



**РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В УПРУГО-ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОМ СЛОЕ С ПОЛОСТЬЮ,
ЛЕЖАЩЕМ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ**

Ж. К. Масанов¹, Ж. Т. Кожабеков¹, Г. К. Тугельбаева^{1,2}

¹*Институт механики и машиноведения им. У. А. Джолдасбекова, E-mail: zein04@yandex.ru,
ул. Курмангазы 29, г. Алматы 050010, Республика Казахстан*

²*Военный институт Сухопутных войск МО РК, E-mail: Gk0430@mail.ru,
ул. Красногорская 35, г. Алматы 050053, Республика Казахстан*

Исследовано распространение волн в упруго-вязкопластическом слое с полостью, лежащем на упругом основании при воздействии динамической нагрузки со стороны дневной поверхности с помощью метода “распада разрыва” С. К. Годунова. Используемая методика решения может способствовать дальнейшему развитию подобного класса задач в других разделах механики.

Слой, упруго-вязкопластичность, полость, динамическая нагрузка, волна, напряженно-деформируемое состояние

**WAVE PROPAGATION IN ELASTIC VISCOPLASTIC LAYER
WITH A CAVITY ON AN ELASTIC BASE**

Zh. K. Masanov¹, Zh. T. Kozhabekov¹, and G. K. Tugel'baeva^{1,2}

¹*Dzoldasbekov Mechanics and Engineering Institute,*

E-mail: zein04@yandex.ru, ul. Kurmangazy 29, Almaty 050010, Republic of Kazakhstan

²*Military Institute of Land Forces of the Ministry of Defense of the Republic of Kazakhstan,
E-mail: Gk0430@mail.ru, ul. Krasnogorskaya 35, Almaty 050053, Republic of Kazakhstan*

This paper is devoted to the study of wave propagation in elastic viscoplastic layer with a cavity, located on an elastic base under the dynamic pressure of day surface. This problem is solved by “discontinuity disintegration” method of S. K. Godunov. Using the S. K. Godunov’s method for research and solution of wave propagation in a layered semi-sphere with cavities located on an elastic base under the dynamic pressure will further develop the solution to the same types of problems in other mechanics subdisciplines.

Layer, elastic viscoplasticity, cavity, dynamic pressure, wave, stress-strain state

Рассмотрим частный случай, когда источником возникновения волн (рис. 1) является динамическая нагрузка, которая действует на слой со стороны дневной поверхности, со следующими параметрами: $n_1 = 198$, $n_2 = 202$, $m_1 = 10$; $m_2 = 16$; $n_{11} = 250$, $n_{22} = 254$, $\Delta t = dt = 0.0024888$; $\Delta x = \Delta y = h = 0.005$.

Начальные и граничные условия указаны ниже:

$$u = v = \sigma_x = \sigma_y = \tau = 0; \quad \begin{cases} -\infty \leq x \leq \infty \\ 0 \leq y \end{cases} \quad \text{при } t = 0; \quad \begin{cases} v = tBe^{-At} \\ u = 0; \end{cases} \quad \text{при } \begin{cases} n_{11} \leq x \leq n_{22}; \\ y = 0; \quad t \geq 0, \end{cases}$$

где $A, B = \text{const}$, $A = 133.93335$, $B = 0.1193379$; v, u — соответственно составляющие скорости частиц среды по оси x и y ; $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau$ — соответственно составляющие напряжения.

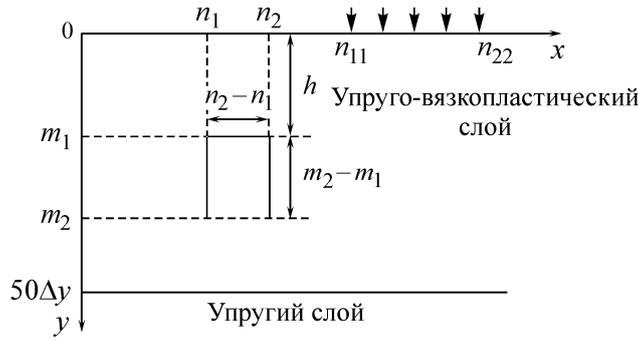


Рис. 1. Полость в упруго-вязкопластическом слое, лежащем на упругом основании

Система уравнений упруго-вязкопластической среды [1, 2] в безразмерном виде относительно к параметрам упругости имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{12} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y}; \\ r_{12} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x}, \\ \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} = a_{12} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \left(1 - \frac{2}{\gamma_1^2}\right) \frac{\partial v}{\partial y} + \Phi_1 \right\}, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial t} = a_{12} \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} + \left(1 - \frac{2}{\gamma_1^2}\right) \frac{\partial u}{\partial x} + \Phi_2 \right\}, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial t} = a_{12} \left\{ \left(1 - \frac{2}{\gamma_1^2}\right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(1 - \frac{2}{\gamma_1^2}\right) \frac{\partial v}{\partial y} + \Phi_3 \right\}, \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} = a_{12} \left\{ \frac{1}{\gamma_1^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\gamma_1^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \Phi_4 \right\}. \end{array} \right. \quad (1)$$

где

$$\Phi_1 = -\frac{1}{\gamma_1^2} \eta \langle \Phi(F) \rangle \left[(3\gamma_1^2 - 4)\alpha + \frac{1}{3} \frac{(2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z)}{\sqrt{J_2}} \right],$$

$$\Phi_2 = -\frac{1}{\gamma_1^2} \eta \langle \Phi(F) \rangle \left[(3\gamma_1^2 - 4)\alpha + \frac{1}{3} \frac{(2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z)}{\sqrt{J_2}} \right],$$

$$\Phi_3 = -\frac{1}{\gamma_1^2} \eta \langle \Phi(F) \rangle \left[(3\gamma_1^2 - 4)\alpha + \frac{1}{3} \frac{(2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y)}{\sqrt{J_2}} \right], \quad \Phi_4 = -\frac{1}{\gamma_1^2} \eta \langle \Phi(F) \rangle \frac{\tau}{\sqrt{J_2}}.$$

Конечно-разностная система уравнений [3, 4] для системы дифференциальных уравнений (1) имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l}
r_{12} \frac{u^{n,m} - u_{n,m}}{\Delta t} = \frac{(\sigma_x)_{n_2} - (\sigma_x)_{n_1}}{\Delta x} + \frac{\tau_{m_2} - \tau_{m_1}}{\Delta y}, \\
r_{12} \frac{v^{n,m} - v_{n,m}}{\Delta t} = \frac{(\sigma_y)_{m_2} - (\sigma_y)_{m_1}}{\Delta y} + \frac{\tau_{n_2} - \tau_{n_1}}{\Delta x}, \\
\frac{(\sigma_x)^{n,m} - (\sigma_x)_{nm}}{\Delta t} = a_{12} \left\{ \frac{u_{n_2} - u_{n_1}}{\Delta x} + \left(1 - \frac{2}{\gamma_1^2}\right) \frac{v_{m_2} - v_{m_1}}{\Delta y} + \Phi_{1n,m} \right\}, \\
\frac{(\sigma_y)^{n,m} - (\sigma_y)_{nm}}{\Delta t} = a_{12} \left\{ \frac{v_{m_2} - v_{m_1}}{\Delta y} + \left(1 - \frac{2}{\gamma_1^2}\right) \frac{u_{n_2} - u_{n_1}}{\Delta x} + \Phi_{2n,m} \right\}, \\
\frac{(\sigma_z)^{n,m} - (\sigma_z)_{nm}}{\Delta t} = a_{12} \left\{ \left(1 - \frac{2}{\gamma_1^2}\right) \frac{u_{n_2} - u_{n_1}}{\Delta x} + \left(1 - \frac{2}{\gamma_1^2}\right) \frac{v_{m_2} - v_{m_1}}{\Delta y} + \Phi_{3n,m} \right\}, \\
\frac{\tau^{n,m} - \tau_{n,m}}{\Delta t} = a_{12} \left\{ \frac{1}{\gamma_1^2} \frac{u_{m_2} - u_{m_1}}{\Delta y} + \frac{1}{\gamma_1^2} \frac{v_{n_2} - v_{n_1}}{\Delta x} + \Phi_{4n,m} \right\}.
\end{array} \right. \quad (2)$$

Для упругого основания система дифференциальных уравнений в конечно-разностном виде имеет следующий вид [5, 6]:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{u^{n,m} - u_{n,m}}{\Delta t} = \frac{\sigma_{xn2} - \sigma_{xn1}}{\Delta x} - \frac{\tau_{m2} - \tau_{m1}}{\Delta y}, \\
\frac{v^{n,m} - v_{n,m}}{\Delta t} = \frac{\tau_{n2} - \tau_{n1}}{\Delta x} + \frac{\sigma_{ym2} - \sigma_{ym1}}{\Delta y}, \\
\frac{\sigma_x^{n,m} - \sigma_{x,n,m}}{\Delta t} = \frac{u_{n2} - u_{n1}}{\Delta x} + \left(1 - \frac{2}{\gamma^2}\right) \frac{v_{m2} - v_{m1}}{\Delta x}, \\
\frac{\sigma_y^{n,m} - \sigma_{y,n,m}}{\Delta t} = \left(1 - \frac{2}{\gamma^2}\right) \frac{u_{n2} - u_{n1}}{\Delta x} + \frac{v_{m2} - v_{m1}}{\Delta x}, \\
\frac{\tau^{n,m} - \tau_{n,m}}{\Delta t} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{u_{m2} - u_{m1}}{\Delta y} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{v_{n2} - v_{n1}}{\Delta x},
\end{array} \right. \quad (3)$$

В системах уравнений (2), (3) u_{m_1} , u_{m_2} , v_{m_1} , v_{m_2} , $(\sigma_x)_{m_1}$, $(\sigma_x)_{m_2}$, $(\sigma_y)_{m_1}$, $(\sigma_y)_{m_2}$, τ_{m_1} , τ_{m_2} вычисляются в точках n_1 , n_2 , m_1 , m_2 , которые находятся на границах двух ячеек.

В двух соседних ячейках состояние среды разное, поэтому происходит распад разрыва на границах, т. е. в результате взаимодействия двух соседних ячеек с различными состояниями, происходит “перетекания” массы, импульса и энергии через общую границу ячеек.

Для решения подобных задач удобно использовать метод С. К. Годунова, который позволяет сложные системы уравнений привести к более простым. Этот метод допускает наглядную физическую интерпретацию, соответствующую выбору разностной сетки с усредненными значениями физических величин.

В нашем случае предлагается систему уравнений (1) разделить на две системы уравнений, одна из которых зависит только от оси x , а другая — от y . Таким образом, мы получили две простые системы уравнений, зависящие только от одной переменной.

Результаты исследований напряженно-деформированного состояния, прочности и устойчивости показаны в графическом виде. Для получения численных значений нормальных и касательных напряжений использованы исходные данные для упруго-вязкопластической среды: $\gamma_1 = 1.6$, $a_1 = 320$ м/с, $b_1 = 200$ м/с, $\rho_1 = 1.8$ кг/м³, $\eta = 350$ 1/с, $\alpha = -0.02$, $K_0 = 0.62$ кГ/см²; для упругой среды: $\rho_2 = 2.67$ г/см², $a_2 = 5440$ м/с, $b_2 = 3050$ м/с, $\gamma_2 = a_2/b_2 = 1.7836$.

Изменения напряжений над полостью и под полостью по горизонтали иллюстрирует рис. 2. Видно, что напряжения над полостью превосходят в 10^6 раз напряжения под полостью. Это означает, что основная нагрузка приходится на верхний слой потолка полости, поэтому при строительстве необходимо уделить больше внимания верхним потолкам, укрепляя их более прочными конструкциями.

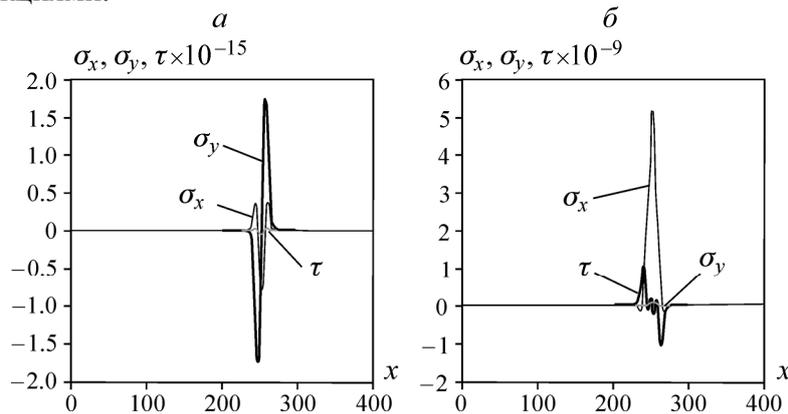


Рис. 2. Нормальные и касательные напряжения по оси x ($x = 1\Delta x - 400\Delta x$) в момент времени $t = 395\Delta t$: a — на глубине $y = 25\Delta y$ под полостью; b — на глубине $y = 25\Delta y$ над полостью

На рис. 3 представлены изменения напряжений по глубине вдоль левой и правой вертикальных стенок полости. Видно, что напряжения вдоль указанных стенок разного порядка, из чего следует, что динамическая нагрузка распределена на дневной поверхности ближе к правой боковой поверхности полости, чем к левой.

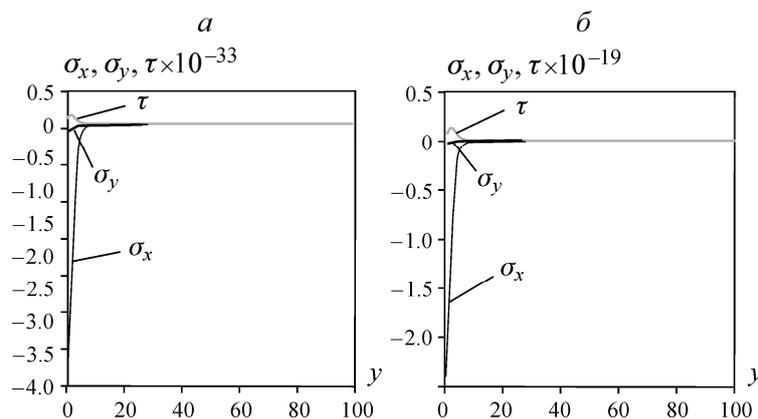


Рис. 3. Нормальные и касательные напряжения по оси y на глубине $y = 1\Delta y - 100\Delta y$ в момент времени $t = 395\Delta t$: a — $x = 190\Delta x$; b — $x = 210\Delta x$

Изменения напряжений вдоль границы двух сред упруго-вязкопластического слоя и упругого основания показаны на рис. 4а, напряжений в упругом основании в горизонтальном направлении — на рис. 4б. Можно заметить, что значения напряжений на границе двух сред на четыре порядка выше, чем напряжения в упругом основании. Это свидетельствует о том, что на границе двух сред накладываются друг на друга прямые и отраженные волны, тем самым усиливая напряжения.

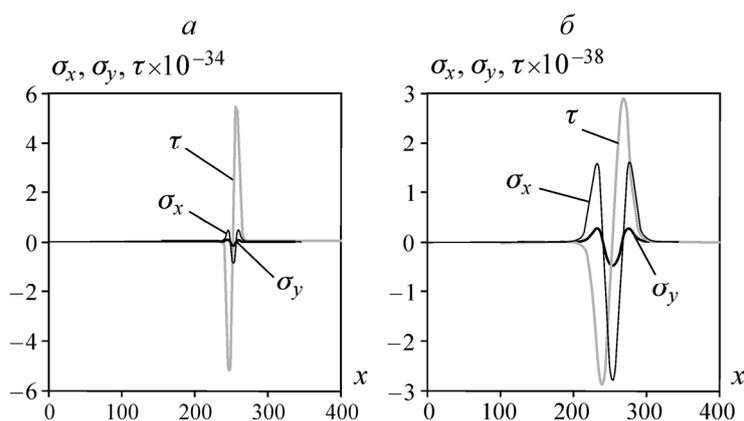


Рис. 4. Нормальные и касательные напряжения по оси x ($x = 1\Delta x - 400\Delta x$) в момент времени $t = 395\Delta t$: a — на глубине $y = 50\Delta y$ на границе двух сред; b — на глубине $y = 70\Delta y$ в упругой среде

ВЫВОДЫ

Методика и результаты проводимых исследований могут быть использованы для дальнейшего развития и усовершенствования существующих математических моделей, описывающих физико-механические состояния изучаемых объектов, а также для решения подобных задач из других разделов механики.

Результаты работы могут найти применение при строительстве крупных наземных и подземных сооружений, при изготовлении различных конструкционных материалов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. Godunov S. K., Zabrodin A. V., and Prokopov G. P. Differentiate scheme for binary nonstandard tasks of gas dynamics and calculation of by-pass with diverged blast wave, Moscow, VMiMF, 1961, no. 6, pp. 1020–1059. [Годунов С. К., Забродин А. В., Прокопов Г. П. Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной. — М.: ВМиМФ, 1961. — № 6. — С. 102044–1059.]
2. Cheban V. G., Nakhval I. K., Sabodash P. F., and Cherednichenko R. A. Numerical methods of dynamic resilient theory tasks solving, Kishinev, Shtiintsa, 1976, 288 pp. [Чебан В. Г., Нахвал И. К., Сабодаш П. Ф., Чередниченко Р. А. Численные методы решения задач динамической теории упругости. — Кишинев: Штиинца, 1976. — 288 с.]
3. Masanov Zh. K., Kozhabekov Zh. T., Tugelbaeva G. K., and Sarsenov B. Sh. Resilient and resilient viscous-plastic wave spreading in layered semi-sphere with cavity, Monography, Military Institute of Land Forces, Mechanics and engineering Institute named after academician U. A. Djoldasbekov, Almaty, 2017, 292 pp. [Масанов Ж. К., Кожабеков Ж. Т., Тугельбаева Г. К. Сарсенов Б. Ш. Распространение упругих и упруго-вязкопластических волн в слоистых полупространствах с полостью. Монография. Военный институт Сухопутных войск. Институт механики и машиноведения им. академика У. А. Джолдасбекова. — Алматы, 2017. — 292 с.]
4. Masanov Zh. K., Kozhabekov Zh. T., and Tugelbaeva G. K. Wave field in resilient viscous-plastic quarter-sphere with cavity under the dynamic pressure, International Scientific-practical conference “Mechanics and transport construction” dedicated to 80-th anniversary of Kazakhstan science and technical figure emeritus, academician of NSA RK Aitaliyeva Sh. M. 30-31 January, Almaty, 2015, pp. 234–237. [Масанов Ж. К., Кожабеков Ж. Т., Тугельбаева Г. К. Волновое поле в упруго-вязкопластическом в четверти пространства с полостью при действии динамической нагрузки // Механика и строительство транспортных сооружений: Междунар. науч.-практ. конф., посвященной 80-летию академика НАН РК Ш. М. Айталиева 30-31 января. — Алматы, 2015. — С. 234–237.]

5. **Masanov Zh. K., Kozhabekov Zh. T., and Tugelbaeva G. K.** Research of geodynamic wave field in quarter-sphere with cavity, *Fundamental and Applied Mining Science*, 2017, vol. 4, no. 2, pp. 118–122. [Масанов Ж. К., Кожабеков Ж. Т., Тугельбаева Г. К. Исследование волновых полей геодинамики в четверти пространства с полостью // *Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук.* — 2017. — Т. 4. — № 2. — С. 118–122.]
6. **Masanov Zh. K., Kozhabekov Zh. T., and Tugelbaeva G. K.** Wave spreading research in resilient massif quarter-sphere with cavity, *Topical problems of engineering mechanics, International scientific seminar dedicated to 95-th anniversary, academician of the SA of KazSSR, Zh. S. Erzhanov, Almaty, 2017, № 1-2*, pp. 26–30. [Масанов Ж. К., Кожабеков Ж. Т., Тугельбаева Г. К. Исследование распространения волн в упругом массиве четверти пространства с полостью // *Актуальные проблемы инженерной механики: Междунар. науч. семинар, посвященный 95-ю академика АН КазССР Ж. С. Ержанова.* — Алматы. — 2017. — № 1-2. — С. 26–30.]