

К ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СМЕСЕЙ

Л. А. Сараяв
(Куйбышев)

1. Рассмотрим жесткопластическую микронеоднородную изотропную среду, состоящую из n различных компонентов, соединенных между собой с идеальной адгезией. Пусть пластические свойства каждого компонента описываются поверхностью текучести, учитывающей гидростатическое давление:

$$s_{ij}\varepsilon_{ij} + a_s\sigma_{pp}^2 = k_s^2, \quad s = 1, 2, \dots, n,$$

где $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_{pp}/3$; σ_{ij} — тензор напряжений; k_s — пределы текучести компонентов; a_s — параметры, характеризующие их объемную сжимаемость.

Структура такой среды может быть описана системой индикаторных случайных функций координат $\kappa_1(\mathbf{r}), \kappa_2(\mathbf{r}), \dots, \kappa_n(\mathbf{r})$, из которых каждая функция $\kappa_s(\mathbf{r})$ равна единице на множестве точек s -го компонента и равна нулю вне этого множества. При помощи этих функций локальный ассоциированный закон течения рассматриваемого композиционного материала можно записать в виде [1]

$$(1.4) \quad \sigma_{ij}(\mathbf{r}) = k(\mathbf{r}) \frac{\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) - \delta_{ij}b(\mathbf{r})\varepsilon_{pp}(\mathbf{r})}{\sqrt{\varepsilon_{kl}(\mathbf{r})\varepsilon_{kl}(\mathbf{r}) - b(\mathbf{r})\varepsilon_{pp}^2(\mathbf{r})}},$$

где $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})$ — тензор скоростей деформаций; $k(\mathbf{r}) = \sum_{s=1}^n k_s \kappa_s(\mathbf{r})$;

$$b(\mathbf{r}) = \sum_{s=1}^n b_s \kappa_s(\mathbf{r}); \quad b_s = (3a_s - 1)/9a_s.$$

Все функции $\kappa_s(\mathbf{r})$, тензоры напряжений и скоростей деформаций предполагаются статистически однородными и эргодическими полями, и их математические ожидания совпадают с осреднениями по объемам компонентов V_s и по полному объему среды $V = V_1 + V_2 + \dots + V_n$ [2]:

$$\langle \dots \rangle = \frac{1}{V} \int_V (\dots) d\mathbf{r}, \quad \langle \dots \rangle_s = \frac{1}{V_s} \int_{V_s} (\dots) d\mathbf{r}, \quad s = 1, 2, \dots, n.$$

В формуле (1.4) для ассоциированного закона течения среды заменим диссипативную функцию ее средним значением $D = \langle \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \rangle$ в полном объеме V . Это допущение линеаризует связь между локальными стохастическими полями напряжений и скоростей деформаций, и соотношение (1.4) принимает вид [1]

$$(1.2) \quad D\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = k^2(\mathbf{r})\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) - k^2(\mathbf{r})b(\mathbf{r})\delta_{ij}\varepsilon_{pp}(\mathbf{r}).$$

Подставляя локальные определяющие уравнения (1.2) в уравнение равновесия $\sigma_{ij,j} = 0$, получим

$$(1.3) \quad k_1^2 \varepsilon'_{ij,j} - k_1^2 b_1 \varepsilon'_{pp,i} - \tau'_{ij,j} = 0,$$

$$-\tau'_{ij} = \sum_{s=1}^n [k_s^2] \kappa_s \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \sum_{s=1}^n [k_s^2 b_s] \kappa_s \varepsilon_{pp}, \quad [k_s^2] = k_s^2 - k_1^2,$$

$[k_s^2 b_s] = k_s^2 b_s - k_1^2 b_1$, штрихами обозначены флуктуации величин в объеме V . Присоединяя к уравнению (1.3) формулы Коши $2\varepsilon_{ij} = v_{i,j} + v_{j,i}$, связывающие компоненты вектора скорости перемещений $v_i(\mathbf{r})$ с компонентами тензора скоростей деформаций, получаем замкнутую систему уравнений течения многокомпонентной смеси, граничными условиями для которой являются условия отсутствия флуктуаций величин на поверхности объема V . Введем тензор Грина

$$G_{ik}^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi k_1^2} \left(\delta_{ik} r_{,pp} - \frac{1-b_1}{2-b_1} r_{,ik} \right), \quad r = |\mathbf{r}|,$$

с помощью которого уравнения равновесия среды сводятся к системе интегральных уравнений [1]

$$(1.4) \quad \varepsilon'_{ij}(\mathbf{r}) = \int_V G_{i(k,l)j}^{(1)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \tau'_{kl}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1.$$

Для определения эффективных констант многокомпонентной смеси необходимо установить связь между макроскопическими напряжениями и скоростями деформаций. Осредним соотношение (1.2) по полному объему тела V и применим правило механического смешивания фаз

$$(1.5) \quad D \langle \sigma_{ij} \rangle = \sum_{s=1}^n k_s^2 c_s (\langle \varepsilon_{ij} \rangle_s - \delta_{ij} b_s \langle \varepsilon_{pp} \rangle_s),$$

где $c_s = V_s V^{-1}$ — объемные содержания компонентов. Уравнения (1.5) показывают, что для установления макроскопического реологического закона требуется вычислить скорости деформаций, осредненные по объемам компонентов, и среднюю плотность диссипации энергии D . Величины $\langle \varepsilon_{ij} \rangle_s$ можно найти из соотношений [3]

$$(1.6) \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle_s = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + c_s^{-1} \langle \kappa'_s \varepsilon'_{ij} \rangle.$$

Вычислим величину $\langle \kappa'_s \varepsilon'_{ij} \rangle$. Умножим уравнение (1.4) на $\kappa'_s(\mathbf{r})$ и осредним по полному объему V :

$$\langle \kappa'_s \varepsilon'_{ij} \rangle = \int_V G_{i(k,l)j}^{(1)}(\mathbf{r}_1) \langle \kappa'_s(\mathbf{r}) \tau'_{kl}(\mathbf{r} + \mathbf{r}_1) \rangle d\mathbf{r}_1.$$

При вычислении интеграла, стоящего в правой части, ограничимся сингулярным приближением, опуская формальные части вторых производных тензора Грина, тогда [3, 4]

$$(1.7) \quad \langle \kappa'_s \varepsilon'_{ij} \rangle = (\alpha_1 I_{ijkl} - \beta_1 \delta_{ij} \delta_{kl}) \langle \kappa'_s \tau'_{kl} \rangle / k_1^2.$$

Здесь $\alpha_1 = 2(4 - 3b_1)/15(1 - b_1)$; $\beta_1 = (1 - 2b_1)/15(1 - b_1)$; I_{ijkl} — единичный тензор. Подставляя в формулу (1.7) выражение для τ'_{ij} и выделяя объемную и девпаторную части, находим

$$(1.8) \quad \langle \kappa'_q \varepsilon'_{ij} \rangle = -\alpha_1 \sum_{s=1}^n [k_s^2] \langle \kappa'_q \kappa'_s \varepsilon'_{ij} \rangle / k_1^2,$$

$$\langle \kappa'_q \varepsilon'_{pp} \rangle = -(\alpha_1 - 3\beta_1) \sum_{s=1}^n ([k_s^2] - 3[k_s^2 b_s]) \langle \kappa'_q \kappa'_s \varepsilon'_{pp} \rangle / k_1^2,$$

где $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - (1/3)\delta_{ij}\varepsilon_{pp}$. Исключая из уравнений (1.6), (1.8) величины $\langle \kappa'_q \varepsilon'_{ij} \rangle$ и учитывая соотношения

$$\langle \kappa'_q \kappa'_s \varepsilon'_{ij} \rangle = \begin{cases} c_q c_s (\langle f \rangle - \langle f \rangle_q - \langle f \rangle_s), & q \neq s, \\ c_s (c_s \langle f \rangle + (1 - 2c_s) \langle f \rangle_s), & q = s, \end{cases}$$

$$\langle \kappa'_q \kappa'_s \varepsilon'_{pp} \rangle = \begin{cases} -c_q c_s, & q \neq s, \\ c_s (1 - c_s), & q = s, \end{cases}$$

выразим осредненные по объему компонентов скорости деформаций через макроскопические величины:

$$(1.9) \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle_q = \frac{\alpha_1 D \langle s_{ij} \rangle + (1 - \alpha_1) k_1^2 \langle \varepsilon_{ij} \rangle}{k_1^2 + \alpha_1 [k_q^2]},$$

$$\langle \varepsilon_{pp} \rangle_q = \frac{\gamma_1 D \langle \sigma_{pp} \rangle + k_1^2 (1 - 3b_1) (1 - \gamma_1) \langle \varepsilon_{pp} \rangle}{k_1^2 (1 - 3b_1) + \gamma_1 ([k_q^2] - 3[k_q^2 b_q])},$$

$$\gamma_1 = (3b_1 - 1)/3(b_1 - 1).$$

Подставляя величины (1.9) в уравнение (1.5) и разделяя его на объемную и девпаторную части, получим

$$(1.10) \quad D \langle s_{ij} \rangle = k_1^2 \frac{(1 - \alpha_1) A_1}{1 - \alpha_1 A_1} \langle \varepsilon_{ij} \rangle, \quad D \langle \sigma_{pp} \rangle = k_1^2 (1 - 3b_1) \frac{(1 - \gamma_1) B_1}{1 - \gamma_1 B_1} \langle \varepsilon_{pp} \rangle.$$

$$\text{Здесь } A_1 = \sum_{s=1}^n \frac{k_s^2 c_s}{k_1^2 + \alpha_1 [k_s^2]}; \quad B_1 = \sum_{s=1}^n \frac{k_s^2 (1 - 3b_s) c_s}{k_1^2 (1 - 3b_1) + \gamma_1 ([k_s^2] - 3[k_s^2 b_s])}.$$

Вычислим теперь величину D . Воспользуемся интегральным уравнением равновесия среды, записанным во флуктуациях:

$$(1.11) \quad \int_V \sigma'_{ij} \varepsilon'_{ij} d\mathbf{r} = 0,$$

из которого следует $D = \langle \sigma_{ij} \rangle \langle \varepsilon_{ij} \rangle$. Исключая отсюда и из соотношений (1.10) средние скорости деформаций $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$, находим макроскопическую поверхность текучести среды

$$(1.12) \quad \langle s_{ij} \rangle \langle s_{ij} \rangle + a^* \langle \sigma_{pp} \rangle^2 = k^{*2}.$$

Здесь

$$(1.13) \quad k^* = k_1 \sqrt{\frac{(1-\alpha_1)A_1}{1-\alpha_1 A_1}}, \quad a^* = \frac{(1-\alpha_1)A_1(1-\gamma_1 B_1)}{3(1-\alpha_1 A_1)(1-\gamma_1)(1-3b_1)B_1}$$

— эффективный предел текучести и параметр, характеризующий макроскопическую сжимаемость композиционного материала.

Формулы для эффективных констант k^* , a^* показывают, что построенная модель соответствует композиционной среде, для которой первый компонент является связующей матрицей, а остальные компоненты распределены в ней в виде отдельных включений. Так, если положить k_1 равным нулю, то k^* тождественно обращается в нуль, но если $k_1 \neq 0$, то при любых $k_s = 0$ ($s = 2, 3, \dots, n$) эффективный предел текучести тождественно не равен нулю. При $n = 2$ формулы для k^* и a^* совпадают с выражениями для эффективных констант идеально пластической двухфазной среды, полученными в [1].

В качестве частного случая общих формул (1.13) рассмотрим пористую среду, пластически несжимаемый материал основы которой содержит абсолютно жесткие включения. Пусть V_1 — объем матрицы, для которой $a_1 = 0$, $\alpha_1 = 0,4$, $\gamma_1 = 1$; V_2 — объем пор ($k_2 = 0$); V_3 — объем жестких включений ($k_3 \rightarrow \infty$). Тогда $A_1 = c_1 + 2,5c_3$, $B_1 = c_1 + c_3$ и поверхность текучести такой среды принимает вид

$$(1.14) \quad \langle s_{ij} \rangle \langle s_{ij} \rangle + \frac{c_2(2-2c_2+3c_3)}{2(1-c_2)(6+4c_2-3c_3)} \langle \sigma_{pp} \rangle^2 = k_1^2 \frac{3(2-2c_2+3c_3)}{6+4c_2-3c_3}.$$

При $c_3 = 0$ (отсутствие жесткой фазы) уравнение (1.14) совпадает с выражением для поверхности текучести пористой среды [1].

2. При конструировании и изготовлении многокомпонентных композиционных материалов связующая матрица может быть образована не одним, а сразу несколькими компонентами. Например, в результате пропитки расплавом меди спеченного порошка вольфрама получается материал, обе фазы которого образуют сплетение взаимопроникающих каркасов. Формулы (1.13) не могут описывать поведение таких многокомпонентных сред. Для оценки их механических свойств требуется другой способ осреднения системы уравнений равновесия [5].

Разделим все компоненты композиционного материала на две группы, считая, что первые m компонентов обладают одинаковой связностью и образуют матрицу из взаимопроникающих каркасов, а остальные $n - m$ компонентов распределены в этой матрице в виде отдельных включений. Обозначая средние значения констант в объеме матрицы

$$\{k^2\} = \sum_{s=1}^m k_s^2 c_s, \quad \{k^2 b\} = \sum_{s=1}^m k_s^2 b_s c_s,$$

запишем систему уравнений (1.13) в виде

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \{k^2\} \varepsilon'_{ij,j} - \{k^2 b\} \varepsilon'_{pp,i} - \lambda'_{ij,j} &= 0, \\ -\lambda'_{ij} &= \sum_{s=1}^m k_s^2 (\varepsilon_{ij} - \delta_{ij} b_s \varepsilon_{pp}) \kappa'_s + \sum_{s=m+1}^n k_s^2 (\varepsilon_{ij} - \delta_{ij} b_s \varepsilon_{pp}) \kappa_s. \end{aligned}$$

При помощи тензора Грина

$$G_{ih}(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi \{k^2\}} \left(\delta_{ik} \tau_{,pp} - \frac{\{k^2\} - \{k^2 b\}}{2 \{k^2\} - \{k^2 b\}} \tau_{,ih} \right)$$

система (2.1) сводится к системе интегральных уравнений

$$(2.2) \quad \varepsilon'_{ij}(r) = \int_V G_{i(k,l)j}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \lambda'_{kl}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1.$$

Вычисление величины $\langle \kappa'_s \varepsilon'_{ij} \rangle$ с использованием гипотезы сингулярного приближения в уравнениях (2.2) дает

$$(2.3) \quad \langle \kappa'_s \varepsilon'_{ij} \rangle = (\alpha \langle \kappa'_s \lambda'_{ij} \rangle - \delta_{ij} \beta \langle \kappa'_s \lambda'_{pp} \rangle) / \{k^2\}.$$

Здесь

$$\alpha = (2/15) (\{k^2\} - 3 \{k^2 b\}) / (\{k^2\} - \{k^2 b\}),$$

$$\beta = (1/15) (\{k^2\} - 2 \{k^2 b\}) / (\{k^2\} - \{k^2 b\}).$$

Из соотношений (1.6) и (2.3) определим осредненные по объему компоненты скорости деформаций:

$$(2.4) \quad \langle e_{ij} \rangle_s = \frac{\alpha D \langle s_{ij} \rangle + (1 - \alpha) \{k^2\} \langle e_{ij} \rangle}{\{k^2\} (1 + \alpha (m_s - 1))},$$

$$\langle \varepsilon_{pp} \rangle_s = \frac{\gamma D \langle \sigma_{pp} \rangle + (1 - \gamma) (\{k^2\} - 3 \{k^2 b\}) \langle \varepsilon_{pp} \rangle}{(\{k^2\} - 3 \{k^2 b\}) (1 + \gamma (q_s - 1))}.$$

Здесь $m_s = k_s^2 / \{k^2\}$, $q_s = (k_s^2 - 3k_s^2 b_s) / (\{k^2\} - 3 \{k^2 b\})$;
 $\gamma = (\{k^2\} - 3 \{k^2 b\}) / 3 (\{k^2\} - \{k^2 b\})$.

Подстановка формул (2.4) в соотношение (1.5) и выделение девнаторной и объемной частей приводят к выражениям

$$(2.5) \quad D \langle s_{ij} \rangle = \{k^2\} \frac{(1 - \alpha) A}{\{k^2\} - \alpha A} \langle e_{ij} \rangle,$$

$$D \langle \sigma_{pp} \rangle = (\{k^2\} - 3 \{k^2 b\}) \frac{(1 - \gamma) B}{\{k^2\} - 3 \{k^2 b\} - \gamma B} \langle \varepsilon_{pp} \rangle.$$

Здесь

$$A = \sum_{s=1}^n \frac{k_s^2 c_s}{1 + \alpha (m_s - 1)}; \quad B = \sum_{s=1}^n \frac{k_s^2 (1 - 3b_s) c_s}{1 + \gamma (q_s - 1)}.$$

Макроскопическая поверхность текучести среды находится исключением из соотношений (1.11) и (2.5) величин D и $\langle e_{ij} \rangle$ и имеет вид (1.12). Эффективные константы композиционного материала определяются формулами

$$(2.6) \quad k^* = \sqrt{\{k^2\} \frac{(1 - \alpha) A}{\{k^2\} - \alpha A}},$$

$$a^* = \frac{(1 - \alpha) \{k^2\} A (\{k^2\} - 3 \{k^2 b\} - \gamma B)}{3 (1 - \gamma) (\{k^2\} - 3 \{k^2 b\}) B (\{k^2\} - \alpha A)}.$$

Как следствие, из общих формул (2.6) можно получить эффективные константы пористой среды, материал основы которой образован двумя пластически несжимаемыми взаимопроникающими компонентами. Полагая в соотношениях (2.6) $m = 2$, $n = 3$, $a_1 = a_2 = 0$, $k_3 = 0$, находим

$$(2.7) \quad k^* = k_1 v \sqrt{\frac{15p(3v + p^2 q)}{5(2p + 3v)(2pq + 3v) - 10v(3v + p^2 q)}},$$

$$a^* = k^{*2} (1 - v) / 6p k_1^2 v^2, \quad q = k_2^2 / k_1^2, \quad p = \frac{c_1 + q c_2}{v}, \quad v = 1 - c_3.$$

Применим формулы (1.13), (2.6) для расчета эффективного предела текучести двухфазной среды, компоненты которой являются пластически несжимаемыми. Полагая в выражениях (1.13), (2.6) $a_1 = a_2 = 0$, получаем величины $a^* \equiv 0$, откуда следует, что оба компонента являются макроскопически пластически несжимаемыми. Кроме того, имеют место соотношения

$$\alpha_1 = \alpha = 0,4, \quad \{k^2\} = \langle k^2 \rangle = c_1 k_1^2 + c_2 k_2^2,$$

$$m_s = k_s^2 / (c_1 k_1^2 + c_2 k_2^2), \quad A_1 = c_1 + \frac{5c_2 k_2^2}{5k_1^2 + 2(k_2^2 - k_1^2)},$$

$$A = \frac{5c_1 k_1^2}{2 + 5(m_1 - 1)} + \frac{5c_2 k_2^2}{2 + 5(m_2 - 1)}.$$

Макроскопическая поверхность текучести (1.12) принимает вид

$$\langle s_{ij} \rangle \langle s_{ij} \rangle = k^{*2},$$

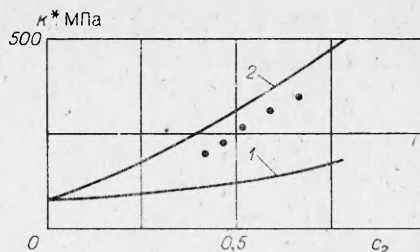
где

$$(2.8) \quad k^* = k_1 \sqrt{1 + \frac{5c_2 (k_2^2 - k_1^2)}{5k_1^2 + 2c_1 (k_2^2 - k_1^2)}}$$

— эффективный предел текучести композита с отдельными включениями;

$$(2.9) \quad k^* = \sqrt{c_1 k_1^2 + c_2 k_2^2} \dots \rightarrow$$

$$\dots \rightarrow \frac{2c_1 c_2 (k_2^3 - k_1^3)^2}{5(c_1 k_1^2 + c_2 k_2^2) + 2(c_1 - c_2)(k_2^3 - k_1^3)}$$



— эффективный предел текучести композиционного материала, образованного взаимопроникающими каркасами.

На фигуре приведено сравнение формул (2.8), (2.9) с экспериментальными данными измерения условного предела текучести композиции медная матрица — спеченный порошок вольфрама [6]. Кривая 1 соответствует формуле (2.8), 2 — формуле (2.9). Экспериментальные значения показаны точками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сараев Л. А. К теории идеальной пластичности композиционных материалов, учитывающей объемную сжимаемость. — ПМТФ, 1981, № 3.
2. Шермергор Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977.
3. Сараев Л. А. Сингулярное приближение в теории упругопластических сред с микроструктурой. — ПММ, 1983, вып. 3.
4. Сараев Л. А., Шермергор Т. Д. Сингулярное приближение теории вязкопластических микронеоднородных сред. — В кн.: Механизмы релаксационных явлений в твердых телах. Материалы VII Всесоюз. конф. Воронеж, 1981.
5. Сараев Л. А. К расчету макроскопических констант изотропных упругих тел с микроструктурой. — В кн.: Прочность и надежность конструкций. Куйбышев: Авиац. ин-т, 1981.
6. Крок Р. Неорганические порошковые композиции. — В кн.: Современные композиционные материалы. М.: Мир, 1970.

Поступила 29/VIII 1983 г.