

УДК 541.182.8

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОТОКА ГАЗА С ТВЕРДЫМИ ЧАСТИЦАМИ В СВЕРХЗВУКОВОМ СОПЛЕ

В. Н. Ветлущий, В. Л. Ганимедов, М. И. Мучная

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

E-mails: vetl@itam.nsc.ru, ganim@itam.nsc.ru, mim@itam.nsc.ru

В рамках модели Прандтля рассмотрено двухфазное течение в до-, транс- и сверхзвуковой частях сопла при больших числах Рейнольдса, т. е. весь поток разбивался на вязкое ядро и тонкий пограничный слой. Учитывалось взаимное влияние газа и твердых частиц. В ядре потока для газа решались уравнения Эйлера, в пристеночной области — уравнения пограничного слоя. Движение частиц описывалось с помощью подхода Лагранжа в вязкой области, при этом отслеживались траектории и температура пакетов частиц. В пограничном слое поведение частиц описывалось уравнениями Эйлера для осредненных по объему параметров частиц. Проведено сравнение расчетов распределений скорости частиц с экспериментами в плоском сопле. Отмечены явление фокусировки частиц на оси сопла при вводе их в дозвуковой части и вызванное этим существенное торможение потока в сверхзвуковой части сопла. Исследовано влияние различных граничных условий для потока частиц в вязкой области. Для осесимметричного сопла изучено влияние формы контура дозвуковой части, коэффициента загрузки частиц и их диаметра на параметры потока частиц в вязкой области и в пограничном слое.

Ключевые слова: двухфазное течение, вязкое течение в сопле, численные методы.

Введение. Различные течения газа с частицами исследованы в ряде работ, в которых поток газа описывался с помощью полных уравнений Навье — Стокса, уравнений Эйлера и пограничного слоя. Для изучения поведения частиц обычно используется подход Эйлера, когда все их параметры осредняются по элементарному объему. Однако в последнее время чаще применяется метод Лагранжа, в котором рассчитываются параметры каждой частицы или пакета частиц.

Течение в пограничном слое на плоской пластине при прохождении вдоль нее ударной волны рассмотрено в работах [1–3]. Движение газа описывалось уравнениями сжимаемого ламинарного пограничного слоя, а частиц — уравнениями Эйлера. Приведены профили скорости и температуры газа и частиц. В [3] выполнено сравнение с собственными экспериментами со стеклянными шариками и получено, что частицы диаметра 50 мкм концентрируются вблизи внешней границы пограничного слоя.

В работе [4] для газа и частиц использовались уравнения Эйлера. Показано, что уравнения для частиц являются вырожденными гиперболическими уравнениями и для их решения предложен специальный численный метод. Представлены расчеты течения в искривленном канале при вдуве частиц через боковую стенку. В [5, 6] течение газа рассчитывалось с помощью полных уравнений Навье — Стокса. Исследование двухфазного течения в ударной трубе выполнено с учетом подъемной силы для частиц.

Нестационарная задача расчета двухфазного потока за ударной волной при прохождении последней через запыленный газ в угле сжатия рассмотрена в работе [7]. Для описания движения обеих фаз использовались уравнения Эйлера. Показано, что с повышением концентрации пыли ударная волна тормозится сильнее и что плотность частиц за ударной

волной уменьшается со временем. Прохождение ударной волны через запыленный слой воздуха над плоской пластиной в рамках полных уравнений Навье — Стокса для газа и уравнений Эйлера для частиц анализировалось в работе [8]. Выявлено влияние подъемной силы на поведение частиц. В [9, 10] исследовалось прохождение ударной волны над плоской каверной. В обеих работах течение газа и частиц описывалось уравнениями Эйлера. Получено, что коэффициент загрузки и размер частиц оказывают существенное влияние на течение в каверне.

В работах [11–15] двухфазное течение в сверхзвуковых соплах рассматривалось в рамках уравнений Эйлера для обеих фаз. Предложены различные алгоритмы расчета как монодисперсных, так и полидисперсных течений, когда система уравнений для частиц является жесткой. Приведены примеры расчетов для различных конфигураций сопел при коэффициентах загрузки меньше единицы.

Работа [16] посвящена расчету истечения звуковой недорасширенной струи газа с частицами в затопленное пространство. Для газа использовались уравнения Эйлера, для частиц — уравнения Лагранжа. Предложен алгоритм расчета при наличии в потоке частиц различных размеров, а также алгоритм, учитывающий столкновение частиц. Представлены распределения скорости и температуры газа и частиц вдоль оси.

Теоретическое и экспериментальное исследование истечения несжимаемой турбулентной струи рассмотрено в [17]. Для расчета течения газа использовались параболизированные уравнения Навье — Стокса, а поведение стеклянных шариков в потоке определялось с помощью уравнений Лагранжа. Скорость частиц в струе измерялась методом ЛДИС. Показано, что в двухфазном потоке частицы ускоряют газ по сравнению с однофазным потоком.

В [18] методом ЛДИС выполнены измерения скорости частиц на оси сверхзвуковой части плоского сопла. Измерения скорости газа без частиц проводились методом ЛДИС и с помощью трубки Пито. В опытах использовались частицы из различных материалов, их диаметры различались почти на порядок, а плотность вещества и коэффициент загрузки — более чем на порядок.

В настоящей работе рассмотрено течение газа с твердыми частицами в сверхзвуковом сопле. Предполагалось, что число Рейнольдса достаточно велико и толщина пограничного слоя достаточно мала, чтобы весь поток можно было разбить на невязкое ядро и тонкий пограничный слой. В первой области течение газа описывалось уравнениями Эйлера, а движение частиц — с помощью подхода Лагранжа. Взаимодействие газа и частиц учитывалось при тех же предположениях, что и в названных выше работах: химические реакции между газом и частицами отсутствуют; в силу малой объемной концентрации частиц их траектории не пересекаются и они друг с другом не взаимодействуют; все частицы — твердые шарики одинакового диаметра и с постоянной температурой по сечению; каждая частица имеет собственную траекторию; броуновским движением частиц и силой тяжести пренебрегается; взаимодействие частиц и газа определяется только силой сопротивления и теплообменом. Во второй области использовались уравнения пограничного слоя для газа и уравнения Эйлера для частиц, параметры которых осреднены по элементарному объему (частицы рассматривались как сплошная среда). При этом рассчитанные в невязкой области значения параметров газа и частиц задавались в качестве условий на внешней границе пограничного слоя.

Невязкое течение в сопле. Рассматривается течение газа с твердыми частицами в до-, транс- и сверхзвуковых областях сопла с заданным контуром $r = R(x)$, радиус критического сечения которого обозначен через R_* . Для газа дивергентная форма уравнений

Эйлера в переменных $\xi = x/R_*$, $\eta = r/R(x)$ имеет вид [16]

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} (J^{-1}F) + \frac{\partial}{\partial \eta} (J^{-1}G) = -J^{-1} \left(\omega \frac{G'}{r} + \nu F_p \right). \quad (1)$$

Значение параметра $\omega = 1$ соответствует осесимметричному течению и $\omega = 0$ — плоскому, параметр $\nu = 1$ отвечает двухфазному потоку и $\nu = 0$ — однофазному. Здесь также использованы следующие обозначения:

$$W = J^{-1} \begin{vmatrix} \rho \\ m \\ n \\ e \end{vmatrix}, \quad F = \begin{vmatrix} \tilde{m} \\ (m/\rho)\tilde{m} + \xi_x p \\ (n/\rho)\tilde{m} + \xi_r p \\ ((e+p)/\rho)\tilde{m} \end{vmatrix}, \quad G = \begin{vmatrix} \tilde{n} \\ (m/\rho)\tilde{n} + \eta_x p \\ (n/\rho)\tilde{n} + \eta_r p \\ ((e+p)/\rho)\tilde{n} \end{vmatrix},$$

$$G' = \begin{vmatrix} n \\ nu \\ nv \\ ((e+p)/\rho)n \end{vmatrix}, \quad F_p = \begin{vmatrix} 0 \\ (F_{pt})_x \\ (F_{pt})_r \\ u(F_{pt})_x + v(F_{pt})_r + Q_{pt} \end{vmatrix},$$

$$m = \rho u, \quad n = \rho v, \quad \tilde{m} = \xi_x m + \xi_r n, \quad \tilde{n} = \eta_x m + \eta_r n,$$

$$e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{m^2 + n^2}{2\rho}, \quad J^{-1} = \begin{vmatrix} x_\xi & x_\eta \\ r_\xi & r_\eta \end{vmatrix}.$$

Параметры ρ , p , e , u , v — соответственно плотность, давление, полная энергия и компоненты скорости в декартовой (цилиндрической) системе координат x , r . Через J^{-1} обозначен якобиан преобразования координат, $(F_{pt})_x$, $(F_{pt})_r$ — компоненты вектора сил воздействия частиц на газ, параметр Q_{pt} характеризует теплообмен между частицами и газом. Все газодинамические параметры обезразмерены с помощью критической скорости звука a_* и критической плотности ρ_* .

Система уравнений (1) решалась при обычных условиях непротекания на стенке и симметрии на оси. Во входном цилиндрическом участке сопла поток газа полагался изоэнтропическим, параллельным оси при заданных давлении p_0 и температуре T_0 в форкамере. На выходе из сверхзвуковой части сопла граничные условия не ставились.

Движение частиц описывалось с помощью подхода Лагранжа. Для удобства расчетов частицы объединялись в пакеты с координатами ξ_m , η_m ($m = 1, 2, \dots, M$), в каждом из которых скорость и температура частиц полагались одинаковыми. Для пакета записывались следующие уравнения движения и теплообмена в безразмерном виде [16]:

$$\frac{d\xi_m}{dt} = u_m, \quad \frac{d\eta_m}{dt} = \frac{1}{R} (v_m - \eta_m R' u_m),$$

$$\frac{du_m}{dt} = \frac{3}{4} \frac{\rho}{\rho_{pt}} \frac{1}{D_{pt}} (C_D)_m (u - u_m) |\mathbf{U} - \mathbf{U}_m|,$$

$$\frac{dv_m}{dt} = \frac{3}{4} \frac{\rho}{\rho_{pt}} \frac{1}{D_{pt}} (C_D)_m (v - v_m) |\mathbf{U} - \mathbf{U}_m|, \quad (2)$$

$$\frac{dT_m}{dt} = 6\mu \frac{c_{pt}}{c_p} \frac{1}{\rho_{pt} \text{Re} D_{pt}^2} \frac{\text{Nu}_m}{\text{Pr}} (T - T_m).$$

Помимо описанных выше здесь использованы следующие обозначения: \mathbf{U} , \mathbf{U}_m — векторы скорости газа и m -го пакета частиц; μ — вязкость газа; c_p , c_{pt} — удельная теплоемкость газа и вещества частиц; D_{pt} , ρ_{pt} — диаметр и плотность вещества частиц; Re — число Рейнольдса, вычисленное по критическим параметрам газа и радиусу критического сечения.

Коэффициент сопротивления частиц C_D и число Нуссельта для частиц Nu определялись соотношениями:

$$(C_D)_m = \frac{24}{Re_m} \left(1 + \frac{Re_m^{2/3}}{6}\right) \quad \text{при} \quad Re_m < 1000, \quad (C_D)_m = 0,44 \quad \text{при} \quad Re_m > 1000,$$

$$Nu_m = 2 + 0,6 Re_m^{1/2} Pr^{1/3},$$

где Pr — число Прандтля для газа и $Re_m = \rho D_{pt} |\mathbf{U} - \mathbf{U}_m| Re / \mu$ — число Рейнольдса для частиц m -го пакета.

Предполагалось, что все частицы вводятся в некотором сечении сопла $\xi = \xi_0$ равномерно по сечению с заданной скоростью и температурой. Координата пакета в пределах счетной ячейки определялась с помощью датчика случайных чисел, количество частиц в пакете N_m — через коэффициент загрузки ψ , равный отношению массовых расходов частиц и газа.

Вид взаимодействия частиц со стенкой сопла может быть различным в зависимости от свойств частиц и внутренней поверхности сопла. В настоящей работе рассмотрены три варианта граничных условий на стенке: 1) условие прилипания, при котором все частицы, попадающие на стенку, из расчета удалялись; 2) условие неупругого взаимодействия, при котором частицы на стенке теряли нормальную компоненту скорости, и 3) условие упругого отражения, при котором знак нормальной компоненты скорости частиц менялся на противоположный. На оси сопла ставилось условие симметрии. Это означает, что если частица пересекает ось и уходит из рассматриваемой области, то вместо нее приходит частица с теми же параметрами, но с поперечной компонентой скорости противоположного знака. Граница на выходе из сопла свободна от граничных условий.

В случае неупругого взаимодействия частицы могут скапливаться вблизи стенки, а вблизи оси их концентрация может повышаться в силу фокусировки. Поведение частиц в такой области в рамках подхода сплошной среды, когда все параметры частиц осреднены по объему, рассмотрено в [21], где для твердой фазы введены понятия “пелены” и “шнура”. В настоящей работе справедливость допущения об отсутствии столкновения частиц между собой контролировалась по математической вероятности отсутствия столкновений P_0 [16]:

$$P_0 = \exp(-N_c \Delta t), \quad N_c = \frac{(2D_{pt})^2}{V_{jk}} \frac{\pi}{4} \sum_m N_m |\mathbf{U} - \mathbf{U}_m|, \quad (3)$$

где N_c — частота столкновений; V_{jk} — объем разностной ячейки; Δt — время пребывания частицы в данной ячейке. Системы уравнений (1) и (2) решались численно на конечно-разностной сетке с номерами ячеек j вдоль координаты ξ и номерами k вдоль координаты η . Тогда компоненты сил, действующих на газ со стороны частиц, и соответствующий тепловой поток могут быть записаны в виде [16]

$$(F_{pt})_x = \frac{\pi}{8V_{jk}} \rho D_{pt}^2 \sum_m N_m (u - u_m) (C_D)_m |\mathbf{U} - \mathbf{U}_m|,$$

$$(F_{pt})_r = \frac{\pi}{8V_{jk}} \rho D_{pt}^2 \sum_m N_m (v - v_m) (C_D)_m |\mathbf{U} - \mathbf{U}_m|,$$

$$Q_{pt} = \frac{\pi}{V_{jk}} \frac{\mu}{Re Pr} \sum_m N_m Nu_m D_{pt} (T - T_m).$$

Суммирование производится по всем пакетам, находящимся в этой ячейке.

Пространственная аппроксимация уравнений (1) выполнена на основе конечно-разностной TVD-схемы, предложенной в работе [19]. Эта схема обеспечивает второй порядок аппроксимации на гладких решениях. Поскольку она использует пятиточечный шаблон по каждой пространственной переменной, то для расчета в граничных узлах необходимо привлекать две точки за границей области. Значения искомым функций в этих

точках находились путем экстраполяции с учетом граничных условий. При этом на выходе из сопла ставились мягкие условия. Полученные уравнения с производными по времени решались с помощью пятишагового метода Рунге — Кутты [20], который обеспечивал второй порядок точности по времени. Система уравнений (2) интегрировалась методом Эйлера. Для вычисления правых частей газодинамические параметры аппроксимировались методом наименьших квадратов по их значениям в узлах эйлеровой сетки в точки с координатами ξ_m, η_m для каждого пакета.

Вся задача решалась последовательными приближениями. При известных значениях параметров частиц в точках области делалось несколько шагов по времени для уравнений газовой динамики. Затем при фиксированных значениях параметров газа делался один шаг для уравнений (2). Далее снова решались уравнения (1) при новых значениях параметров частиц, а затем опять решались уравнения (2). Этот процесс продолжался до тех пор, пока не устанавливался с заданной точностью баланс частиц в сечении их ввода, на выходе из сопла и осевших на стенке. Контролировалось и установление газодинамических параметров.

Работоспособность созданного алгоритма проверялась путем сравнения расчетов с результатами экспериментов [18]. Плоское сопло имело профилированную дозвуковую часть и прямолинейную сверхзвуковую с углом полураствора $5,5^\circ$. Давление в форкамере составляло 8 бар, температура — 260 К. Сначала рассчитывалось распределение скорости газа на оси сопла в потоке без частиц и сравнивалось с экспериментом. Скорость газа измерялась трубкой Пито. Расхождение расчета и эксперимента не превышало 4 %.

Следующее сопоставление выполнено для течения в том же сопле, но с вводом частиц при температуре 293 К в цилиндрической части сопла со скоростью, равной местной скорости газа. Использовались частицы различных веществ, размеров и разные коэффициенты загрузки. В расчетах в качестве граничных условий для частиц на стенке выбрано условие прилипания. Скорость частиц измерялась методом ЛДИС. Расчетные и экспериментальные значения скорости частиц приведены на рис. 1 (на этом и следующих графиках вертикальная риска при $\xi = 19$ соответствует критическому сечению). Наилучшее согласие

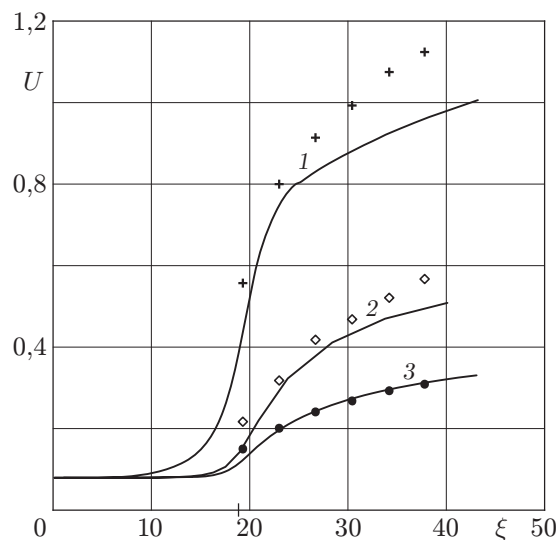


Рис. 1. Расчетные (линии) и экспериментальные (точки) распределения скорости частиц различных веществ на оси сопла:

1 — ликоподий ($D_{pt} = 25 \cdot 10^{-6}$ м, $\rho_{pt} = 500$ кг/м³, $\psi = 0,316$); 2 — оргстекло ($D_{pt} = 200 \cdot 10^{-6}$ м, $\rho_{pt} = 1200$ кг/м³, $\psi = 1,27$); 3 — бронза ($D_{pt} = 80 \cdot 10^{-6}$ м, $\rho_{pt} = 8600$ кг/м³, $\psi = 4,26$)

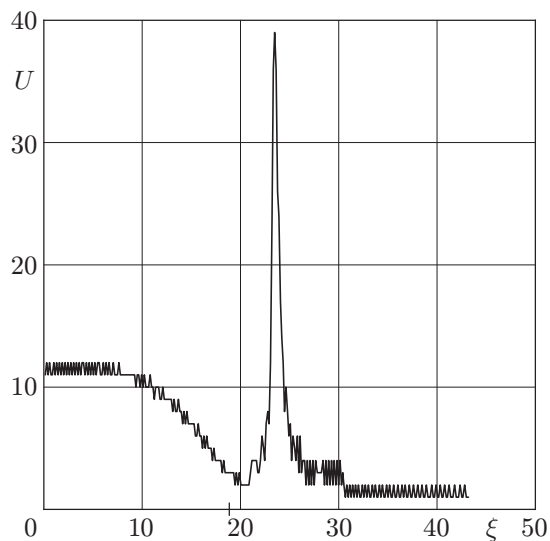


Рис. 2

Рис. 2. Распределение числа пакетов частиц бронзы на оси сопла

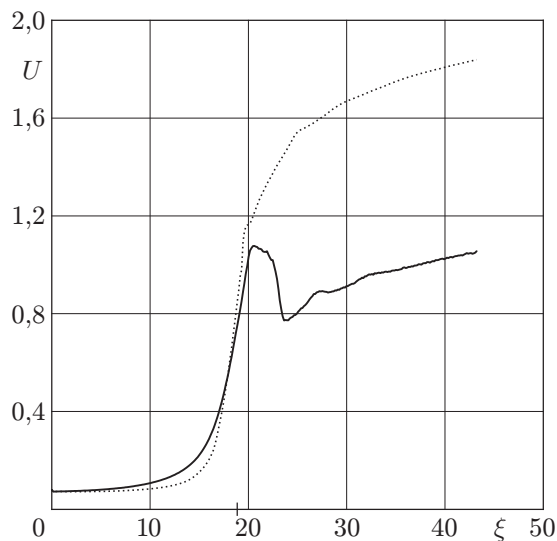


Рис. 3

Рис. 3. Распределение скорости газа на оси (сплошная линия) и на стенке сопла (пунктирная линия)

с экспериментами получено в расчетах для частиц бронзы (различие не превышало 8 %), несколько большее расхождение имело место для оргстекла (12 %) и наибольшее — для ликоподия (14 %). Последнее, вероятно, объясняется тем, что поверхность частиц ликоподия может сильно отличаться от сферы.

Все последующие расчеты выполнены для течений газа с частицами бронзы. На рис. 2 и 3 представлены результаты расчетов течения в том же сопле для частиц диаметром $D_{pt} = 5 \cdot 10^{-6}$ м с коэффициентом загрузки $\psi = 1,0$ при тех же определяющих газодинамических параметрах. Получено, что частицы, которые не выпали на стенке сопла, отходят от нее перед критическим сечением и далее направляются к оси, где их концентрация существенно повышается. Это явление иллюстрирует рис. 2, где приведено распределение плотности пакетов вдоль оси сопла. Видно, что при значении $\xi = 24$ эта величина возрастает на порядок по сравнению с ближайшими сечениями. Оценка вероятности отсутствия столкновений частиц по формуле (3) дала значение $P > 0,999$. Заметим, что для частиц большего размера вероятность столкновений будет еще меньше, поскольку частота столкновений N_c пропорциональна квадрату диаметра частиц.

Значительный рост концентрации частиц на оси вызывает заметное торможение потока газа в сверхзвуковой части, что демонстрирует рис. 3. Видно, что за критическим сечением скорость становится сверхзвуковой, а затем газ тормозится частицами до значения коэффициента скорости 0,8 и далее опять разгоняется до сверхзвуковой скорости. Поскольку частицы вблизи стенки отсутствуют, скорость газа здесь монотонно растет.

Взаимодействие частиц с поверхностью сопла зависит от их механических свойств, формы, температуры и других факторов. Этот вопрос в работе не рассматривался, а исследовалось влияние различных граничных условий на стенке на течение газа и частиц в сопле. Для этого выполнены три варианта расчетов для приведенных ранее определяющих параметров (кроме коэффициента загрузки, равного здесь $\psi = 0,5$): I — условие прилипания, II — условие неупругого взаимодействия и III — условие упругого отражения. Расчеты показали, что распределения скорости и температуры газа и частиц в вариантах II

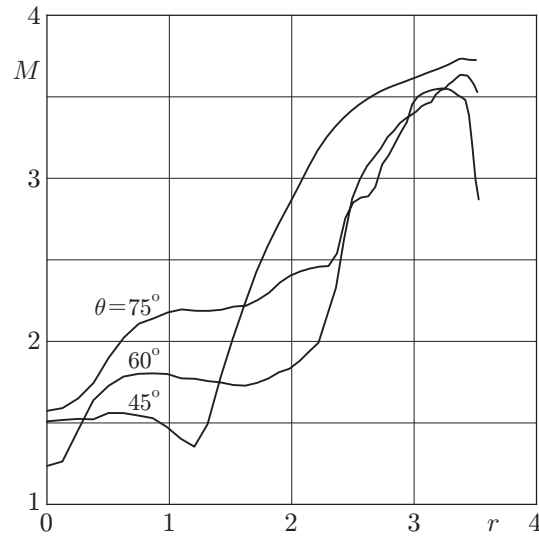


Рис. 4. Распределение числа Маха на выходе из сопла при различных углах полураствора его дозвуковой части

и III практически не различаются. В варианте I в сверхзвуковой части скорость частиц несколько выше, а температура ниже, чем в двух других. Такое расхождение объясняется тем, что в первом варианте некоторые частицы осели на стенке и в сверхзвуковой части сопла их осталось меньше, чем в двух последних вариантах.

Оказалось, что более значительное влияние граничные условия для частиц на стенке оказывают на распределение скорости и температуры частиц на срезе сопла. Граница потока частиц в первых двух вариантах составляет менее половины высоты сопла, тогда как в последнем — две трети. Кроме того, во втором варианте скорость и температура частиц практически постоянны примерно на расстоянии одной трети от оси сопла.

Влияние дозвуковой части сопла, диаметра частиц и коэффициента загрузки рассмотрено на примере осесимметричного сопла с конической сверхзвуковой частью, углом полураствора 15° и радиусом критического сечения $R_* = 0,01$ м. Давление в форкамере задано равным 20 бар, температура — 500 К, температура частиц на входе в сопло — 293 К, их скорость задана равной скорости газа на оси во входном сечении сопла. Угол полураствора конической дозвуковой части изменялся в диапазоне $\theta = 30 \div 75^\circ$, диаметр частиц $D_{pt} = 25 \div 100$ мкм, коэффициент загрузки $\psi = 0,2 \div 1,0$. На границе бралось условие неупругого взаимодействия. На рис. 4 приведено распределение числа Маха на срезе сопла при значениях $D_{pt} = 100$ мкм, $\psi = 1,0$ и различных значениях угла θ . Представленный параметр характеризует интенсивность торможения газа частицами, иначе говоря, распределение частиц по сечению сопла. Видно, что при $\theta = 45^\circ$ частицы практически равномерно сосредоточены на одной трети радиуса вблизи оси сопла. При больших углах дозвуковой части струя частиц на выходе расширяется до двух третей радиуса, вблизи оси их концентрация несколько выше. Кроме того, при $\theta = 75^\circ$ в отличие от других вариантов частицы присутствуют также вблизи стенки.

Была также исследована зависимость числа Маха на срезе сопла от диаметра частиц при $\theta = 60^\circ$, $\psi = 0,2$ и $D_{pt} = 50, 75, 100$ мкм. Во всех трех вариантах струя частиц занимает примерно половину радиуса, причем к оси их концентрация возрастает. Как и следовало ожидать, с уменьшением диаметра частиц при том же массовом расходе интенсивность их взаимодействия с газом усиливается, что вызывает более значительное его торможение.

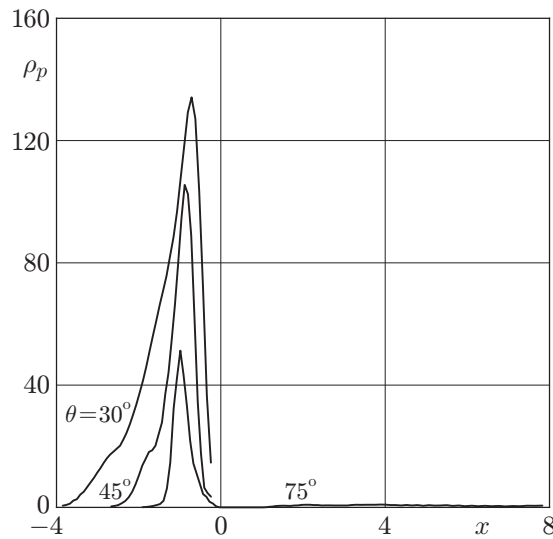


Рис. 5. Распределение средней плотности частиц бронзы на границе с пограничным слоем при различных углах полураствора дозвуковой части сопла

Для последующих расчетов течения газа с частицами в пограничном слое сопла на границе с ним проводилось осреднение по элементарному объему плотности, скорости и температуры частиц. На рис. 5 представлено распределение осредненной плотности частиц на границе с пограничным слоем при $\theta = 30, 45$ и 75° , $\psi = 0,2$, $D_{pt} = 100$ мкм. Здесь координата x отсчитывается от критического сечения сопла. Видно, что плотность в дозвуковой части сначала резко возрастает, а затем быстро уменьшается и далее частицы отходят от границы. В сверхзвуковой части сопла они не попадают на границу (кроме варианта с максимальным значением угла θ), при этом их плотность здесь $\rho \approx 10$. Результат торможения газа вблизи стенки этими частицами демонстрирует рис. 4.

Течение в пограничном слое. Эффекты вязкости и теплопроводности газа в настоящей работе учтены в тонком пограничном слое на поверхности сопла. Поскольку течение в сверхзвуковой части сопла может сопровождаться скачками уплотнения [22] и возможным отрывом пограничного слоя, эта задача решалась методом установления [23]. Уравнения нестационарного сжимаемого пограничного слоя для течения газа с частицами записаны в системе координат, связанной с поверхностью:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho v) + \omega \frac{R'}{R} \rho u &= 0, \\ \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \rho v \frac{\partial u}{\partial \eta} &= -\frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + D_x, \\ \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho u c_p \frac{\partial T}{\partial \xi} + \rho v c_p \frac{\partial T}{\partial \eta} &= u \frac{\partial p}{\partial \xi} + (\gamma - 1) \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 + \Phi \right] + \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(k \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + Q, \\ \rho &= \gamma p / T. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь координаты ξ , η направлены вдоль поверхности и перпендикулярно к ней и им соответствуют компоненты скорости u , v ; μ , k , c_p — коэффициенты вязкости, теплопроводности и удельной теплоемкости. Для турбулентного течения использовалась алгебраическая модель турбулентности Михеля. Все параметры безразмерны, как и в невязких уравнениях, с помощью их критических значений. Кроме того, параметры η и v умножены на квадратный корень из числа Рейнольдса Re .

Для потока частиц в пограничном слое использовался подход Эйлера [1–3], при котором плотность, скорость и температура частиц осреднялись по объему. Двумерные стационарные уравнения Эйлера для частиц записаны в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho_p u_p) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho_p v_p) + \omega \frac{R'}{R} \rho_p u_p &= 0, \\ \rho_p u_p \frac{\partial u_p}{\partial \xi} + \rho_p v_p \frac{\partial u_p}{\partial \eta} &= -D_x, \quad \rho_p u_p \frac{\partial v_p}{\partial \xi} + \rho_p v_p \frac{\partial v_p}{\partial \eta} = -D_y, \\ \rho_p u_p c_{pt} \frac{\partial T_p}{\partial \xi} + \rho_p v_p c_{pt} \frac{\partial T_p}{\partial \eta} &= -Q, \end{aligned} \quad (5)$$

где ρ_p , u_p , v_p , T_p — осредненные плотность, компоненты скорости и температура частиц. В уравнениях (4), (5) введены компоненты силы воздействия частиц на газ D_x , D_y , работа этих сил Φ и тепловой поток от частиц к газу Q , для которых были взяты следующие выражения [2]:

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{3}{4} \frac{\rho_p \rho}{\rho_{pt} D_{pt}} C_D (u_p - u) |\mathbf{U} - \mathbf{U}_p|, & D_y &= \frac{3}{4} \frac{\rho_p \rho}{\rho_{pt} D_{pt}} C_D (v_p - v) |\mathbf{U} - \mathbf{U}_p|, \\ \Phi &= (u_p - u) D_x + \frac{1}{\text{Re}} (v_p - v) D_y, & Q &= 6c_p \frac{\rho_p \mu}{\rho_{pt} D_{pt}^2} \frac{\text{Nu}}{\text{Pr Re}} (T_p - T). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь \mathbf{U} , \mathbf{U}_p — векторы скорости газа и частиц. Для коэффициента сопротивления C_D и числа Нуссельта Nu использовались стандартные формулы.

Однако в такой постановке не удается построить решение в пограничном слое. Дело в том, что без частиц конвективные члены для газа и градиент давления плавно приходят в равновесие друг с другом при приближении к внешней границе. Поэтому профиль скорости асимптотически стремится к своему значению на внешней границе. Аналогичная ситуация имеет место и с распределением температуры. При течении же газа с твердыми частицами поведение параметров последних носит совершенно иной характер, они не стремятся асимптотически к некоторым значениям на внешней границе пограничного слоя. Поэтому параметры взаимодействия газа с частицами (6), вообще говоря, не стремятся к нулю на внешней границе, и их учет в системе уравнений (4) нарушает асимптотический характер поведения скорости и температуры газа. В связи с этим было принято решение отказаться от учета воздействия частиц на газ в пограничном слое, а учесть только влияние газа на частицы. Такое допущение справедливо лишь при достаточно малой концентрации частиц.

На стенке для газа ставятся обычные условия прилипания и постоянства температуры, а на внешней границе заданы распределения давления, продольной компоненты скорости и температуры, которые берутся из расчетов невязкого потока с частицами в данном сопле:

$$\eta = 0: \quad u = v = 0, \quad T = T_w, \quad \eta = \eta_e(\xi): \quad p = p_e(\xi), \quad u = u_e(\xi), \quad T = T_e(\xi).$$

На входе в сопло строилось автомодельное решение пограничного слоя при данных условиях.

При постановке граничных условий для уравнений (5) необходимо было исследовать их характеристические свойства. Нетрудно видеть, что эта система имеет единственную характеристику кратности четыре с наклоном $\lambda_{1,2,3,4} = u_p/v_p$, что соответствует линии тока частиц. Однако соответствующая этому характеристическому числу матрица имеет ранг, равный единице, и поэтому ему отвечают лишь три линейно независимых собственных вектора. Таким образом, система уравнений (5) не является гиперболической в обычном смысле [24]. Аналогичный результат приводится в [13, с. 151], где выписываются

соотношения на характеристиках. В работе [4] эта система названа вырожденной гиперболической системой. К сожалению, свойства таких систем недостаточно изучены, поэтому краевая задача ставилась как для гиперболических уравнений. Поскольку поток частиц входит через внешнюю границу, на ней необходимо задать все четыре искомого параметра (плотность, обе компоненты скорости и температуру). На стенке сопла условия в этом случае не ставятся. Аналогичная постановка граничных условий предложена в [25] для несжимаемого пограничного слоя с частицами:

$$\eta = \eta_e(\xi): \quad \rho_p = \rho_{pe}(\xi), \quad u_p = u_{pe}(\xi), \quad v_p = v_{pe}(\xi), \quad T_e = T_{pe}(\xi).$$

Распределения параметров также берутся из расчетов невязкого течения газа с частицами в этом сопле. В сечении ввода частиц все их параметры задавались постоянными по сечению, как и в невязком потоке.

В уравнениях (4), (5) для удобства счета вместо координаты η введена переменная Блазиуса $\lambda = \eta/\sqrt{\xi}$ и для обеих независимых переменных ξ , λ выполнено растяжение, постоянное для первой из них и зависящее от решения для второй [26]. Уравнения пограничного слоя (4) решались по неявной разностной схеме [26] до установления по времени, а уравнения для частиц (5) — с помощью разностной схемы бегущего счета. При заданных условиях на внешней границе каждая из этих систем решалась последовательно до установления всего процесса.

Расчеты пограничного слоя с частицами выполнены для осесимметричного сопла, описанного выше, при тех же значениях определяющих параметров. Кроме того, заданы температура стенки ($T_w = 293$ К) и число Рейнольдса по параметрам в критическом сечении ($Re = 1,52 \cdot 10^6$). Было принято, что течение вначале ламинарное, а на расстоянии между тремя и четырьмя радиусами критического сечения оно переходит в турбулентное.

На рис. 6 представлены профили осредненной плотности частиц в пограничном слое при $\theta = 75^\circ$, $\psi = 1$, $D_{pt} = 100$ мкм. Числа около кривых означают расстояние от критического сечения. В этом варианте плотность на внешней границе достигает максимума при $x \approx -1,0$, и далее эти частицы, проникая в пограничный слой, движутся с потоком газа. Поскольку площадь сечения, через которую газ с частицами течет в пограничном слое дозвуковой части сопла, уменьшается в несколько раз за счет уменьшения его тол-

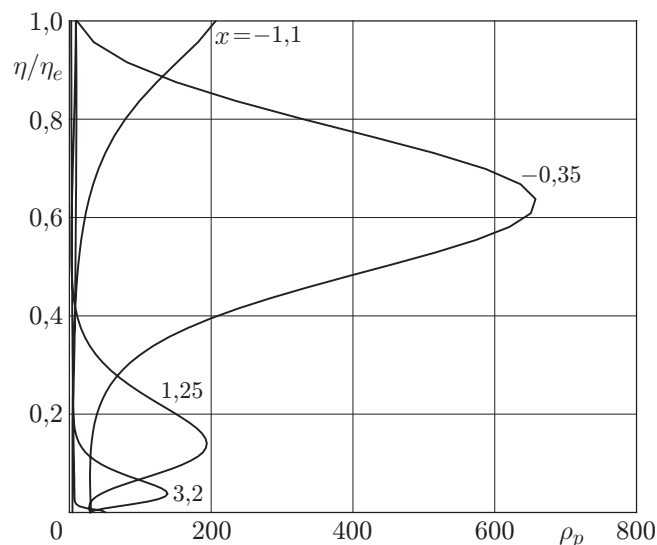


Рис. 6. Профили средней плотности частиц бронзы в пограничном слое на различных расстояниях от критического сечения

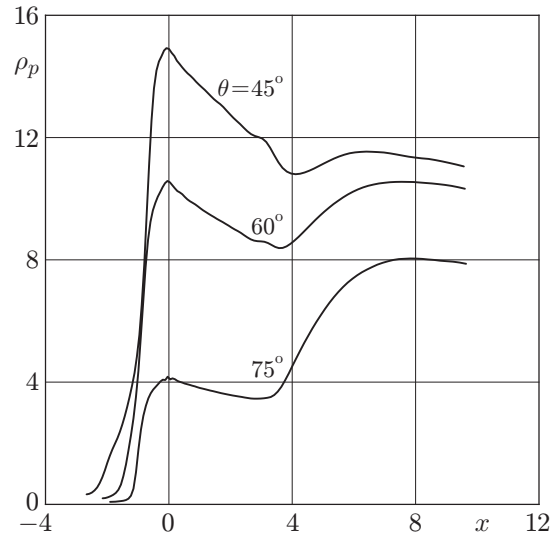


Рис. 7. Распределение средней плотности частиц бронзы на стенке сопла при различных углах полураствора его дозвуковой части

щины и радиуса сопла, а скорость частиц изменяется слабо, их осредненная плотность здесь значительно возрастает. Максимум плотности приближается к поверхности сопла, уменьшаясь по величине. (Таким образом, все частицы из пограничного слоя постепенно выпадают на стенку в сверхзвуковой части сопла.)

Влияние угла полураствора дозвуковой части сопла на распределение плотности частиц на стенке при $\theta = 45, 60, 75^\circ$, $\psi = 0,2$, $D_{pt} = 100$ мкм показано на рис. 7. Сначала плотность резко возрастает, следуя за ее увеличением на внешней границе с некоторым запаздыванием. Далее ее значения уменьшаются на ламинарном участке сверхзвуковой части сопла, а затем увеличиваются с выходом на практически постоянное значение. Причем значения плотности по всей длине уменьшаются с ростом угла полураствора, что объясняется соответствующим уменьшением плотности на внешней границе.

Подобное сравнение кривых плотности частиц на стенке при различных коэффициентах загрузки показало, что они изменяются примерно пропорционально этому коэффициенту. Исследована зависимость того же параметра от диаметра частиц при $\theta = 60^\circ$, $\psi = 0,2$. В дозвуковой части его значения практически не различаются, а в сверхзвуковой расходятся слабо — максимальное расхождение составляет 12 %. Таким образом, можно сделать вывод, что размер частиц слабо влияет на величину их плотности на стенке.

Выводы. Разработаны эффективные алгоритмы расчета течения газа с твердыми частицами в невязком ядре сопла и в пограничном слое. Результаты расчетов распределения скорости частиц на оси плоского сопла для различных частиц удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными. Получено, что частицы при вводе их в дозвуковой части сопла разгоняются газом и отходят от стенки перед критическим сечением. Затем они пересекают ось в сверхзвуковой части и переходят на другую половину сопла по отношению к оси, при этом происходит их фокусировка на оси. Повышение концентрации частиц в сверхзвуковой области приводит к торможению газа до дозвуковой скорости. Далее газ снова разгоняется до сверхзвуковой скорости. Показано, что различные виды взаимодействия частиц со стенкой приводят к значительным расхождениям в распределении их параметров на срезе сопла и практически не сказываются на распределении вдоль оси. Из расчетов пограничного слоя следует, что максимум плотности частиц может существенно возрасти по отношению к плотности на его внешней границе из-за

значительного уменьшения площади сечения пограничного слоя в дозвуковой части сопла. При движении в сверхзвуковой части этот максимум приближается к стенке, одновременно уменьшаясь по величине. Установлено, что значение плотности частиц на стенке слабо зависит от размера частиц и существенно — от угла полураствора дозвуковой части сопла и коэффициента загрузки.

Авторы благодарят проф. Е. Краузе и проф. Х. Оливье из Технического университета (г. Ахен, ФРГ) за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Wang B. Y., Glass I. I.** Compressible laminar boundary layer flows of a dusty gas over a semi-infinite flat plate // *J. Fluid Mech.* 1988. V. 186. P. 223–441.
2. **Wang B. Y., Glass I. I.** Boundary layer flows behind constant speed shock waves moving into a dusty gas // *Shock Waves.* 1991. V. 1, N 3. P. 135–144.
3. **Outa E., Tajima K., Kobayashi M., Mimura S.** Boundary layer of a non-equilibrium gas-particle mixture modified by particle lifting motion behind a shock front // *Proc. of the 17th Intern. sympos. on shock waves and shock tubes, Betlehem, PA, 17–21 July, 1989. S. 1. American Institute of Physics.* 1990. P. 770–775.
4. **Saurel R., Daniel E., Loraud J. C.** Two-phase flows: second-order schemes and boundary conditions // *AIAA J.* 1994. V. 32, N 6. P. 1214–1221.
5. **Thevand N., Daniel E., Loraud J. C.** On high-resolution schemes for solving unsteady compressible two-phase dilute viscous flows // *Intern. J. Numer. Mech. Fluids.* 1999. V. 31. P. 681–702.
6. **Thevand N., Daniel E.** Numerical study of the lift force influence on two-phase shock tube boundary layer characteristics // *Shock Waves.* 2002. V. 12, N 4. P. 279–288.
7. **Kim S.-W., Chang K.-S.** Reflection of shock wave from a compression corner in a particle-laden gas region // *Shock Waves.* 1991. V. 1, N 1. P. 65–73.
8. **Sakakita H., Hayashi A. K., Ivandaev A. I.** Numerical simulation of shock wave interaction with powder layers // *Proc. of the 18th Intern. sympos. on shock waves and shock tubes, Sendai, Japan, 21–26 July, 1991. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1991. V. 1. P. 563–568.*
9. **Wang B. Y., Wu Q. S., Wang C., et al.** Shock wave diffraction by a square cavity filled with dusty gas // *Shock Waves.* 2001. V. 11, N 1. P. 7–14.
10. **Аманбаев Т. Р.** Подъем дисперсных частиц из выемки за фронтом нестационарной ударной волны с треугольным профилем скорости // *ПМТФ.* 2003. Т. 44, № 5. С. 39–45.
11. **Васенин И. М., Рычков А. Д.** Численное решение задачи о течении смеси газа и частиц в осесимметричном сопле Лавалья // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.* 1975. № 5. С. 178–181.
12. **Глазунов А. А., Рычков А. Д.** Исследование неравновесных двухфазных течений в осесимметричных соплах Лавалья // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.* 1977. № 6. С. 86–91.
13. **Стернин Л. Е.** Основы газодинамики двухфазных течений в соплах. М.: Машиностроение, 1974.
14. **Васенин И. М., Архипов В. А., Бутов В. Г. и др.** Газовая динамика двухфазных течений в соплах. Томск: Томск. гос. ун-т, 1986.
15. **Рычков А. Д.** Математическое моделирование газодинамических процессов в каналах и соплах. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988.
16. **Sommerfeld M.** Expansion of a gas/particle mixture in supersonic free jet flow // *Z. Flugwiss. Weltraumforsch.* 1987. Bd. 11, N. 2. S. 87–96.

17. **Mostafa A. A., Mongia H. C., McDonell V. G., Samuelsen G. S.** Evolution of particle-laden jet flows: A theoretical and experimental study // AIAA J. 1989. V. 27, N 2. P. 167–183.
18. **Яненко Н. Н., Солоухин Р. И., Папырин А. Н., Фомин В. М.** Сверхзвуковые двухфазные течения в условиях скоростной неравновесности частиц. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1980.
19. **Yee H. C., Warming R. F., Harten A.** Implicit total variation diminishing (TVD) schemes for steady-state calculations // J. Comp. Phys. 1985. V. 57. P. 327–360.
20. **Seider G.** Numerische Untersuchung transsonischer Strömungen. Aachen, FRG: Aerodyn. Inst., RWTH, 1991.
21. **Крайко А. Н., Сулайманова С. М.** Двухжидкостные течения смеси газа и твердых частиц с “пеленами” и “шнурами”, возникающими при обтекании непроницаемых поверхностей // Прикл. математика и механика. 1983. Т. 47, вып. 4. С. 619–630.
22. **Cuffel R. F., Back L. H., Massier P. F.** Transonic flowfield in a supersonic nozzle with small throat radius of curvature // AIAA J. 1969. V. 7. P. 1364–1366.
23. **Ветлуцкий В. Н., Ганимедов В. Л.** Расчет сжимаемого течения в угле сжатия при больших числах Рейнольдса // Аэромеханика и газовая динамика. 2003. № 2. С. 10–20.
24. **Курант Р.** Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
25. **Агранат В. М., Милованова А. В.** Расчет трения и теплообмена в запыленном пограничном слое // Механика реагирующих сред и ее приложение. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989. С. 164–170.
26. **Ветлуцкая Л. М., Ветлуцкий В. Н.** К расчету пространственного сжимаемого ламинарного пограничного слоя на заостренном теле // Численные методы механики сплошной среды. 1986. Т. 17, № 5. С. 25–42.

*Поступила в редакцию 11/XI 2004 г.,
в окончательном варианте — 12/I 2005 г.*
