

УДК 532.516.5/532.526

## ПОГРАНИЧНЫЕ СЛОИ ПРИ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ

В. В. Кузнецов, О. А. Фроловская

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Изучена задача о свободной конвекции и массообмене вблизи вертикальной стенки. Рассмотрены случаи, когда движение описывается классической моделью Обербека — Буссинеска и моделью микроконвекции. В обоих случаях при больших числах Шмидта выделены пограничные слои. На основе решений задач для этих слоев получены формулы для чисел Нуссельта (местного и общего). Рассмотрены начальные асимптотики.

**Введение.** Рассмотрена задача о свободной конвекции вязкой несжимаемой жидкости вблизи вертикальной стенки (подложки) и переносе примеси в случае, если плотность раствора зависит от концентрации примеси. Возникающее движение жидкости называют свободной или естественной конвекцией. Свободная конвекция изучена достаточно хорошо, в том числе методом выделения пограничных слоев (см., например, [1–5]). В данной работе рассматривается случай, когда кинематический коэффициент вязкости  $\nu$  и коэффициент диффузии  $D$  связаны соотношением  $D \ll \nu$ . При больших числах Шмидта  $Sc = \nu/D$  в области течения выделяется диффузионно-динамический слой толщиной порядка  $(Re^2 Sc)^{-1/4}$ , вне которого концентрация примеси мало отличается от средней, а характер течения зависит от числа Рейнольдса  $Re$  следующим образом. При  $Re \ll Sc^{1/2}$  движение соответствует приближению Стокса, при  $Re \sim Sc^{1/2}$  оно описывается стационарными уравнениями Навье — Стокса, при  $Re \gg Sc^{1/2}$  образуется также чисто динамический слой толщиной порядка  $(Sc/Re^2)^{1/4}$ , сопрягающийся на внутренней границе с диффузионно-динамическим слоем, а на внешней — с состоянием покоя.

На основе автомодельных решений выведены формулы для чисел Нуссельта  $Nu$  (местного и общего), аналогичные полученным в [3] в результате анализа автомодельных решений системы обычного диффузионно-динамического пограничного слоя [2, с. 299–304]. Эти формулы применимы также для движений с умеренными и малыми числами Рейнольдса. Предлагаемый подход позволяет выделить диффузионно-динамический пограничный слой и в случае микроконвекции, когда модель Обербека — Буссинеска не применима. Замечающая ее модель микроконвекции разработана в [6]. Аналогичный подход применялся в [7] при изучении концентрационной конвекции. В [8, 9] проводился сравнительный анализ структур рассчитанных по обоим моделям полей скорости и концентрации (температуры). Возможность выделять при микроконвекции диффузионно-динамический слой (обычный пограничный слой не выделяется) позволяет сравнивать для этих моделей интегральные характеристики течений, такие как числа Нуссельта. Для обеих моделей рассмотрены начальные асимптотики процесса, получены формулы для  $Nu$ .

Предлагаемый метод применим и при свободной конвекции вблизи вертикальной стенки, обусловленной неравномерным распределением температуры жидкости. При этом числу Шмидта соответствует число Прандтля, а концентрации — температура. Однако ситуация, когда коэффициент теплопроводности много меньше коэффициента вязкости, встречается редко. В то же время случай  $D \ll \nu$  типичен. Например, при росте тонких пленок из раствора-расплава полупроводниковых материалов  $\nu$  имеет величину порядка  $10^{-2} \div 10^{-3}$  см<sup>2</sup>/с, а  $D \sim 10^{-5}$  см<sup>2</sup>/с.

Рассмотрим задачу определения компонент  $u, v$  вектора скорости  $\mathbf{v}$ , концентрации  $c$  и отклонения от гидростатического давления  $p$  в области  $y > 0$ , ограниченной бесконечной вертикальной стенкой  $\{y = 0\}$ . Сила тяжести направлена по оси  $Ox$  и ее ускорение в координатах  $(x, y)$  имеет вид  $\mathbf{g} = (-g, 0)$ . Считаем, что плотность расплава  $\rho$  линейно зависит от концентрации:  $\rho = \rho_0[1 + \beta(c - c_0)]$ , где  $\rho_0, c_0$  — средняя плотность и концентрация раствора;  $\beta = (1/\rho_0) d\rho/dc = \text{const}$  (для определенности полагаем  $\beta > 0$ ). Тогда уравнения движения в приближении Буссинеска имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - g\beta(c - c_0); \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right); \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} = D \left( \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right). \quad (4)$$

В начальный момент времени предполагается равновесие:

$$u|_{t=0} = v|_{t=0} = 0, \quad c|_{t=0} = c_0, \quad (5)$$

а граничные условия имеют вид

$$u|_{y=0} = v|_{y=0} = 0, \quad c|_{y=0} = c_*, \quad c \xrightarrow{y \rightarrow \infty} c_0 \quad (6)$$

( $c_* = \text{const} > 0$ ).

Задача о микроконвекции состоит в нахождении концентрации  $c$ , вектора модифицированной скорости  $\mathbf{w} = \mathbf{v} + \beta D \nabla c$  и модифицированного давления  $q = p/\rho_* - gx + \beta(\nu - D)D\Delta c$ , где  $\rho = \rho_*(1 - \beta(c - c_0))^{-1}$ , удовлетворяющих начально-краевой задаче:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{w} \nabla \mathbf{w} - \beta D (\nabla c \nabla \mathbf{w} - \nabla \mathbf{w} \nabla c) + \beta^2 D^2 (\Delta c \nabla c - \nabla |\nabla c|^2 / 2) = \\ = (1 - \beta(c - c_0))(-\nabla q + \nu \Delta \mathbf{w}) + \beta(c - c_0)\mathbf{g}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{w} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{w} \nabla c - \beta D |\nabla c|^2 = D(1 - \beta(c - c_0))\Delta c; \\ w_1|_{t=0} = w_2|_{t=0} = 0, \quad c|_{t=0} = c_0; \end{aligned} \quad (8)$$

$$w_1|_{y=0} = 0, \quad w_2|_{y=0} = \beta D \frac{\partial c}{\partial y}|_{y=0}, \quad c|_{y=0} = c_*, \quad c \xrightarrow{y \rightarrow \infty} c_0 \quad (9)$$

( $w_1, w_2$  — компоненты вектора  $\mathbf{w}$ ).

**Пограничные слои при установившемся движении.** Граничные условия (6) и (9) в рассмотренных выше задачах не зависят от времени, следовательно, после затухания начальных возмущений процесс стабилизируется, и в задачах (1)–(6) и (7)–(9) можно искать не зависящие от времени решения без учета условий (5) и (8). Эти решения описывают наиболее длительную и существенную часть всего процесса.

Заметим, что система уравнений (1)–(4) имеет решение вида

$$u = v = 0, \quad p = 0, \quad c = c_0, \quad (10)$$

которое удовлетворяет всем граничным условиям (6), за исключением условия для концентрации при  $y = 0$ . Для компенсации данной невязки выделим асимптотические формы

этой системы при  $Sc \rightarrow \infty$ , полагая (10) внешним решением. Будем считать, что в задаче имеется некоторый масштаб длины  $l$ , например размер подложки. Масштаб скорости зададим формулой  $U = \sqrt{g\beta l(c_0 - c_*)}$ . Известно [1], что задача (1)–(6) зависит от двух безразмерных критериев подобия: определенного выше числа Шмидта и числа Рейнольдса

$$Re = Ul/\nu = [g\beta(c_0 - c_*)l^3/\nu^2]^{1/2}. \quad (11)$$

В дальнейшем считаем

$$Re^2 Sc \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad Sc \rightarrow \infty, \quad (12)$$

что эквивалентно тому, что  $\nu D$  мало. В рамках этого допущения на величину числа Рейнольдса не накладывается ограничений.

Положим

$$\begin{aligned} x \sim l, \quad y \sim l(Sc Re^2)^{-1/4}, \quad u \sim U Sc^{-1/2}, \quad v \sim U(Sc^3 Re^2)^{-1/4}, \\ p \sim \rho_0 U^2 (Sc Re^2)^{-1/2}, \quad c \sim c_*. \end{aligned}$$

Тогда в уравнении (1) имеем следующие порядки величин:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x}, \quad v \frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{U^2}{l} Sc^{-1}; \quad \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \sim \frac{U^2}{l} (Sc Re^2)^{-1/2}; \\ \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim \frac{\nu U}{l^2} Sc^{-1/2}; \quad \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{\nu U}{l^2} Re; \quad g\beta(c - c_0) \sim \frac{U^2}{l}, \end{aligned}$$

в уравнении (2)

$$\begin{aligned} u \frac{\partial v}{\partial x}, \quad v \frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{U^2}{l} (Sc^5 Re^2)^{-1/4}; \quad \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} \sim \frac{U^2}{l} (Sc Re^2)^{-1/4}; \\ \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \sim \frac{\nu U}{l^2} (Sc^3 Re^2)^{-1/4}; \quad \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \sim \frac{\nu U}{l^2} Re (Sc Re^2)^{-1/4}, \end{aligned}$$

в уравнении неразрывности (3) оба члена, очевидно, одного порядка, а в уравнении переноса (4) получаем порядки величин

$$u \frac{\partial c}{\partial x}, \quad v \frac{\partial c}{\partial y} \sim \frac{U c_*}{l} Sc^{-1/2}; \quad D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \sim \frac{D c_*}{l^2}; \quad D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \sim \frac{D c_*}{l^2} (Sc Re^2)^{1/2}.$$

Разделим уравнение (1) на  $U^2/l$ , уравнение (2) на  $U^2(Sc Re^2)^{-1/4}/l$ , уравнение (4) на  $c_* U Sc^{-1/2}/l$ . Переходя к пределу при  $Sc \rightarrow \infty$  и учитывая условие (12) и определения чисел  $Re$  и  $Sc$ , для пограничного слоя получим систему уравнений

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g\beta(c - c_0); \quad (13)$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (14)$$

$$u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} = D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}. \quad (15)$$

Уравнения движения в такой форме ранее не рассматривались. Вид граничных условий (6) не меняется. Из решений задачи (13)–(15), (6) рассмотрим только решения, имеющие ограниченную скорость при удалении от подложки:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = u_\infty(x) < \infty, \quad (16)$$

где  $u_\infty(x)$  определяется в процессе решения. Задача (13)–(16), (6) описывает движение в тонком диффузионно-динамическом слое толщиной порядка  $l(\text{Sc Re}^2)^{-1/4}$ , вне слоя  $c \approx c_0$ . В этом слое силы плавучести и вязкие силы одного порядка, а силы инерции и продольный градиент давления по сравнению с ними пренебрежимо малы. В отличие от случая классического пограничного слоя [2] внешнее представление скорости определяется в процессе решения, а не из условия сращивания. Очевидно, что компоненты вектора скорости и концентрации находятся независимо от давления, которое определяется интегрированием первого из уравнений (14) по  $y$  от  $y$  до  $\infty$  с учетом уравнения неразрывности:

$$p(x, y) = p_\infty(x) + \rho_0 \nu \left( u'_\infty(x) - \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (17)$$

где  $p_\infty(x)$  — давление на внешней границе пограничного слоя.

Поскольку в общем случае  $u_\infty(x) \neq 0$ , решение задачи (13)–(16), (6) нельзя срастить с внешним решением (10). Для компенсации этой невязки необходимо выделить еще одну асимптотику задачи, причем она должна описывать движение в области с асимптотической толщиной, большей толщины рассмотренного выше пограничного слоя. При  $\text{Sc} \rightarrow \infty$  возможны три варианта:

$$\text{Sc}/\text{Re}^2 \rightarrow 0; \quad (18a)$$

$$\text{Sc}/\text{Re}^2 \sim 1; \quad (18б)$$

$$\text{Sc}/\text{Re}^2 \rightarrow \infty. \quad (18в)$$

Пусть имеет место условие (18a). Выделим асимптотическую форму системы (1)–(4), полагая

$$\begin{aligned} x \sim l, \quad y \sim l(\text{Sc}/\text{Re}^2)^{1/4}, \quad u \sim U \text{Sc}^{-1/2}, \quad v \sim U(\text{Sc Re}^2)^{-1/4}, \\ p \sim \rho_0 U^2 (\text{Sc Re}^2)^{-1/2}, \quad c \equiv c_0. \end{aligned}$$

Сравнив порядки величин в системе уравнений (1)–(4), заметим, что справедлива гипотеза Прандтля о равенстве порядков вязких сил и сил инерции. Обозначив компоненты скорости через  $u_1, v_1$ , получаем систему уравнений

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}; \quad (19)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0, \quad (20)$$

а из условий сращивания имеем граничные условия

$$u_1|_{y=0} = u_\infty(x), \quad v_1|_{y=0} = 0, \quad u_1 \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0. \quad (21)$$

Задача (19)–(21) описывает движение в тонком чисто динамическом ( $c = \text{const}$ ) пограничном слое толщиной порядка  $l(\text{Sc}/\text{Re}^2)^{1/4}$ , т. е. асимптотически большей, чем толщина диффузионно-динамического слоя. Задача для динамического слоя отличается от классической тем, что значение продольной скорости задается на внутренней, а не на внешней границе. В задаче давление можно считать нулевым по следующей причине. Из первого уравнения (20) получаем, что давление  $p$  такое же, как на внешней границе пограничного слоя, где  $p \equiv 0$  (состояние покоя, давление равно гидростатическому). Поэтому в формуле (17) в этом случае  $p_\infty \equiv 0$ .

Допустим, что реализовано условие (18б). Полагаем

$$\begin{aligned} x \sim l, \quad y \sim l, \quad u \sim U \text{Sc}^{-1/2}, \quad v \sim U \text{Sc}^{-1/2}, \\ p \sim \rho_0 U^2 (\text{Sc Re}^2)^{-1/2}, \quad c \equiv 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Сравнивая порядки величин и учитывая условие (18б), получаем, что движение описывается стационарными уравнениями Навье — Стокса вида (1)–(3), в которых концентрация постоянна. Граничные условия имеют вид

$$u|_{y=0} = u_{\infty}(x), \quad v|_{y=0} = 0, \quad u \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0. \quad (23)$$

В этом случае затухание скорости происходит на конечном расстоянии от твердой стенки.

Наконец, рассмотрим условие (18в). Находя асимптотику вида (22), получим, что в этом случае градиент давления одного порядка с вязкими силами, а силы инерции пренебрежимо малы, т. е. течение описывается системой Стокса с граничными условиями вида (23).

Итак, для определения полей скорости, концентрации и давления нужно сначала решить задачу для диффузионно-динамического слоя (без уравнения для давления), вычислить внешнее представление скорости  $u_{\infty}(x)$ , затем, используя это представление как граничное условие, решить задачу для внешней асимптотики (для конкретного случая), определить  $p_{\infty}(x)$  и, наконец, вычислить по формуле (17) давление в диффузионно-динамическом слое. Наибольший интерес представляет задача для диффузионно-динамического слоя, поскольку, решая ее, можно найти поля скорости и концентрации вблизи твердой стенки, а в большинстве случаев в этом и состоит цель вычислений.

Выделим асимптотическую форму в задаче (7)–(9) о микроконвекции при  $Sc \rightarrow \infty$ . Считая вязкие силы и силы плавучести одного порядка и удерживая в системе (7) члены старших порядков, выводим уравнения пограничного слоя при микроконвекции

$$\begin{aligned} \nu(1 - \beta(c - c_0)) \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = g\beta(c - c_0), \quad \frac{\partial q}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y} = 0, \\ w_1 \frac{\partial c}{\partial x} + w_2 \frac{\partial c}{\partial y} - \beta D \left( \frac{\partial c}{\partial y} \right)^2 = D(1 - \beta(c - c_0)) \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} w_1|_{y=0} = 0, \quad w_2|_{y=0} = \beta D \frac{\partial c}{\partial y}|_{y=0}, \quad c|_{y=0} = c_*, \\ c \xrightarrow{y \rightarrow \infty} c_0, \quad w_1 \xrightarrow{y \rightarrow \infty} w_{\infty}(x) < \infty, \end{aligned} \quad (25)$$

где функция  $w_{\infty}(x)$  определяется в процессе решения.

**Автомодельные решения. Формулы для массообмена.** Будем искать решение задачи (13)–(16), (6) в виде  $u = \partial\psi/\partial y$ ,  $v = -\partial\psi/\partial x$ ,  $c = c_0 + (c_0 - c_*)C(\xi)$ , где функция тока  $\psi$  имеет вид

$$\psi = x^{3/4} \left( \frac{64g\beta(c_0 - c_*)D^3}{27\nu} \right)^{1/4} \Psi(\xi), \quad \xi = \left( \frac{3g\beta(c_0 - c_*)}{4\nu D} \right)^{1/4} \frac{y}{x^{1/4}}.$$

Тогда уравнения (13)–(15) примут вид

$$\Psi''' = C, \quad C'' = -\Psi C'. \quad (26)$$

Из условия (6) следует

$$\Psi(0) = \Psi'(0) = 0, \quad C(0) = -1, \quad C \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0. \quad (27)$$

Из условия (16) получаем, что для внешнего представления скорости должны выполняться условия

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \Psi'(\xi) = U_{\infty} = \text{const} < \infty, \quad u_{\infty}(x) = \sqrt{\frac{4g\beta(c_0 - c_*)x}{3Sc}} U_{\infty}. \quad (28)$$

Решения задачи (26), (27), не удовлетворяющие условию (28), не рассматриваются как не имеющие физического смысла.

Для характеристики массообмена между растущей пленкой и раствором введем общее и местное числа Нуссельта:

$$\text{Nu} = \frac{1}{c_0 - c_*} \int_0^l \frac{\partial c}{\partial y} \Big|_{y=0} dx, \quad \text{Nu}_x = \frac{x}{c_0 - c_*} \frac{\partial c}{\partial y} \Big|_{y=0}.$$

Для решений задачи (26)–(28) числа Нуссельта имеют вид

$$\begin{aligned} \text{Nu} &= (4/3)^{3/4} C'(0) (\text{Sc Re}^2)^{1/4} \approx 0,670 (\text{Sc Re}^2)^{1/4}, \\ \text{Nu}_x &= (3/4)^{1/4} C'(0) (\text{Sc Re}_x^2)^{1/4} \approx 0,502 (\text{Sc Re}_x^2)^{1/4}. \end{aligned} \tag{29}$$

При этом задача (26)–(28) решалась численно. Число Рейнольдса задано формулой (11), а местное число  $\text{Re}_x$  определяется формулой (11), в которой  $l$  заменяется на  $x$ . Формулы (29) аналогичны полученным в [3], где построена зависимость числа Нуссельта от чисел Грасгофа и Прандтля.

Задача (24), (25) допускает автомодельность, поэтому будем искать ее решение в виде  $w_1 = \partial\psi/\partial y$ ,  $w_2 = -\partial\psi/\partial x$ ,  $c = c_0 + (c_0 - c_*)C(\xi)$ , где функция  $\psi$  имеет тот же вид, что и ранее. Тогда для  $\Psi$ ,  $C$  получаем задачу

$$\begin{aligned} (1 - \lambda C)\Psi''' &= C, & (1 - \lambda C)C'' &= -\lambda(C')^2 - \Psi C', \\ \Psi(0) &= -\lambda C'(0), & \Psi'(0) &= 0, & C(0) &= -1, \\ C \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, & & \Psi' \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} U_\infty &< \infty, \end{aligned} \tag{30}$$

где  $\lambda = \beta(c_0 - c_*)$  — параметр Буссинеска. Формула для внешней скорости  $w_\infty(x)$  аналогична (28).

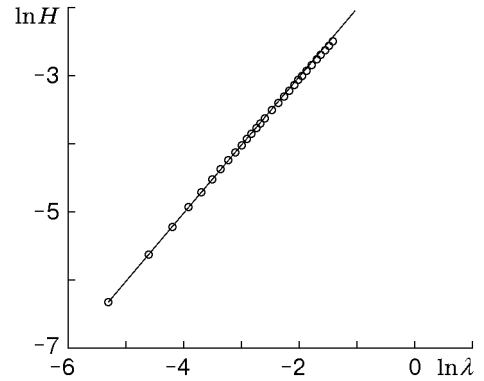
Задача (30) решена численно, причем значение параметра  $\lambda$  варьировалось от 0 до 0,25 (при  $\lambda = 0$  эта задача совпадает с (26)–(28)). Для каждого значения  $\lambda$  вычислялось значение  $\text{Nu}$ . Результаты расчетов приведены на рисунке. Прямая линия задается уравнением  $\ln H = 0,990 \ln \lambda - 1,773$  ( $H = (\text{Nu}(0) - \text{Nu}(\lambda))(\text{Re}^2 \text{Sc})^{-1/4}$ ), точками представлены расчетные значения. Незначительные отклонения расчетных точек от прямой появляются только при  $\lambda \geq 0,15$ . Из физического смысла величины  $\lambda$  как относительного отклонения от средней плотности следует, что наиболее важен случай небольших значений  $\lambda$ . Таким образом, зависимость числа Нуссельта от  $\lambda$  можно записать в виде

$$\text{Nu}(\lambda) = (0,670 - 0,169\lambda^{0,990})(\text{Re}^2 \text{Sc})^{1/4}. \tag{31}$$

Формулы (29) и (31) при  $\lambda = 0$  совпадают, а при других значениях  $\lambda$  зависимость (31) близка к линейной.

Определим толщину диффузионно-динамического слоя. Для оценки толщины пограничного слоя в классической теории используется так называемая толщина вытеснения [2]. В данном случае пограничный слой характеризуется тем, что в нем концентрация  $c$  отличается от средней, а вне слоя  $c \approx c_0$ . Аналог толщины вытеснения  $\delta_c^*$  определим равенством

$$\delta_c^*(c_0 - c_*) = \int_0^\infty [c_0 - c(x, y)] dy.$$



После вычислений для автомодельных решений получим

$$\delta_c^* = \frac{x}{(\text{Re}_x^2 \text{Sc})^{1/4}} \int_0^\infty [-C(\xi)] d\xi = \frac{x}{(\text{Re}_x^2 \text{Sc})^{1/4}} d(\lambda).$$

В расчетах определялись зависимости  $d(\lambda)$ ,  $U_\infty(\lambda)$ . Оказалось, что они практически не отличаются от линейной. Имеют место формулы

$$\delta_c^*(x) = (1,165 + 0,260\lambda) \frac{x}{(\text{Re}_x^2 \text{Sc})^{1/4}}, \quad u_\infty(x) = (0,884 + 0,029\lambda) \sqrt{\frac{4g\lambda x}{3 \text{Sc}}}. \quad (32)$$

Из (32) следует, что общая интенсивность конвекции, определяемая значением  $U_\infty$ , практически не зависит от  $\lambda$ .

**Начальные асимптотики.** Рассмотрим асимптотику задачи (1)–(6) на интервале времени  $[0, \tau]$  при  $\tau \rightarrow 0$ . Тогда порядок скоростей при малых временах есть  $U_0 = g\beta(c_0 - c_*)\tau D/\nu$ . Полагая  $x \sim l$ ,  $y \sim \delta_0 = \sqrt{D\tau}$ ,  $u \sim U_0$ ,  $v \sim \delta_0 U_0/l$ ,  $p \sim \rho_0 \nu U_0/l$ ,  $c \sim c_*$ , получим, что в уравнении (1) конвективные члены и градиент давления пренебрежимо малы по сравнению с остальными членами, т. е. вновь необходимо принять гипотезу о равенстве порядков сил плавучести и вязких сил. Далее, в уравнении (2) старшими будут члены  $(1/\rho_0)\partial p/\partial y$  и  $\nu \partial^2 v/\partial y^2$ , а в уравнении (4) — члены  $\partial c/\partial t$  и  $D \partial^2 c/\partial y^2$ . Таким образом, имеем систему уравнений

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g\beta(c - c_0); \quad (33)$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (34)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}. \quad (35)$$

Начально-краевые условия для  $c$  зададим в виде

$$c|_{t=0} = c_0, \quad c|_{y=0} = c_*, \quad c \xrightarrow{y \rightarrow \infty} c_0, \quad (36)$$

а для компонент скорости имеют место условие прилипания

$$u|_{y=0} = v|_{y=0} = 0 \quad (37)$$

и дополнительное условие

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u(t, x, y) = u_\infty(t, x) < \infty, \quad (38)$$

где  $u_\infty(t, x)$  определяется в процессе решения. Задача (33)–(38) описывает движение в диффузионно-динамическом слое при малых временах. Концентрация примеси  $c$  определяется из уравнения (35) и условий (36). После определения концентрации можно найти компоненты скорости и давление, при этом время будет входить в решение как параметр.

Кроме асимптотики, рассмотренной выше, выделим асимптотическую форму в задаче (7)–(9) о микроконвекции. Приняв гипотезу о равенстве порядков вязких сил и сил плавучести и удерживая в системе (7)–(9) члены старших порядков, получаем систему уравнений

$$(1 - \beta(c - c_0))\nu \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = g\beta(c - c_0), \quad \frac{\partial q}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y} = 0, \quad (39)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} - \beta D \left( \frac{\partial c}{\partial y} \right)^2 = D(1 - \beta(c - c_0)) \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}$$

с условиями

$$\begin{aligned} c|_{t=0} = c_0, \quad c|_{y=0} = c_*, \quad c \xrightarrow{y \rightarrow \infty} c_0, \\ w_1|_{y=0} = 0, \quad w_2|_{y=0} = \beta D \frac{\partial c}{\partial y}|_{y=0}, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} w_1(t, x, y) = w_\infty(t, x) < \infty. \end{aligned} \quad (40)$$

Задача (35), (36) представляет собой известную [2] задачу о сглаживании начального разрыва температуры, решение которой имеет вид

$$c = c_0 + (c_0 - c_*)\hat{c}(\eta) = c_0 + (c_0 - c_*) \left( -1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\alpha^2} d\alpha \right), \quad \eta = \frac{y}{2\sqrt{Dt}}.$$

Далее, компоненты скорости  $u$ ,  $v$  можно искать в виде  $u = u(t, y)$ ,  $v \equiv 0$ , полагая, что при малых временах они не зависят от продольной координаты. Если положить  $u(t, y) = 4Dg\beta(c_0 - c_*)t\hat{u}(\eta)/\nu$ , то из (33) получаем уравнение  $\hat{u}'' = \hat{c}$  или  $\hat{u}' = \int_0^\eta \hat{c}(\alpha) d\alpha + A$ . Из дополнительного условия (38) следует, что  $\hat{u}' \rightarrow 0$  при  $\eta \rightarrow \infty$ , откуда

$$A = - \int_0^\infty \hat{c}(\alpha) d\alpha \quad \text{или} \quad \hat{u}' = - \int_\eta^\infty \hat{c}(\alpha) d\alpha.$$

С учетом (37) получаем

$$u(t, y) = \frac{4Dg\beta(c_0 - c_*)}{\nu} t\hat{u}(\eta), \quad \hat{u}(\eta) = - \int_0^\eta \int_\omega^\infty \hat{c}(\alpha) d\alpha d\omega.$$

Отсюда для внешнего представления скорости имеем

$$u_\infty(t) = \frac{4Dg\beta(c_0 - c_*)}{\nu} t\hat{U}_\infty, \quad \hat{U}_\infty = - \int_0^\infty \int_\omega^\infty \hat{c}(\alpha) d\alpha d\omega.$$

Таким образом, задача (33)–(38) решена в квадратурах.

В задаче (39), (40) ищем автомодельные решения в виде

$$c(t, y) = c_0 + (c_0 - c_*)\hat{c}(\eta), \quad w_1 = w_1(t, y) = \frac{4Dg\beta(c_0 - c_*)}{\nu} t\hat{w}_1(\eta), \quad w_2 \equiv 0.$$

Тогда для определения  $\hat{w}_1$ ,  $\hat{c}$  получаем задачу

$$\begin{aligned} (1 - \lambda\hat{c})\hat{w}_1'' = \hat{c}, \quad (1 - \lambda\hat{c})\hat{c}'' = -\lambda(\hat{c}')^2 - 2\eta\hat{c}', \\ \hat{w}_1(0) = 0, \quad \hat{c}(0) = -1, \quad \hat{c} \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} 0, \quad \hat{w}_1' \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (41)$$

Массообмен характеризуется только общим числом Нуссельта, поскольку нет зависимости от координаты  $x$ . На основе численного решения задачи (41) для массообмена, толщины слоя и скорости при микроконвекции получены формулы вида

$$\text{Nu}(\lambda) = \left( \frac{2}{\sqrt{\pi}} - 0,344\lambda^{0,992} \right) \frac{l}{2\sqrt{Dt}}; \quad (42)$$

$$\delta_c^*(t) = 2(0,606 - 0,055\lambda)\sqrt{Dt}, \quad u_\infty(t) = (0,249 - 0,117\lambda)4g\lambda t/\text{Sc}. \quad (43)$$



Из формул (31), (42) следует, что в режиме установления и при малых временах при увеличении  $\lambda$  интенсивность (безразмерная) массообмена уменьшается. Это происходит по разным физическим причинам: за счет утолщения пограничного слоя при установлении (см. (32)) и уменьшения интенсивности конвекции в начале процесса (см. (43)).

**Выводы.** Рассмотрена задача о массообмене и свободной конвекции вблизи вертикальной стенки при больших числах Шмидта. Проведен сравнительный анализ интегральных характеристик течения для моделей Обербека — Буссинеска и микроконвекции. Для обеих моделей выведены асимптотические формы задач в установившемся режиме движения и при малых временах. В области движения выделяется диффузионно-динамический слой, в котором существенны силы плавучести, а вне слоя концентрация примеси не отличается от средней.

Структура поля скоростей зависит от числа Рейнольдса. Если  $Re$  велико, то в области движения имеется чисто динамический слой с большей асимптотической толщиной, сопрягающийся на внутренней границе с диффузионно-динамическим слоем, а на внешней — с областью состояния покоя. Если  $Re$  мало, то вне диффузионного слоя можно использовать приближение Стокса.

Для обоих способов описания конвекции получены формулы для чисел Нуссельта в зависимости от чисел Рейнольдса, Шмидта и параметра Буссинеска как в режиме установления, так и при малых временах. В случае конвекции эти формулы совпадают с известными, полученными ранее в предположении об интенсивном движении с большими значениями  $Re$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Джалурия Й.** Естественная конвекция: Тепло- и массообмен. М.: Мир, 1983.
2. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
3. **Le Fevre E. J.** Laminar free convection from a vertical plane surface. Great Britain, 1956. (Prepr. / Mech. Eng. Res. Lab.; N 113).
4. **Roy S.** A note on natural convection at high Prandtl number // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1969. V. 12. P. 239–241.
5. **Selman J. R., Newman J.** High Sc limit of free convection at a vertical plate with uniform flux condition // Trans. ASME. Ser. C. J. Heat Transfer. 1971. V. 93. P. 465, 466.
6. **Пухначев В. В.** Модель конвективного движения при пониженной гравитации // Моделирование в механике. 1992. Т. 6, № 4. С. 47–56.
7. **Perera P. S., Sekerka R. F.** Non-solenoidal flows in a liquid diffusion couple // Phys. Fluids. 1997. V. 9. P. 376–391.
8. **Гончарова О. Н.** Микроконвекция в слабых силовых полях. Сравнение двух моделей при численном исследовании // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 2. С. 58–63.
9. **Гончарова О. Н.** Численное исследование микроконвекции в областях со свободными границами // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 3. С. 64–68.

*Поступила в редакцию 4/III 1998 г.,  
в окончательном варианте — 26/VII 1999 г.*