

УДК 534.2:532

ЭВОЛЮЦИЯ МАЛОГО ИСКАЖЕНИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА ПРИ ЕГО СИЛЬНОМ РАСШИРЕНИИ-СЖАТИИ

А. А. Аганин, Т. С. Гусева

Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН, 420111 Казань
E-mails: aganin@kfti.knc.ru, guseva@kfti.knc.ru

На основе численных экспериментов проведен анализ эволюции малого искажения сферической формы газового пузырька, совершающего сильное радиальное расширение-сжатие в результате однократного колебания давления окружающей жидкости по гармоническому закону. Искажения сферической формы пузырька полагаются осесимметричными в виде отдельных сферических поверхностных гармоник с номерами 2–5. Учитываются колебания формы пузырька до начала расширения. В общем случае величина искажения в ходе расширения-сжатия пузырька зависит от фазы колебаний его формы в момент начала расширения (начальной фазы). Основное внимание уделяется изучению зависимости максимальных по начальной фазе искажений в некоторые характерные моменты расширения-сжатия пузырька от амплитуды внешнего возбуждения, вязкости жидкости, вида искажения (номера гармоники). Параметры задачи принимаются типичными для режима устойчивой периодической сонолюминесценции отдельного воздушного пузырька в воде при комнатной температуре. Исключение составляет лишь амплитуда колебаний давления жидкости, варьируемая до значений, в 5 раз превышающих статическое давление. Столь большие амплитуды возбуждения находятся за порогом устойчивости периодических колебаний сферического пузырька. Их рассмотрение представляет интерес с точки зрения повышения степени сжатия газа в пузырьке — повышения уровней максимальных температур и плотностей, достигаемых в конечной стадии сжатия.

Ключевые слова: динамика пузырька, искажение сферической формы, колебания, сонолюминесценция.

Введение. Многочисленные исследования периодической сонолюминесценции отдельного пузырька газа в жидкости показывают [1], что в момент максимального сжатия состояние газа в пузырьке характеризуется очень большими значениями плотности (10^3 кг/м³) и температуры (10^4 К), что и вызвало повышенный интерес к этому явлению. Усиление сжатия газа в режиме сонолюминесценции стало одним из основных направлений исследований. В частности, в [2] предложена относительно простая модель явления периодической сонолюминесценции и даны некоторые рекомендации по изменению экспериментальных условий с целью увеличения интенсивности периодической сонолюминесценции пузырька. Однако попытки повысить максимальные значения плотности и температуры газа в пузырьке в режиме периодических колебаний наталкиваются на различные ограничения устойчивости [1, 2]. Поэтому поиски возможностей повышения степени сжатия газа в пузырьке стали вестись и в других режимах колебаний пузырька, в том числе в режиме его сильных однократных расширений-сжатий, являющихся периодически неустойчивыми.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02-01-00100) в рамках программы ОЭМПУ РАН, федеральной целевой программы “Интеграция” (код проекта Б0020).

ми. Теоретические оценки с использованием сферически симметричных моделей показывают [3], что при таком режиме динамики пузырька максимальные значения давления и температуры газа значительно больше тех, которые достигаются в режиме периодической сонолюминесценции. Режим однократного сильного расширения-сжатия пузырька подразумевался в экспериментальной установке, схема которой предложена в [4]. Однако впервые он был реализован в работе [5], авторам которой удалось наблюдать выход нейтронов и ядер трития при ультразвуковом возбуждении (с амплитудой 15 бар) кластера пузырьков в дейтерированном ацетоне.

Результаты работы [5] вызвали продолжающуюся до сих пор оживленную дискуссию [6]. Ряд замечаний критиков связан с отсутствием оценок возможности сохранения сферической формы пузырька в момент его экстремального сжатия. Действительно, близость формы пузырька к сферической является одним из важнейших условий достижения высоких степеней сжатия газа в любом режиме радиальной динамики пузырька. Вопрос устойчивости сферической формы наиболее полно изучен для расширяющихся пузырьков, сжимающихся пузырьков и пузырьков, испытывающих периодические расширения-сжатия. При этом основное внимание уделялось определению границ устойчивости сферической формы пузырька. Довольно обширный перечень литературы приведен в [7, 8]. Для исследований применялись как аналитические [9–12], так и численные методы. Устойчивость сферических колебаний пузырька в режиме периодической сонолюминесценции изучалась в основном численно [8].

В настоящей работе изучается изменение малых искажений сферической формы пузырька в том случае, когда все параметры задачи соответствуют режиму периодической сонолюминесценции отдельного пузырька, а амплитуда колебаний давления жидкости намного (в 2–3 раза) больше. Периодические колебания сферического пузырька при таких амплитудах возбуждения являются неустойчивыми [13]. Поэтому рассматривается лишь однократное расширение-сжатие пузырька при однократном гармоническом колебании давления жидкости, которое начинается с фазы понижения. Предполагается, что до начала расширения поверхность пузырька совершает незатухающие колебания относительно сферы с собственной частотой, определяемой номером сферической гармоники, задающей вид искажения, плотностью жидкости, поверхностным натяжением и радиусом пузырька, который при этом не изменяется. Близкая ситуация возникает, например, в конце каждого периода колебаний пузырька в центре сферической колбы в режиме периодической сонолюминесценции, когда радиальные колебания пузырька уже практически отсутствуют, а его поверхность совершает затухающие колебания относительно сферы. При этом изменение давления в жидкости около пузырька, обеспечивающее его сильное расширение-сжатие, можно организовать на очередном периоде колебаний соответствующим импульсом давления на стенке колбы. Ситуация, близкая к указанной, возникает также после затухания радиальных колебаний пузырька, созданного лазерным пробоем в жидкости в центре сферической колбы. В этом случае последующее изменение давления жидкости возле пузырька можно вызвать падающей сферической волной, образованной соответствующим импульсом давления на стенке колбы. В постановке задачи настоящей работы момент начала расширения пузырька по отношению к фазе колебаний его формы (начальной фазе) считается произвольным. Основное внимание уделяется изучению изменения искажений, являющихся по начальной фазе максимальными. Затухание колебаний поверхности пузырька до начала расширения не учитывается. В результате этого максимальные по фазе искажения могут оказаться несколько завышенными.

Ввиду малых размеров пузырька значительное внимание уделяется влиянию вязкости жидкости. При этом используются модель [14] и ее упрощенный вариант без учета вихревого движения жидкости.

1. Математическая постановка задачи. Газовый пузырек находится в центре сферического объема жидкости. До начала импульсного воздействия радиус пузырька не изменяется, а его поверхность совершает малые незатухающие колебания относительно сферического состояния. В произвольный (по отношению к фазе колебаний формы) момент времени на пузырек падает длинная сферическая волна такая, что давление окружающей жидкости совершает однократное гармоническое колебание с большой амплитудой, начиная с понижения. В результате изменения давления жидкости пузырек сначала сильно расширяется, а затем еще сильнее сжимается. Далее следует ряд быстро затухающих радиальных колебаний относительно небольшой амплитуды. Изучается изменение максимальных по начальной фазе искажений сферической формы пузырька в промежутке между началом расширения пузырька и моментом его первого экстремального сжатия в предположении, что искажения остаются малыми.

Уравнение межфазной границы в произвольный момент времени t в сферической системе координат r, θ, φ принимается в виде

$$r = R(t) \left[1 + \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon_i(t) P_i(\cos \theta) \right],$$

где R — радиус пузырька; $P_i(\cdot)$ — полином Лежандра степени i ; ε_i — соответствующее искажение сферической формы (внутри, где $\varepsilon_i P_i(\cos \theta) < 0$, и наружу, где $\varepsilon_i P_i(\cos \theta) > 0$). Здесь и далее в основном используются безразмерные величины. Размерные величины помечаются снизу звездочкой. В качестве основных единиц при обезразмеривании были выбраны плотность жидкости ρ_{0*} , начальный радиус пузырька R_{0*} и характерная скорость u_{0*} , определяемая выражением $\sqrt{p_{0*}/\rho_{0*}}$, где p_{0*} — статическое давление жидкости.

Искажения считаются малыми ($|\varepsilon_i| \ll 1$). В рамках этого предположения при учете вязкости жидкости согласно [14] искажение ε_i описывается уравнением

$$R\ddot{\varepsilon}_i + \left[5\dot{R} + \frac{2(i+1)(i+2)}{\text{Re} R} \right] \dot{\varepsilon}_i + \left[\frac{(i^2-1)(i+2)}{\text{We} R^2} + \frac{3\dot{R}^2}{R} + \frac{6i(i+1)\dot{R}}{\text{Re} R^2} - (i-2)\ddot{R} \right] \varepsilon_i + \frac{i(i+1)}{R} \left[\frac{T_i(R, t)}{\text{Re} R} + \frac{2(2i+1)R^{i-2}\alpha_i}{\text{Re}} + \frac{\dot{R}}{R} \beta_i \right] = 0, \quad (1)$$

$$\alpha_i = -\frac{i+1}{2i+1} \int_R^{\infty} T_i(r, t) r^{-i} dr, \quad \beta_i = \int_R^{\infty} \left[\left(\frac{R}{r} \right)^3 - 1 \right] \left(\frac{R}{r} \right)^i T_i(r, t) dr,$$

где $\text{Re} = u_{0*} R_{0*} / \nu_*$; ν_* — кинематическая вязкость жидкости; $\text{We} = u_{0*}^2 \rho_{0*} R_{0*} / \sigma_*$; σ_* — коэффициент поверхностного натяжения. Функция $T_i(r, t)$ характеризует вихревое движение жидкости. Она связана с вектором скорости жидкости \mathbf{u} выражением

$$\nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times \left(\sum_{i=2}^{\infty} T_i(r, t) P_i(\cos \theta) \right) \mathbf{e}_1,$$

где \mathbf{e}_1 — направляющий вектор координатной линии r . Функция $T_i(r, t)$ определяется из уравнения

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} + \dot{R} R^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{T_i}{r^2} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{i(i+1)T_i}{r^2} - \frac{\partial^2 T_i}{\partial r^2} \right) = 0 \quad (2)$$

с граничными условиями

$$T_i(R, t) = 2\{(i+2)R\dot{\varepsilon}_i + 3\dot{R}\varepsilon_i + (2i+1)R^{i-1}\alpha_i\}/(i+1), \quad T_i(\infty, t) = 0. \quad (3)$$

Интегральные выражения α_i и β_i характеризуют совокупное влияние завихренности жидкости на колебания формы пузырька. В этом случае граничное условие (3) оказывается неявным. Как и в ряде других работ (см., например, [13]), учет вязкости жидкости согласно (1)–(3) будем далее называть точным.

Изменение радиуса пузырька R описывается уравнением, которое для безразмерных величин имеет следующий вид [15]:

$$\left(1 - \frac{\dot{R}}{c_0} + \frac{4}{\text{Re } c_0 R}\right) R \ddot{R} + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\dot{R}}{c_0}\right) \dot{R}^2 = \left(1 + \frac{\dot{R}}{c_0}\right) (p_b - p_\infty) + \frac{R}{c_0} (\dot{p}_b - \dot{p}_\infty) - \frac{4\dot{R}}{\text{Re } R} - \frac{2}{\text{We } R}, \quad (4)$$

где c_0 — скорость звука в жидкости; p_b, p_∞ — соответственно давление газа в пузырьке и давление жидкости на большом удалении от пузырька, определяемые выражениями

$$p_b = p_b^0 \left(\frac{1-A}{R^3-A}\right)^\gamma, \quad p_b^0 = 1 + \frac{2}{\text{We}}, \quad (5)$$

$$p_\infty = 1 - \Delta p \sin \omega t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi/\omega.$$

Здесь A — константа; $\Delta p, \omega$ — соответственно амплитуда и частота колебаний.

Принимается, что при $t < 0$

$$\varepsilon_i(t) = \varepsilon_i^0 \sin(\omega_i t + \varphi_0), \quad \omega_i = \sqrt{(i^2 - 1)(i + 2)/\text{We}},$$

а при $t = 0$

$$R(0) = 1, \quad \dot{R}(0) = 0, \quad \varepsilon_i(0) = \varepsilon_i^0 \sin \varphi_0, \quad \dot{\varepsilon}_i(0) = \dot{\varepsilon}_i^0 \cos \varphi_0, \quad \dot{\varepsilon}_i^0 = \varepsilon_i^0 \omega_i, \quad (6)$$

$$T_i(r, 0) = T_{i,\varphi_0}(r),$$

где ε_i^0 и ω_i — соответственно амплитуда и частота колебаний искажения сферической формы пузырька; $T_{i,\varphi_0}(r)$ — радиальное распределение функции T_i , соответствующее начальной фазе φ_0 . Начальная фаза φ_0 является произвольной ($-\infty < \varphi_0 < \infty$).

Применением метода конечных разностей для аппроксимации пространственных производных в уравнении (2) и квадратурных формул для аппроксимации интегралов в выражениях α_i и β_i задача (1)–(6) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $\dot{R}, \dot{\varepsilon}_i$ и сеточных значений функции $T_i(r, t)$. Одно из разностных уравнений для $T_i(r, t)$ следует из граничного условия (3). Решение полученной системы уравнений находится численно методом Dorman — Prince [16].

Задача рассматривается при $p_{0*} = 10^5$ Па, $\rho_{0*} = 1000$ кг/м³, $R_{0*} = 4,5$ мкм, $c_{0*} = 1500$ м/с, $\omega_*/(2\pi) = 26,5$ кГц, $\nu_* = 10^{-6}$ м²/с, $\sigma_* = 0,073$ Н/м, $A = 8,5^{-3}$, $\gamma = 1,4$, что соответствует характерному для режима периодической сонолюминесценции [1] случаю, когда воздушный пузырек находится в воде при комнатной температуре. В безразмерных переменных $c_0 = 150$, $\omega/(2\pi) \approx 1,2 \cdot 10^{-2}$, $\text{Re} = 45$, $\text{We} \approx 6$, $1,4 \leq \Delta p \leq 5$.

2. Влияние колебаний формы пузырька до начала расширения. Наиболее типичные временные зависимости радиуса пузырька и относительного искажения его сферической формы до и в ходе сильного однократного расширения-сжатия для рассматриваемых значений параметров задачи приведены на рис. 1. Точками 1–5 отмечены моменты времени t_{1-5} , среди которых t_1, t_2, t_4 являются характерными для решений уравнения (1), а t_3, t_5 соответствуют максимальному расширению и максимальному сжатию пузырька. В начале стадии расширения искажение сферической формы пузырька изменяется в режиме затухающих колебаний с возрастающим периодом. В момент t_1 изменение искажения

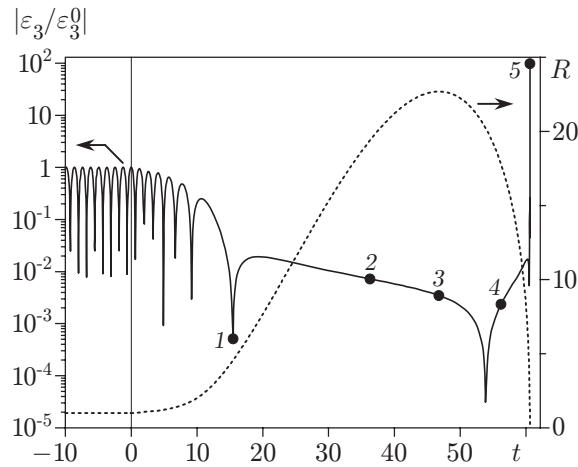


Рис. 1. Временные зависимости радиуса пузырька R и амплитуды относительного искажения его сферической формы $|\varepsilon_3/\varepsilon_3^0|$ для $\Delta p = 2$ без учета влияния вязкости на форму пузырька (точками 1–5 отмечен ряд характерных моментов времени)

переходит в режим затухания без колебаний (режим аperiодического затухания) и значительно замедляется. В интервале t_2-t_3 искажение вновь изменяется в режиме затухающих колебаний, но уже с очень большим периодом. Стадия сжатия пузырька начинается с медленного изменения искажения в режиме нарастающих колебаний. По мере роста скорости сжатия скорость изменения искажения быстро увеличивается. При этом в момент t_4 изменение искажения переходит в режим нарастания без колебаний (режим аperiодического роста). В этом режиме амплитуда искажения изменяется со все более возрастающей скоростью и несколькими очень резкими сменами направленности роста искажения: рост искажения внутрь пузырька сменяется его нарастанием наружу, и наоборот. На стадии ускоренного сжатия нарастание искажения сферической формы пузырька обусловлено неустойчивостью типа Биркгофа — Плессета [10, 11]. Особенно быстрое увеличение искажения имеет место на заключительном очень коротком отрезке замедляющегося сжатия пузырька. Это связано с проявлением неустойчивости типа Рэля — Тейлора [17, 11]. Указанные особенности изменения формы пузырька характерны для всех рассматриваемых номеров гармоник i на большей части диапазона $1,4 \leq \Delta p \leq 5$. Отметим, что в самом конце стадии сжатия используемая модель динамики пузырька может оказаться не вполне адекватной. В частности, здесь может стать значительным влияние сжимаемости жидкости около пузырька, которое в настоящей работе не учитывается. Поэтому результаты, относящиеся к моменту максимального сжатия (коллапса) пузырька, следует рассматривать как некоторую оценку.

На рис. 2 приведены зависимости относительного искажения $\varepsilon_2/\varepsilon_2^0$ в момент коллапса пузырька от амплитуды изменения давления Δp без учета влияния вязкости жидкости на изменение формы пузырька. Видно, что имеет место сильная зависимость величины искажения от φ_0 . Так, при $\Delta p \approx 3$ искажение в момент коллапса для $\varphi_0 = \pi/2$ близко к нулю, а для $\varphi_0 = 0$ превышает начальное приблизительно в 80 раз. Сильная зависимость величины искажения от φ_0 наблюдается и в другие моменты расширения-сжатия. Она сохраняется и при учете вязкости жидкости.

В дальнейшем рассматривается изменение искажения $\varepsilon_{im}(t)$, являющегося в момент времени t максимальным среди множества значений $\varepsilon_i(t)$, соответствующих $-\infty < \varphi_0 < \infty$. Параметр $\varepsilon_{im}(t)$ называется для краткости максимальным искажением. Исполни-

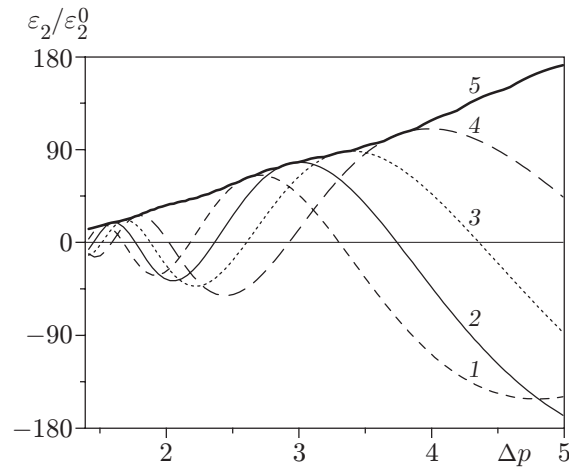


Рис. 2. Зависимости относительного искажения сферической формы пузырька $\varepsilon_2/\varepsilon_2^0$ при $\varphi_0 = -\pi/4; 0; \pi/4; \pi/2$ (кривые 1–4 соответственно) и максимального по φ_0 относительного искажения сферической формы $\varepsilon_{2mc}/\varepsilon_2^0$ (кривая 5) от Δp в момент коллапса без учета влияния вязкости на форму пузырька

зуются обозначения: $\varepsilon_{imm} = \varepsilon_{im}(t_m)$, $\varepsilon_{imc} = \varepsilon_{im}(t_c)$, где t_m , t_c — соответственно моменты максимального расширения и максимального сжатия пузырька. С учетом периодичности по φ_0 множество $-\infty < \varphi_0 < \infty$ в расчетах заменяется дискретным множеством точек Φ_0 на полупериоде $-\pi/2 \leq \varphi_0 \leq \pi/2$. На рис. 2 зависимость относительного максимального искажения в момент $t = t_c$ представлена кривой 5. Видно, что она существенно отличается от кривых 1–4, в частности, тем, что ее значения всюду положительны и монотонно возрастают.

3. Зависимость максимальных искажений от радиального движения.

Для оценки влияния радиальной динамики пузырька на изменение его формы в ходе расширения-сжатия используется постановка задачи без учета влияния вязкости жидкости на искажение. При этом (1) сводится к уравнению

$$R\ddot{\varepsilon}_i + 5\dot{R}\dot{\varepsilon}_i + \left[\frac{(i^2 - 1)(i + 2)}{We R^2} + \frac{3\dot{R}^2}{R} - (i - 2)\ddot{R} \right] \varepsilon_i = 0. \quad (7)$$

При использовании (7) в случае $i = 2$ режим аperiодического затухания на стадии расширения пузырька возникает при всех Δp в диапазоне $1,4 \leq \Delta p \leq 5$, а для $i = 3, 4, 5$ он отсутствует при $\Delta p < 1,5, 1,8, 2,1$ соответственно.

На рис. 3,а показаны зависимости отношения $\varepsilon_i^0/\varepsilon_{imm}$, характеризующего степень затухания максимальных искажений на стадии расширения (ε_i^0 — максимальное начальное искажение), от амплитуды Δp для разных значений i . При $\Delta p = 1,4$ значения $\varepsilon_i^0/\varepsilon_{imm}$ для всех i близки. С увеличением Δp до 1,9, 2,3, 3,1 для гармоник $i = 3, 4, 5$ соответственно наблюдается более значительное, чем для $i = 2$, нарастание степени затухания, причем для $i \geq 3$ в указанных интервалах она изменяется почти одинаково. При дальнейшем увеличении Δp , когда на стадии расширения для $i \geq 3$ уже наблюдается достаточно продолжительный аperiодический режим, степень затухания при $i = 2$ продолжает увеличиваться, а при $i \geq 3$ либо остается постоянной ($i = 3$), либо монотонно уменьшается ($i = 4, 5$). Таким образом, с увеличением номера гармоники i характер зависимости степени затухания $\varepsilon_i^0/\varepsilon_{imm}$ от амплитуды возбуждения Δp изменяется. Если для $i = 2$ она является монотонно возрастающей, то по мере увеличения i монотонность возрастания постепенно нарушается. Для $i = 5$ при $\Delta p \approx 3$ уже наблюдается четко выраженный максимум. Наи-

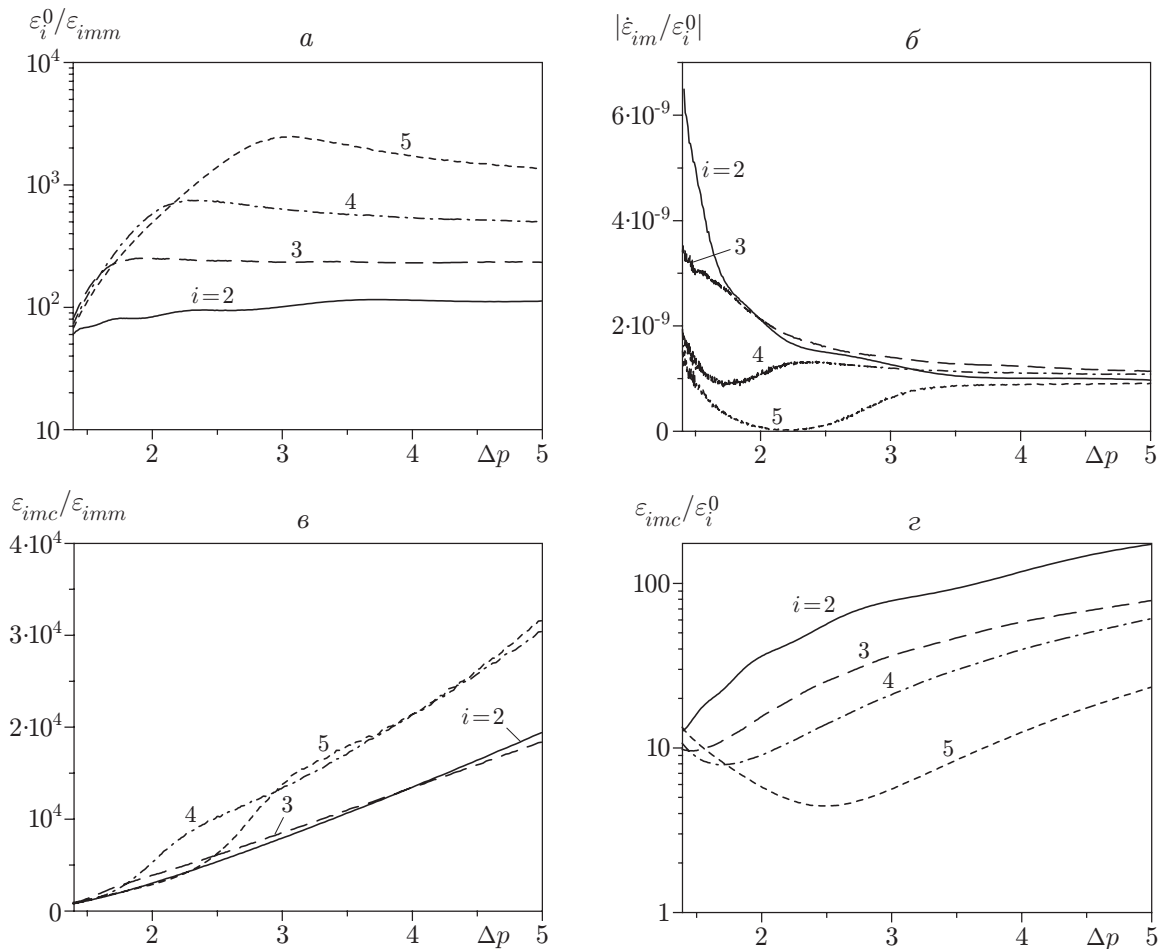


Рис. 3. Зависимости степени затухания максимальных искажений на стадии расширения пузырька $\varepsilon_i^0/\varepsilon_{imm}$ (а), модуля относительной скорости изменения максимального искажения в конце стадии расширения $|\dot{\varepsilon}_{im}/\varepsilon_i^0|$ (б), степени нарастания максимальных искажений на стадии сжатия $\varepsilon_{imc}/\varepsilon_{imm}$ (в) и в ходе всего расширения-сжатия $\varepsilon_{imc}/\varepsilon_i^0$ (г) от Δp для гармоник $i = 2-5$

меньшее затухание максимальных искажений в интервале $1,4 \leq \Delta p \leq 5$ наблюдается для $i = 2$: приблизительно в 60 раз при малых Δp и почти в 110 раз — при больших. С ростом номера гармоники i на большей части рассматриваемого диапазона изменения Δp степень затухания максимальных искажений на стадии расширения возрастает. В частности, при $\Delta p = 5$ она увеличивается от ≈ 110 ($i = 2$) до $\approx 230, 500, 1400$ ($i = 3, 4, 5$).

Скорость изменения максимального искажения в момент t_m (т. е. в начале стадии сжатия) в диапазоне $1,4 \leq \Delta p \leq 5$ при $i = 2$ монотонно уменьшается (рис. 3,б). Для $i = 4, 5$ при малых Δp там, где режим аperiодического затухания отсутствует, она также уменьшается. Затем в интервалах $1,8 < \Delta p < 2,3$ для $i = 4$ и $2,2 < \Delta p < 3,3$ для $i = 5$, где на стадии расширения уже появляется непродолжительный аperiодический режим, значение $|\dot{\varepsilon}_{im}/\varepsilon_i^0|$ заметно возрастает. При дальнейшем увеличении Δp для $i = 4, 5$ скорость изменения максимальных искажений в конце фазы расширения либо уменьшается ($i = 4$), как и при $i = 2, 3$, либо незначительно возрастает ($i = 5$). На заключительном отрезке $4 \leq \Delta p \leq 5$ ее значения при всех i оказываются близкими.

На рис. 3,в приведены зависимости отношения $\varepsilon_{imc}/\varepsilon_{imm}$ от Δp для разных значений i . Это отношение характеризует степень нарастания максимальных искажений на стадии сжатия пузырька. Как видно из рис. 3,а,в, во всем диапазоне $1,4 \leq \Delta p \leq 5$ и при всех i отношение $\varepsilon_{imc}/\varepsilon_{imm}$ превышает $\varepsilon_i^0/\varepsilon_{imm}$, т. е. нарастание максимальных искажений при сжатии превышает их затухание при расширении. В области малых Δp значения $\varepsilon_{imc}/\varepsilon_{imm}$ для $i = 2-5$ оказываются близкими, в частности, при $\Delta p = 1,4$ $\varepsilon_{imc}/\varepsilon_{imm} \approx 800$. С увеличением Δp степень нарастания максимальных искажений при сжатии $\varepsilon_{imc}/\varepsilon_{imm}$ для $i = 2, 3$ повышается приблизительно до $2 \cdot 10^4$ при $\Delta p = 5$ по закону, близкому к линейному. В случаях $i = 4, 5$ в тех интервалах Δp , где наблюдается рост скоростей изменения максимальных искажений в начале стадии сжатия $|\dot{\varepsilon}_{im}/\varepsilon_i^0|$ (см. рис. 3,б), отношение $\varepsilon_{imc}/\varepsilon_{imm}$ увеличивается значительно быстрее. В конце этих интервалов повышение степени нарастания максимальных искажений при сжатии $\varepsilon_{imc}/\varepsilon_{imm}$ замедляется и до конца рассматриваемого диапазона изменения Δp происходит почти так же, как и при $i = 2, 3$. При этом значения $\varepsilon_{imc}/\varepsilon_{imm}$ для $i = 4, 5$ оказываются близкими и приблизительно в 1,6–1,7 раза превышают значения этого отношения для $i = 2, 3$.

На рис. 3,г для $i = 2-5$ представлены зависимости от Δp отношения $\varepsilon_{imc}/\varepsilon_i^0$, характеризующего степень нарастания максимальных искажений в ходе всего расширения-сжатия пузырька от начального момента расширения $t = 0$ до момента максимального сжатия (коллапса) $t = t_c$. Величина $\varepsilon_{imc}/\varepsilon_i^0$ определяется соотношением степеней затухания максимальных искажений при расширении и нарастания при сжатии. Наибольшие значения $\varepsilon_{imc}/\varepsilon_i^0$ соответствуют гармонике с номером $i = 2$, для которой наблюдается наименьшее затухание максимальных искажений на стадии расширения. Значение $\varepsilon_{2mc}/\varepsilon_2^0$ монотонно возрастает от приблизительно 12,3 в начале диапазона изменения Δp до почти 170 в конце. С увеличением i монотонность возрастания $\varepsilon_{imc}/\varepsilon_i^0$ все более нарушается. В области малых Δp увеличение степени затухания искажения на стадии расширения с ростом Δp превышает увеличение степени нарастания при сжатии (при $i = 3$ они почти компенсируют друг друга), поэтому там степень нарастания максимальных искажений к моменту коллапса $\varepsilon_{imc}/\varepsilon_i^0$ при $i = 4, 5$ убывает. В окрестности значений $\Delta p \approx 1,8$ при $i = 4$ и $\Delta p \approx 2,4$ при $i = 5$ повышение степени нарастания максимальных искажений при сжатии $\varepsilon_{imc}/\varepsilon_{imm}$ заметно ускоряется (см. рис. 3,в), чем и обусловлено наличие в зависимости $\varepsilon_{imc}/\varepsilon_i^0$ от Δp четко выраженных минимумов, после которых степень нарастания максимальных искажений при расширении-сжатии $\varepsilon_{imc}/\varepsilon_i^0$ монотонно повышается. В дальнейшем ее рост отчасти определяется уменьшением степени затухания максимальных искажений при расширении (рис. 3,а).

При $\Delta p > 1,8$ с ростом номера гармоники i степень увеличения максимальных искажений в ходе расширения-сжатия пузырька уменьшается. В частности, при $\Delta p = 5$ она уменьшается с ≈ 170 для $i = 2$ до $\approx 80, 61, 23$ для $i = 3, 4, 5$ соответственно.

4. Зависимость максимальных искажений от вязкости жидкости. Для анализа влияния вязкости жидкости на искажение сферической формы пузырька используются решения рассматриваемой задачи, полученные при точном его учете (уравнения (1)–(3)), полном пренебрежении им (уравнение (7)), а также без учета вихревого движения жидкости, когда система (1)–(3) сводится к уравнению

$$R\ddot{\varepsilon}_i + \left[5\dot{R} + \frac{2(i+1)(i+2)}{\text{Re } R} \right] \dot{\varepsilon}_i + \left[\frac{(i^2-1)(i+2)}{\text{Re } R^2} + \frac{3\dot{R}^2}{R} + \frac{6i(i+1)\dot{R}}{\text{Re } R^2} - (i-2)\ddot{R} \right] \varepsilon_i = 0. \quad (8)$$

Приближенный учет влияния вязкости жидкости (8) приводит лишь к незначительному изменению указанных выше для уравнения (7) значений Δp , при которых для $i = 3, 4, 5$ на стадии расширения пузырька появляется режим аperiodического затухания.

На рис. 4 представлены результаты расчетов с использованием уравнений (1)–(3) (сплошные кривые) и (8) (штриховые кривые). Волнообразный характер зависимостей

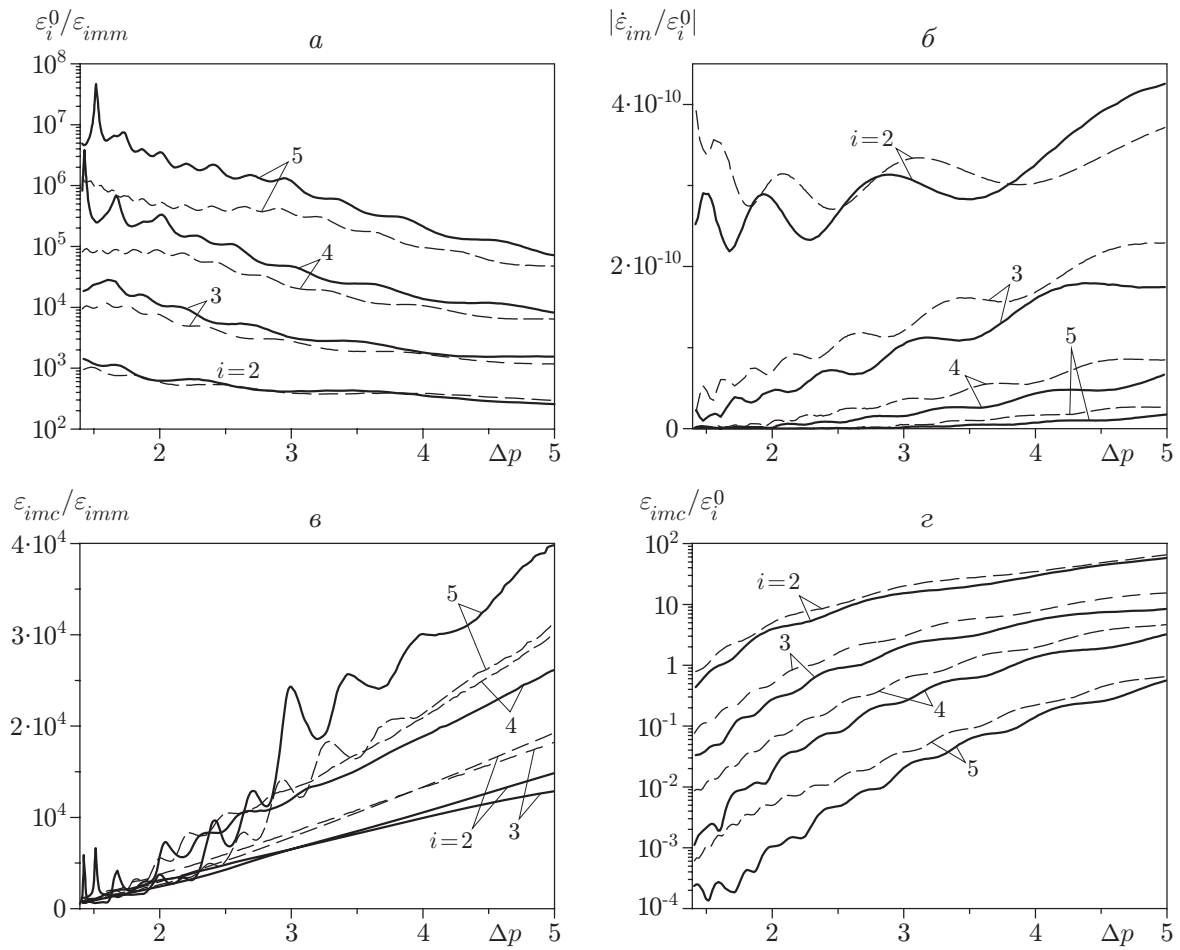


Рис. 4. То же, что и на рис. 3, но с точным учетом влияния вязкости жидкости на форму пузырька (сплошные кривые) и его приближенным описанием без учета вихревого движения жидкости (штриховые кривые)

обусловлен несовпадением частоты колебаний формы пузырька при $t < 0$ с частотой затухающих колебаний в начале фазы расширения, а при точном учете вязкости в случаях $i = 4, 5$ при малых Δp еще и влиянием вихревого движения жидкости. Последнее оказывается значительным в конце режима затухающих колебаний на стадии расширения. Вихревое движение здесь препятствует нарастанию искажений сферической формы пузырька с отклонениями от нее в ту же сторону (внутри или вовне пузырька), что и у начального искажения, и затуханию искажений, в этом отношении им противоположных.

Из сравнения результатов, представленных на рис. 3,а и 4,а, можно заключить, что влияние вязкости жидкости приводит к сильному повышению степени затухания максимальных искажений на стадии расширения пузырька $\varepsilon_i^0/\varepsilon_{imm}$ для всех номеров гармоник i . При этом минимальное повышение степени затухания имеет место при $i = 2$ и по мере увеличения Δp значительно убывает. Так, при точном учете влияния вязкости степень затухания $\varepsilon_2^0/\varepsilon_{2mm}$ оказывается больше, чем без учета вязкости, почти в 24 раза при $\Delta p = 1,4$ и приблизительно в 2,2 раза при $\Delta p = 5$. Вклад вихревого движения жидкости оказывается сравнительно небольшим и с увеличением Δp также убывает. Пренебрежение вихревым движением приводит к изменению степени затухания $\varepsilon_2^0/\varepsilon_{2mm}$ от $\approx 30\%$ при малых Δp до $\approx 15\%$ при больших.

С увеличением номера гармоники i влияние вязкости жидкости при расширении пузырька становится еще более существенным, особенно в области малых Δp . Возрастает и влияние вихревого движения жидкости. Так, в случае $i = 5$ степень затухания $\varepsilon_i^0/\varepsilon_{imm}$ при точном учете вязкости оказывается больше, чем без учета вязкости, в $\approx 7 \cdot 10^4$ раз при $\Delta p = 1,4$ и в ≈ 50 раз при $\Delta p = 5$, а также больше, чем в случае пренебрежения вихревым движением, в $\approx 3,5$ раза при $\Delta p = 1,4$ и в $\approx 1,5$ раза при $\Delta p = 5$. Особенно заметные при $i = 4, 5$ “пики” зависимостей $\varepsilon_i^0/\varepsilon_{imm}$ в начале диапазона изменения Δp обусловлены влиянием вихревого движения жидкости.

Как видно из рис. 4,б, и точный, и приближенный способы учета вязкости жидкости приводят к существенному уменьшению скорости изменения максимальных искажений в момент максимального расширения пузырька $|\dot{\varepsilon}_{im}/\varepsilon_i^0|$. В то же время в отличие от случая невязкой жидкости среднее значение скорости $|\dot{\varepsilon}_{im}/\varepsilon_i^0|$ для $i = 2, 3$ с ростом Δp увеличивается (за исключением гармоники $i = 2$ без учета вихревого движения в области малых Δp). При $i = 4, 5$ в области малых Δp , где режим аperiodического затухания отсутствует, среднее значение величины $|\dot{\varepsilon}_{im}/\varepsilon_i^0|$ остается практически постоянным, а ее увеличение начинается при тех значениях Δp , когда на стадии расширения появляется режим аperiodического затухания искажения.

Из сравнения рис. 3,в и 4,в можно заключить, что на стадии сжатия пузырька влияние вязкости жидкости не столь значительно, как при расширении. При этом в отличие от стадии расширения оно проявляется главным образом за счет вихревого движения жидкости. Так, в случае $i = 2$ при точном учете вязкости степень нарастания максимальных искажений при сжатии $\varepsilon_{imc}/\varepsilon_{imm}$ составляет $\approx 6 \cdot 10^2$ при $\Delta p = 1,4$ и $\approx 1,5 \cdot 10^4$ при $\Delta p = 5$, что приблизительно в 1,3 раза меньше, чем без учета вязкости. В то же время зависимости $\varepsilon_{2mc}/\varepsilon_{2mm}$ от Δp , полученные без учета вихревого движения (уравнение (8)) и при полном пренебрежении вязкостью (уравнение (7)), различаются незначительно. Почти то же самое наблюдается и при $i = 3$ во всем интервале $1,4 \leq \Delta p \leq 5$, а также при $i = 4, 5$ в области больших Δp .

Интересно, что при $i = 2-4$ на большей части рассматриваемого диапазона изменения Δp влияние вихревого движения жидкости на стадии сжатия приводит к понижению степени нарастания максимальных искажений $\varepsilon_{imc}/\varepsilon_{imm}$, а в случае $i = 5$ — наоборот, к ее повышению, что особенно выражено при больших Δp . Так, при $\Delta p = 5$ значение $\varepsilon_{5mc}/\varepsilon_{5mm}$ при точном учете вязкости на $\approx 20\%$ больше, чем с ее учетом в пренебрежении влиянием вихревого движения жидкости.

Примечательно также то, что при точном (уравнения (1)–(3)) и приближенном (уравнение (8)) способах учета вязкости жидкости при малых Δp и в средней части интервала $1,4 \leq \Delta p \leq 5$ характер изменения $\varepsilon_{imc}/\varepsilon_{imm}$ для гармоник $i = 4, 5$ более немонотонный, чем для $i = 2, 3$. Появление “пиков” в области малых Δp при точном учете вязкости жидкости обусловлено наличием “пиков” у соответствующих зависимостей $\varepsilon_i^0/\varepsilon_{imm}$ (см. рис. 4,а). В средней части интервала Δp , а именно там, где отношение $\varepsilon_{imc}/\varepsilon_{imm}$, как и в случае без учета вязкости, растет быстрее, указанная немонотонность обусловлена немонотонной зависимостью фазы колебаний максимального искажения в момент t_m от Δp .

Степень нарастания максимальных искажений в ходе расширения-сжатия $\varepsilon_{imc}/\varepsilon_i^0$ во всем рассматриваемом диапазоне изменения Δp для всех $i = 2-5$ при точном учете вязкости жидкости оказывается несколько меньше, чем без учета ее вихревого движения, и значительно меньше, чем при полном пренебрежении вязкостью (см. рис. 3,з, 4,з). Если не учитывать волнообразный характер соответствующих зависимостей на рис. 4,з, то можно заключить, что указанные различия с ростом Δp уменьшаются, а с увеличением i , наоборот, возрастают. В частности, при $\Delta p = 1,4$ и $i = 5$ пренебрежение только вихревым движением жидкости приводит к завышению значения $\varepsilon_{imc}/\varepsilon_i^0$ приблизительно в 2,5 ра-

за, а полное пренебрежение вязкостью — почти в $5,5 \cdot 10^4$ раз. При $\Delta p = 5$ и $i = 2$ это завышение уменьшается до почти 1,1 и 3 раз соответственно.

Таким образом, согласно рис. 4,г в рассматриваемом интервале $1,4 \leq \Delta p \leq 5$ при точном учете вязкости нарастание максимальных искажений при расширении-сжатии пузырька имеет место только для $i = 2, 3, 4$ при $\Delta p > 1,6, 2,7, 3,9$ соответственно. В случае $i = 5$ максимальное искажение в момент коллапса оказывается всюду меньше начального. Наибольшее значение степени нарастания максимальных искажений в ходе расширения-сжатия пузырька $\varepsilon_{imc}/\varepsilon_i^0 \approx 60$ достигается при $i = 2$ и $\Delta p = 5$.

Заключение. Изучены характер и степень изменения малого искажения сферической формы газового пузырька при его сильном однократном расширении-сжатии в жидкости в том случае, когда все параметры задачи соответствуют режиму периодической сонолюминесценции отдельного пузырька, а амплитуда колебаний давления жидкости намного (в 2–3 раза) больше. Периодические колебания сферического пузырька при таких амплитудах возбуждения неустойчивы. Исследование выполнено с учетом колебаний формы пузырька до начала расширения. Анализ изменения формы поверхности пузырька проводится на основе искажений, являющихся максимальными по начальной фазе.

Установлено, что искажение сферической формы пузырька сначала сильно уменьшается на стадии расширения, а затем на стадии сжатия сильно возрастает. При этом степень уменьшения максимального искажения на стадии расширения для всех рассмотренных номеров гармоник $i = 2–5$ с ростом амплитуды колебаний давления жидкости Δp понижается, а степень его возрастания при сжатии, наоборот, увеличивается. При увеличении номера гармоники i степень уменьшения максимального искажения на стадии расширения существенно повышается. В конечном счете степень нарастания искажения сферической формы пузырька в ходе его расширения-сжатия от начального момента расширения до момента максимального сжатия (коллапса) с ростом амплитуды колебаний давления жидкости Δp и уменьшением номера гармоники i в пределах рассмотренных диапазонов их изменения увеличивается.

Исследован эффект вязкости жидкости. На стадии расширения пузырька она значительно повышает степень уменьшения максимального искажения. При этом вклад обусловленного вязкостью вихревого движения жидкости оказывается здесь небольшим, особенно для малых i . Влияние вязкости на стадии сжатия пузырька гораздо менее существенно и определяется в основном вихревым движением жидкости. Здесь в зависимости от номера гармоники оно может способствовать как понижению, так и повышению степени нарастания максимального искажения. С увеличением Δp и уменьшением i влияние вязкости жидкости становится менее значительным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Barber B. P., Hiller R. A., Lofstedt R., et al. Defining the unknowns of sonoluminescence // Phys. Rep. 1997. V. 281. P. 65–143.
2. Hilgenfeldt S., Grossman S., Lohse D. Sonoluminescence light emission // Phys. Fluids. 1999. V. 11 (6). P. 1318–1330.
3. Aganin A. A., Ilgamov M. A. Dependence of bubble compression parameters on the external pressure // Dynamics of multiphase systems: Proc. Intern. conf. multiphase systems, Ufa, 2000. P. 269–274.
4. Simonenko V. A., Nogin V. N., Kucherenko Y. A., et al. Single bubble collapse: Physics and prospects // Ibid. P. 306–315.
5. Taleyarkhan R. P., West C. D., Cho J. S., et al. Evidence for nuclear emissions during acoustic cavitation // Science. 2002. V. 295. P. 1868–1873.

6. **Seife C.** “Bubble fusion” paper generates a tempest in a beaker // *Ibid.* P. 1808–1809.
7. **Аганин А. А., Ильгамов М. А.** Динамика пузырька газа в вязкой жидкости с немалыми искажениями сферической формы // *Динамика газовых пузырьков и аэрозолей.* Казань: Изд-во Казан. гос. ун-та, 2003. С. 7–22.
8. **Putterman S. J., Weninger K. R.** Somoluminescence: How bubbles turn sound into light // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2000. V. 32. P. 445–476.
9. **Андреев В. К.** Устойчивость неустановившихся движений жидкости со свободной границей. Новосибирск: Всерос. объединение Наука, 1992.
10. **Plesset M. S., Mitchell T. P.** On the stability of the spherical shape of a vapor cavity in a liquid // *Quart. J. Appl. Math.* 1956. V. 13 (4). P. 419–430.
11. **Воинов О. В., Перепелкин В. В.** Об устойчивости поверхности газового пузыря, пульсирующего в жидкости // *ПМТФ.* 1989. № 3. С. 76–83.
12. **Voinov O. V.** Breakdown of bubbles: non-linear mechanisms and effects // *Proc. of the Third Intern. conf. on Multiphase Flow, ICMF'98, Lyon, France, June 8–12, 1998.*
13. **Wu C. C., Roberts P. H.** Bubble shape instability and sonoluminescence // *Phys. Lett. A.* 1998. V. 250. P. 131–136.
14. **Prosperetti A.** Viscous effects on perturbed spherical flows // *Quart. Appl. Math.* 1977. V. 34. P. 339–352.
15. **Keller J. B., Miksis M.** Bubble oscillations of large amplitude // *J. Acous. Soc. Amer.* 1980. V. 68 (2). P. 628–633.
16. **Хайпер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г.** Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990.
17. **Taylor G.** The instability of liquid surfaces when accelerated is perpendicular to their planes // *Proc. Roy. Soc.* 1950. V. A201. P. 192.

*Поступила в редакцию 3/II 2004 г.,
в окончательном варианте — 10/VIII 2004 г.*
