление;  $\tilde{\rho}$  — плотность жидкой среды. Вдали от границы раздела фаз раствор считается электронейтральным:

$$\tilde{c}^{\pm} = \tilde{c}_{\infty}. \quad (6)$$

Окружающий струю газ полагается диэлектриком. Потенциал электрического поля в газовой фазе удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x^2} + \frac{1}{\tilde{y}} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left( \tilde{y} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{y}} \right) = 0 \quad (7)$$

(здесь и далее чертой отмечены величины, соответствующие внешней задаче для газа).

Для описания процесса вблизи свободной границы жидкой фазы целесообразно использовать координату  $\tilde{n}$  вдоль единичной внешней нормали  $\mathbf{n}$  к поверхности раздела и координату  $\tilde{\tau}$  вдоль единичной касательной  $\boldsymbol{\tau}$ , лежащей в плоскости  $(\tilde{x}, \tilde{y})$ .

Газ полагается непроводящим, поэтому поток отрицательных и положительных ионов через свободную поверхность равен нулю:

$$\tilde{n} = 0: \quad \pm \frac{\tilde{c}^{\pm} \tilde{F}}{\tilde{R} \tilde{T}} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{n}} + \frac{\partial \tilde{c}^{\pm}}{\partial \tilde{n}} = 0. \quad (8)$$

При переходе через границу раздела фаз потенциал является непрерывным:

$$\tilde{n} = 0: \quad \tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}. \quad (9)$$

Вследствие разности диэлектрических проницаемостей сред производная потенциала по нормали терпит разрыв:

$$\tilde{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{n}} = \varepsilon \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{n}}. \quad (10)$$

Кинематическое условие и условие баланса нормальных напряжений соответственно имеют вид

$$\tilde{v} = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}}; \quad (11)$$

$$\tilde{p} - \tilde{p}_0 + [\mathbf{n} \tilde{T}^E \mathbf{n}] = \tilde{\gamma} \tilde{K}, \quad (12)$$

где квадратные скобки обозначают скачок величины при переходе через границу раздела;  $\tilde{\gamma}$  — поверхностное натяжение;  $\tilde{y} = \tilde{h}(\tilde{t}, \tilde{x})$  — уравнение поверхности раздела;  $\tilde{K}$  — средняя кривизна поверхности раздела;  $\tilde{p}_0$  — давление в газе, которое без ограничения общности можно положить равным нулю;  $\tilde{T}^E$  — тензор Максвелла — Вагнера электрических напряжений, компоненты которого в любой ортогональной системе координат имеют вид

$$\tilde{T}_{ij}^E = \tilde{\varepsilon} (-(\tilde{E}^2/2) \delta_{ij} + \tilde{E}_i \tilde{E}_j).$$

В частности, в координатах  $\tilde{n}$ ,  $\tilde{\tau}$  нормальное электрическое напряжение (электрическое давление) записывается следующим образом:

$$\mathbf{n} \tilde{T}^E \mathbf{n} = \tilde{T}_{nn}^E = (\tilde{\varepsilon}/2)(\tilde{E}_n^2 - \tilde{E}_{\tau}^2).$$

Замыкает задачу краевое условие на бесконечности. При этом колебания внешнего поля полагаются гармоническими:

$$\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}_{\infty} = -\tilde{x} \tilde{E}_{\infty} e^{i\tilde{\omega} \tilde{t}} + \text{к. с.}, \quad (13)$$

где к. с. — комплексно-сопряженная величина.

Отнеся длины, концентрации, электрический потенциал, скорости, время и давление соответственно к величинам

$$\tilde{r}_0, \quad \tilde{c}_\infty, \quad \tilde{\Phi}_c = \left( \frac{\tilde{\gamma}\tilde{r}_0}{\tilde{\varepsilon}} \right)^{1/2}, \quad \tilde{U}_0 = \left( \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\rho}\tilde{r}_0} \right)^{1/2}, \quad \tilde{t}_0 = \frac{\tilde{r}_0}{\tilde{U}_0} = \left( \frac{\tilde{\rho}\tilde{r}_0^3}{\tilde{\gamma}} \right)^{1/2}, \quad \tilde{p}_0 = \tilde{\rho}\tilde{U}_0^2 = \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{r}_0}$$

( $\tilde{r}_0$  — радиус невозмущенной струи), приведем систему (1)–(13) к безразмерному виду

$$\text{Pe}_c \left( \frac{\partial c^\pm}{\partial t} + u \frac{\partial c^\pm}{\partial x} + v \frac{\partial c^\pm}{\partial y} \right) = \pm \Lambda \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( c^\pm \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left( y c^\pm \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial^2 c^\pm}{\partial x^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left( y \frac{\partial c^\pm}{\partial y} \right); \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + (c^- - c^+) \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + (c^- - c^+) \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} (yv) = 0;$$

$$\varepsilon_c^2 \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left( y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right] = c^- - c^+; \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial x^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left( y \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} \right) = 0; \quad (17)$$

при  $n = 0$

$$\pm \Lambda c^\pm \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \frac{\partial c^\pm}{\partial n} = 0; \quad (18)$$

$$\Phi = \bar{\Phi}; \quad (19)$$

$$\delta \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n}; \quad (20)$$

$$v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x}; \quad (21)$$

$$p - K + [\mathbf{n}T^E\mathbf{n}] = 0; \quad (22)$$

при  $n = \infty$

$$\bar{\Phi} = -xE_\infty e^{i\omega t} + \text{к. с.}.. \quad (23)$$

Здесь параметры системы

$$\begin{aligned} \text{Pe}_c &= \frac{\tilde{U}_0\tilde{r}_0}{\tilde{D}} = \frac{\tilde{\Phi}_c}{\tilde{D}} \left( \frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{\rho}} \right)^{1/2} = \frac{1}{\tilde{D}} \left( \frac{\tilde{\gamma}\tilde{r}_0}{\tilde{\rho}} \right)^{1/2}, \quad \varepsilon_c^2 = \frac{\tilde{\lambda}_{Dc}^2}{\tilde{r}_0^2} = \frac{1}{\tilde{F}\tilde{c}_\infty} \left( \frac{\tilde{\varepsilon}\tilde{\gamma}}{\tilde{r}_0^3} \right)^{1/2}, \\ \Lambda &= \frac{\tilde{F}}{\tilde{R}\tilde{T}} \left( \frac{\tilde{\gamma}\tilde{r}_0}{\tilde{\varepsilon}} \right)^{1/2}, \quad \delta = \frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (24)$$

являются безразмерными. Вдали от границы раздела фаз  $c^\pm = 1$ . Следует отметить, что для потенциала  $\tilde{\Phi}$  существует два характерных масштаба: использованный выше электрокапиллярный потенциал  $\tilde{\Phi}_c$  и электрохимический потенциал  $\tilde{\Phi}_e = \tilde{R}\tilde{T}/\tilde{F}$  (поэтому

$\Lambda = \tilde{\Phi}_c / \tilde{\Phi}_e$ ). Если потенциал  $\tilde{\Phi}$  отнести не к  $\tilde{\Phi}_c$ , а к  $\tilde{\Phi}_e$ , то вместо безразмерных параметров (24) получим

$$\text{Pe}_e = \frac{\tilde{U}_0 \tilde{r}_0}{\tilde{D}} = \frac{\tilde{\Phi}_e}{\tilde{D}} \left( \frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{\rho}} \right)^{1/2} = \frac{\tilde{R}\tilde{T}}{\tilde{D}\tilde{F}} \left( \frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{\rho}} \right)^{1/2}, \quad \varepsilon_e^2 = \frac{\tilde{\lambda}_{De}^2}{\tilde{r}_0^2} = \frac{\tilde{\varepsilon}\tilde{R}\tilde{T}}{\tilde{F}^2 \tilde{c}_\infty \tilde{r}_0^2}.$$

Задача решается в предположении  $\varepsilon_c = \tilde{\lambda}_{Dc} / \tilde{r}_0 \ll 1$ ,  $\varepsilon_e = \tilde{\lambda}_{De} / \tilde{r}_0 \ll 1$ . В этом случае, как следует из (16), возникает малый параметр при старшей производной, порождающий пограничный слой в окрестности свободной поверхности жидкости. Таким образом, в пределе  $\varepsilon_c \rightarrow 0$  или  $\varepsilon_e \rightarrow 0$  задача распадается на внешнюю (вдали от поверхности раздела) и внутреннюю (вблизи границы раздела фаз).

2. Следуя работе [11], рассмотрим решение системы (14)–(23) в тонком дебаевском слое толщиной порядка  $O(\varepsilon_e)$ . В этой зоне наиболее приемлемым масштабом для потенциала является электрохимический потенциал  $\tilde{\Phi}_e$ . Используя приближение Дебая

$$c^\pm = 1 + \hat{c}^\pm e^{i\omega t} + \text{к. с.}, \quad \hat{c}^\pm \ll 1, \quad \Phi = \hat{\Phi}^\pm e^{i\omega t} + \text{к. с.},$$

линеаризуем уравнения (14), (16), (18). В результате во внутренних координатах  $\xi = \tau$ ,  $\eta = n/\varepsilon_e$  получаем

$$\begin{aligned} i\Lambda \text{Pe}_e \varepsilon_e^2 \omega \hat{c}^\pm + \Lambda \text{Pe}_e \varepsilon_e \left( \varepsilon_e u \frac{\partial \hat{c}^\pm}{\partial \xi} + v \frac{\partial \hat{c}^\pm}{\partial \eta} \right) &= \pm \left( \varepsilon_e^2 \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial \eta^2} \right) + \varepsilon_e^2 \frac{\partial^2 \hat{c}^\pm}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \hat{c}^\pm}{\partial \eta^2}, \\ \varepsilon_e^2 \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial \eta^2} &= \hat{c}^- - \hat{c}^+, \\ \eta = 0: \quad \pm \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{c}^\pm}{\partial \eta} &= 0, \quad \eta \rightarrow -\infty: \quad \hat{c}^\pm = 0. \end{aligned}$$

Полагая  $\Lambda \text{Pe}_e \varepsilon_e \rightarrow 0$ , конвективными членами можно пренебречь. Предположение  $\Omega \equiv \Lambda \text{Pe}_e \varepsilon_e^2 \omega = O(1)$  фактически задает диапазон частот. Таким образом, в узком дебаевском слое общая задача разделяется на две, и электродинамическая задача может быть решена раньше. Вводя объемную плотность распределения зарядов  $\rho = c^+ - c^-$ ,  $\rho = \hat{\rho} e^{i\omega t} + \text{к. с.}$  и выполняя предельный переход  $\varepsilon_e \rightarrow 0$ , получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \hat{\rho}}{d\eta^2} - (2 + i\Omega) \hat{\rho} &= 0, \quad \frac{d^2 \hat{\Phi}}{d\eta^2} = -\hat{\rho}, \\ \eta = 0: \quad 2 \frac{d\hat{\Phi}}{d\eta} + \frac{d\hat{\rho}}{d\eta} &= 0, \quad \eta = -\infty: \quad \hat{\rho} = 0, \end{aligned}$$

из которой находим связь между комплексными амплитудами плотности поверхностного заряда  $\hat{\sigma}$  и напряженности электрического поля:

$$\hat{\sigma} = -\frac{2}{2 + i\Omega} \frac{d\hat{\Phi}}{d\eta} \Big|_{\eta=0}. \quad (25)$$

Выражение для плотности поверхностного заряда (25) запишем в размерном виде

$$\tilde{\sigma} = -\frac{\tilde{\varkappa}}{\tilde{\varkappa}/\tilde{\varepsilon} + i\tilde{\omega}} \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \tilde{n}} \Big|_{\tilde{n}=0} e^{i\tilde{\omega} \tilde{t}} + \text{к. с.}, \quad (26)$$

где  $\tilde{\varkappa} = 2\tilde{F}^2 \tilde{D} \tilde{c}_\infty / (\tilde{R}\tilde{T})$  — электрическая проводимость. В сделанных предположениях величина  $\tilde{\varkappa}/\tilde{\varepsilon}$  имеет значение порядка значения частоты  $10^3 \div 10^7$  кГц [13]. При больших значениях  $\tilde{\omega}$  соотношение (26) принимает вид

$$\tilde{\sigma} = -\frac{i\tilde{\varkappa}}{\tilde{\omega}} \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \tilde{n}} \Big|_{\tilde{n}=0} e^{i\tilde{\omega} \tilde{t}} + \text{к. с.} \quad (27)$$

3. В полной постановке (1)–(13) в уравнения Эйлера в силу нелинейности входит электрическая сила с ненулевым средним, несмотря на то что средние электрического потенциала и концентраций равны нулю. Таким образом, движение жидкости можно разделить на среднее и колебательное движения. Согласно классической теории осреднения [12] поле скоростей с точностью до малых высшего порядка по частоте можно представить в виде

$$\bar{U}(t, x) = \bar{U}_0(t, x) + \bar{U}_1(t, x) e^{2i\omega t} + \text{к. с.},$$

где  $U_1/U_0 \sim 1/\omega$  при  $\omega \rightarrow \infty$ . Следовательно, при  $\omega \rightarrow \infty$  членом  $\bar{U}_1$  можно пренебречь. (Далее для удобства индекс нуль опускается.)

Устремляя в уравнениях (14)–(23)  $\varepsilon_c$  к нулю, получаем внешнюю задачу. Поскольку из уравнения Пуассона (16) следует, что во внешней области при глубине жидкости, большей дебаевской длины, имеет место электронейтральность ( $c^\pm \equiv 1$ ), внешняя задача распадается на электродинамическую и гидродинамическую, связанные краевыми условиями на границе раздела. Внешний предельный переход  $\varepsilon_e \rightarrow 0$  в уравнении (16) равносильно предположению о том, что весь заряд располагается на поверхности раздела и, следовательно, создает дополнительное нормальное напряжение. С учетом выражения для плотности поверхностного заряда (27), полученного при решении внутренней задачи, условие (20) необходимо заменить выражением

$$\delta \left(1 - \frac{i}{\omega}\right) \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial n} = \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial n}, \quad (28)$$

где  $\omega = \tilde{\omega}\tilde{\varepsilon}/\tilde{\varkappa}$  — безразмерная частота колебаний.

Баланс нормальных напряжений выразим в терминах комплексных амплитуд. Осредняя условие (22) по быстрому времени  $\omega t$ , с использованием (28) получаем

$$\langle [nT^E n] \rangle = [\langle nT^E n \rangle] = \left(1 - \frac{1}{\delta}\right) \left|\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \tau}\right|^2 + \left(\frac{\delta}{\omega^2} + \delta - 1\right) \left|\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial n}\right|^2,$$

где под осреднением понимается стандартная операция

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt.$$

Условие (22) запишем в окончательном виде

$$p - K + \left(1 - \frac{1}{\delta}\right) \left|\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \tau}\right|^2 + \left(\frac{\delta}{\omega^2} + \delta - 1\right) \left|\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial n}\right|^2 = 0.$$

В полной постановке внешняя задача имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{y} v &= 0; \end{aligned} \quad (29)$$

$$y < h: \quad \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial y} = 0, \quad y > h: \quad \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial y} = 0; \quad (30)$$

$$y = h: \quad \hat{\Phi} = \hat{\Phi}, \quad \delta \left(1 - \frac{i}{\omega}\right) \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial n} = \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial n}, \quad v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (31)$$

$$p + K + \left(1 - \frac{1}{\delta}\right) \left|\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \tau}\right|^2 + \left(\frac{\delta}{\omega^2} + \delta - 1\right) \left|\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial n}\right|^2 = 0;$$

$$y = \infty: \quad \hat{\Phi} = -xE_\infty, \quad (32)$$

где параметр

$$K = \frac{1}{h(1+h_x^2)^{1/2}} - \frac{h_{xx}}{(1+h_x^2)^{3/2}}$$

представляет собой безразмерную среднюю кривизну свободной поверхности.

4. Задача (29)–(32) имеет тривиальное решение

$$h = 1, \quad u = v = 0, \quad p = 0, \quad \hat{\Phi} = \hat{\bar{\Phi}} = -E_\infty x.$$

На компоненты скорости и свободную границу налагаются малые возмущения:

$$u \sim \hat{u}(y) e^{i\alpha x + \lambda t}, \quad v \sim \hat{v}(y) e^{i\alpha x + \lambda t}, \quad p \sim \hat{p}(y) e^{i\alpha x + \lambda t}; \quad (33)$$

$$h \sim 1 + \hat{h} e^{i\alpha x + \lambda t}. \quad (34)$$

В силу (30)–(32) возмущения потенциала имеют параметрический по времени характер и порождаются возмущением свободной границы (34). В частности, на границе раздела с точностью до членов высшего порядка малости имеем

$$\Phi|_{y=h} = \Phi|_{y=1} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}|_{y=1} \hat{h} e^{i\alpha x + \lambda t} + \dots$$

Таким образом, для возмущений потенциала следует положить

$$\hat{\Phi} \sim -E_\infty x + \varphi(y) \hat{h} e^{i\alpha x + \lambda t}, \quad \hat{\bar{\Phi}} \sim -E_\infty x + \bar{\varphi}(y) \hat{h} e^{i\alpha x + \lambda t}. \quad (35)$$

Рассмотрим электростатическую часть задачи. Подставляя выражения (35) в уравнения (30), получаем уравнения Бесселя для величин  $\varphi$  и  $\bar{\varphi}$ . Требуя выполнения условия регулярности потенциала при  $y = 0$ ,  $y = \infty$ , находим

$$\varphi(y) = C_1 I_0(\alpha y), \quad \bar{\varphi}(y) = C_2 K_0(\alpha y), \quad (36)$$

где  $I_0$ ,  $K_0$  — функции Бесселя нулевого порядка. Для определения неизвестных постоянных  $C_1$ ,  $C_2$  линеаризуем первые два условия (31):

$$y = 1: \quad \varphi = \bar{\varphi}, \quad \delta(1 - i/\omega)(i\alpha E_\infty + \varphi') = i\alpha E_\infty + \bar{\varphi}',$$

откуда следует

$$C_1 = -\frac{iE_\infty}{I_0} \Pi(\alpha, \omega), \quad C_2 = -\frac{iE_\infty}{K_0} \Pi(\alpha, \omega), \quad \Pi(\alpha, \omega) = -\frac{\alpha\delta(1 - i/\omega - 1/\delta)}{\delta(1 - i/\omega)I_0'/I_0 - K_0'/K_0}, \quad (37)$$

где функции  $I_0$ ,  $K_0$  взяты при  $\xi = \alpha$ . Из формул (35)–(37) получаем решение электростатической части задачи линейной устойчивости.

Для дальнейших исследований используем выражение для возмущения тангенциальной составляющей электрического поля на границе раздела фаз:

$$\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \tau} = \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial x} n_y - \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial y} n_x \sim E_x = -\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial x} \sim E_\infty - i\alpha C_1 I_0(\alpha) \hat{h} e^{i\alpha x + \lambda t}. \quad (38)$$

Подставляя (33), (38) в уравнения (29), (31) и отбрасывая члены более высокого порядка малости, получаем задачу линейной устойчивости

$$\lambda \hat{u} = -i\alpha \hat{p}, \quad \lambda \hat{v} = -\hat{p}', \quad i\alpha \hat{u} + \hat{v}' + \hat{v}/y = 0; \quad (39)$$

$$y = 1: \quad \hat{v} = \lambda \hat{h}, \quad \hat{p} + (1 - \alpha^2) \hat{h} + 2E_\infty(1 - 1/\delta) \Pi_R(\alpha, \omega) \hat{h} = 0, \quad (40)$$

где  $\Pi_R(\alpha, \omega) = (\Pi(\alpha, \omega) + \Pi^*(\alpha, \omega))/2$ . Уравнения (39) преобразуем в уравнение Бесселя

$$\hat{u}'' + \hat{u}'/y - \alpha^2 \hat{u} = 0. \tag{41}$$

Решение (41), удовлетворяющее первому условию в (40), имеет вид

$$\hat{u} = i\lambda \frac{I_0(\alpha y)}{I_0'(\alpha)} \hat{h}, \quad \hat{v} = \lambda \frac{I_0'(\alpha y)}{I_0'(\alpha)} \hat{h}, \quad \hat{p} = -\frac{\lambda^2}{\alpha} \frac{I_0(\alpha y)}{I_0'(\alpha)} \hat{h}. \tag{42}$$

Подстановка найденных значений давления (42) во второе краевое условие (40) дает дисперсионное соотношение

$$\lambda^2 = \alpha(1 - \alpha^2)I_0'/I_0 + 2\alpha E_\infty^2(1 - 1/\delta)(I_0'/I_0)\Pi_R(\alpha, \omega). \tag{43}$$

В случае отсутствия электрического поля ( $E_\infty = 0$ ) получаем классический результат Рэлея

$$\lambda^2 = \alpha(1 - \alpha^2)I_0'/I_0.$$

Поскольку параметр  $\Pi_R$  всегда отрицателен, при  $E_\infty \neq 0$  второе слагаемое в дисперсионном соотношении дает дополнительную стабилизацию за счет сужения области неустойчивых волновых чисел. Таким образом, наличие внешнего осциллирующего поля всегда стабилизирует струю. При увеличении значения  $\omega$  величина  $\Pi_R(\alpha, \omega)$  возрастает равномерно по  $\alpha$ , сужая область устойчивости, которая, однако, всегда является более широкой, чем при  $E_\infty = 0$ .

На рис. 1, 2 приведены показатели линейного роста при различных значениях параметров. На рис. 3 показана зависимость коэффициента линейного роста наиболее неустойчивого волнового числа от напряженности внешнего поля. Видно, что при увеличении напряженности поля коэффициент стремится к нулю.

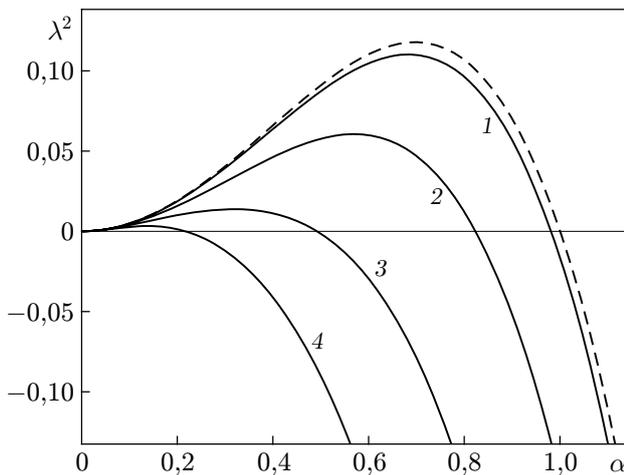


Рис. 1

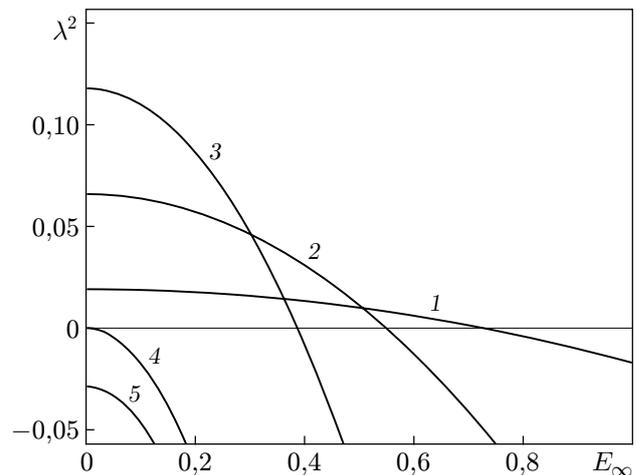


Рис. 2

Рис. 1. Зависимость показателя линейного роста от волнового числа возмущения при  $\omega = \infty$  и различных значениях  $E_\infty$ :

1 —  $E_\infty = 0,1$ , 2 —  $E_\infty = 0,3$ , 3 —  $E_\infty = 0,5$ , 4 —  $E_\infty = 0,7$ ; штриховая линия —  $E_\infty = 0$

Рис. 2. Зависимость показателя линейного роста от напряженности внешнего электрического поля при  $\omega = \infty$  и различных значениях  $\alpha$ :

1 —  $\alpha = 0,20$ , 2 —  $\alpha = 0,40$ , 3 —  $\alpha = 0,70$ , 4 —  $\alpha = 1,00$ , 5 —  $\alpha = 1,03$

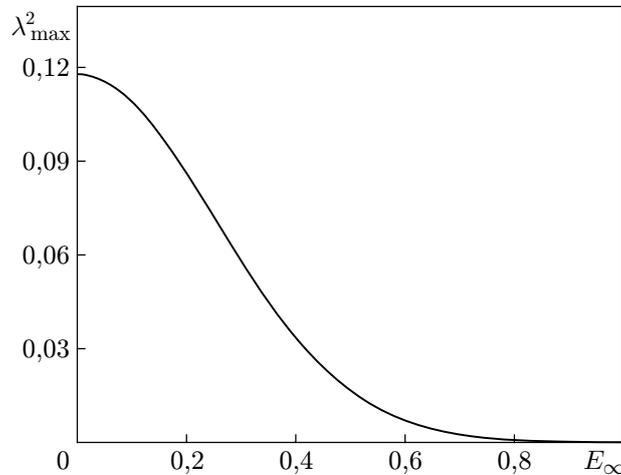


Рис. 3. Зависимость коэффициента линейного роста, соответствующего наиболее неустойчивому волновому числу возмущения, от напряженности внешнего электрического поля

5. Внутренним параметром задачи является волновое число возмущения  $\alpha$ , внешними — отношение диэлектрических проницаемостей  $\delta$  и безразмерные частота колебаний  $\omega$  и напряженность  $E_\infty$  электрического поля. Все расчеты проводятся для значения  $\delta = 24$ , соответствующего спирту, использованному в экспериментах [10].

Выражения для кривых нейтральной устойчивости, отделяющих на плоскости параметров устойчивые области от неустойчивых, получаются в результате подстановки  $\lambda = 0$  в дисперсионное соотношение (43). Таким образом, кривые нейтральной устойчивости описываются соотношением

$$E_\infty^2 = \frac{\alpha^2 - 1}{2(1 - 1/\delta)} \frac{K'_0/K_0 - \delta(1 - i/\omega)I'_0/I_0}{\alpha\delta(1 - i/\omega - 1/\delta)}. \quad (44)$$

Расчеты по формуле (44) показывают, что наличие тангенциального осциллирующего поля стабилизирует струю. При каждом фиксированном значении волнового числа  $\alpha$  и любой частоте колебаний  $\omega$  струя становится устойчивой, когда напряженность поля  $E_\infty$  превышает значение, определяемое согласно соотношению (44). Увеличение частоты колебаний поля, наоборот, приводит к некоторому сужению области устойчивости и как следствие к дестабилизации струи в результате расширения области неустойчивых волновых чисел. Результаты соответствующих расчетов при различных значениях параметров приведены на рис. 4, 5. Видно, что в области частот порядка  $\omega \gg 1$  увеличение частоты лишь незначительно дестабилизирует струю. Кривые нейтральной устойчивости на плоскости параметров  $(\omega, \alpha)$  при различных значениях  $E_\infty$  приведены на рис. 6.

**Заключение.** Интерес к исследованию струй жидкости, помещенных во внешнее электрическое поле, обусловлен их использованием в технологических процессах микро- и нанораспыления и при производстве ультратонкого волокна, а также изучением новых типов электрогидродинамических неустойчивостей, которым подвергаются струи [14, 15]. В частности, большое значение имеет случай нестационарного внешнего электрического поля.

В данной работе построена двумерная модель, которая описывает потерю устойчивости струей жидкости-электролита, помещенной во внешнее осциллирующее электрическое поле, определяемое двумя контрольными параметрами — амплитудой и частотой колеба-

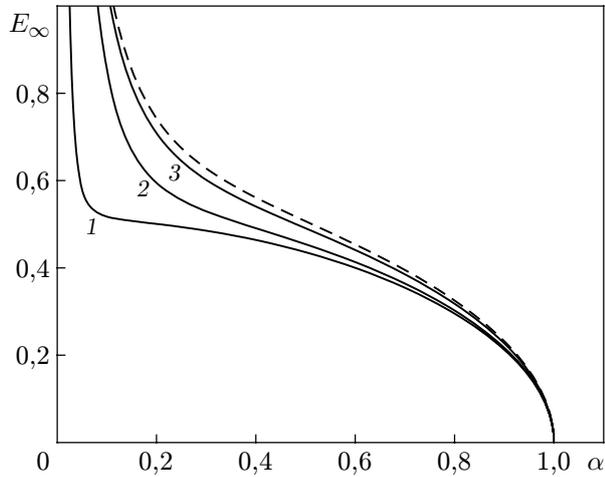


Рис. 4

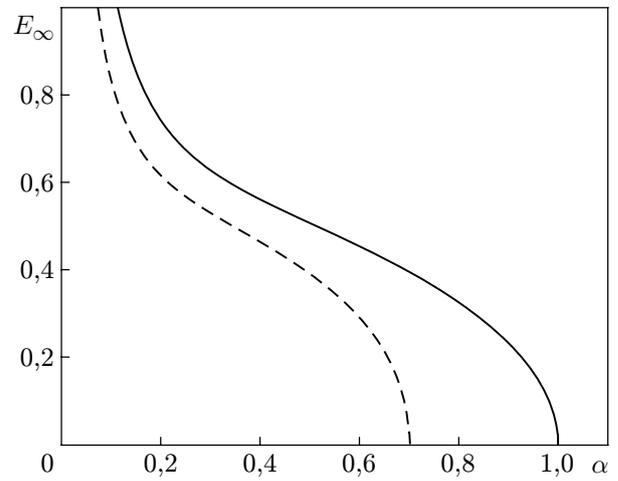


Рис. 5

Рис. 4. Зависимость напряженности внешнего электрического поля от волнового числа возмущения при различных значениях  $\omega$ :

1 —  $\omega = 0,1$ , 2 —  $\omega = 1,0$ , 3 —  $\omega = 3,0$ ; штриховая линия —  $\omega = \infty$

Рис. 5. Зависимость напряженности внешнего электрического поля от волнового числа возмущения при  $\omega = \infty$ :

штриховая линия — линия максимального роста

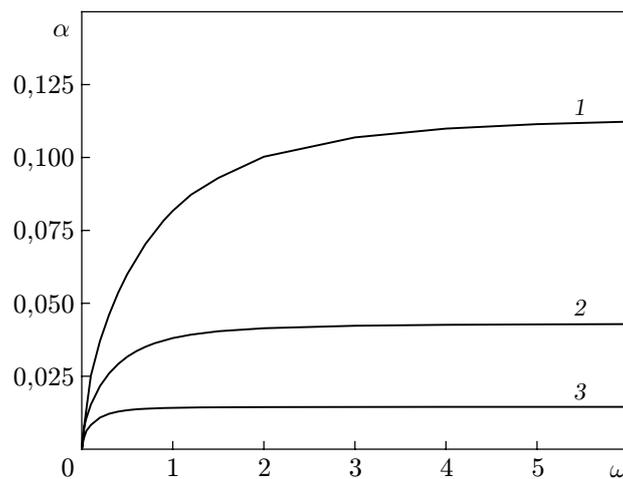


Рис. 6. Кривые нейтральной устойчивости при различных значениях напряженности внешнего электрического поля:

1 —  $E_\infty = 1$ , 2 —  $E_\infty = 2$ , 3 —  $E_\infty = 5$

ний. Показано, что в линейном приближении увеличение амплитуды колебаний приводит к стабилизации струи, тогда как увеличение частоты приводит к ее незначительной дестабилизации.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Герценштейн С. Я., Шкадов В. Я. Устойчивость неосесимметрических жидких струй // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1973. № 1. С. 43–47.
2. Шкадов В. Я., Маркова М. Р. Нелинейное развитие капиллярных волн в жидкой струе // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1972. № 3. С. 30–34.
3. Garcia F. J., Castellanos A. One-dimensional models for slender axisymmetrical viscous liquid jets // Phys. Fluids. 1994. V. 6. P. 2676–2689.
4. Zeleny J. The electrical discharge from liquid points, and a hydrostatic method of measuring the electric intensity at their surfaces // The Phys. Rev. 1914. V. 3, N 2. P. 69–91.
5. Стретт В. Дж. (Лорд Рэлей). Теория звука. М.: Гостехтеоретиздат, 1955. Т. 1, 2.
6. Шкадов В. Я., Шутов А. А. Устойчивость поверхностно-заряженных вязких струй в электрическом поле // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1996. Т. 33, № 2. С. 29–40.
7. Hohman M. M., Shin M., Rutledge G., Brenner M. P. Electrospinning and electrically forced jets. 1. Stability theory // Phys. Fluids. 2001. V. 13, N 8. P. 2201–2220.
8. Saville D. A. Electrohydrodynamic stability: fluid cylinder in longitudinal electric fields // Phys. Fluids. 1970. V. 13, N 12. P. 2987–2994.
9. Saville D. A. Stability of electrically charged viscous cilinder // Phys. Fluids. 1971. V. 14, N 5. P. 1095–1099.
10. Yeo L. Y., Lastochkin D., Wang S.-C., et. al. A new ac electro spray mechanism by Maxwell — Wagner polarization and capillary resonance // Phys. Rev. Lett. 2004. N 92. P. 133902.
11. Юдович В. И. Вибродинамика и виброгеометрия механических систем со связями. Ч. 2 // Успехи механики. 2006. Т. 4, № 3. С. 75–129.
12. Демехин Е. А., Шапарь Е. М., Лапченко В. В. О существовании конусов Тейлора в переменном электрическом поле высокой частоты // Докл. АН. 2006. Т. 406, № 4. С. 472.
13. Gonzales A., Ramos A., Green N. G., et al. Fluid flow induced by nonuniform AC electric fields in electrolytes on microelectrodes. 2. A linear double-layer analysis // Phys. Rev. E. 2003. V. 61, N 4. P. 4019.
14. Chang H. C., Demekhin E. A., Kalaidin E. N. Iterated stretching of viscoelastic jets // Phys. Fluids. 1999. V. 11, N 7. P. 717–737.
15. Chang H. C. Complex wave dynamics on thin films / H. C. Chang, E. A. Demekhin. Amsterdam: Elsevier, 2002. (Studies in interface science; V. 14).

*Поступила в редакцию 19/IX 2008 г.*