

УДК 532.517.2

## **Устойчивость трехмерного течения пленки вязкой жидкости, обтекаемой турбулентным потоком газа**

**С.П. Актершев, С.В. Алексеенко**

*Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск*

E-mail: sergey-aktershev@mail.ru

Теоретически исследуется устойчивость совместного течения пленки жидкости и турбулентного потока газа для произвольного угла между направлением газового потока и силой гравитации. Трехмерное волновое течение пленки описывается на основе интегрального подхода и квазиламинарной модели турбулентного потока газа. Для случая вертикальной пленки и горизонтального потока газа проведены расчеты инкремента и фазовой скорости волн в зависимости от направления их распространения. Расчеты показывают, что наличие поперечного газового потока существенно увеличивает область неустойчивости, а также диапазон направлений, в которых на поверхности пленки распространяются быстро растущие возмущения.

**Ключевые слова:** пленка жидкости, трехмерное течение, турбулентный поток газа, устойчивость, волны на межфазной поверхности.

### **Введение**

Волны на поверхности раздела фаз оказывают сильное влияние на теплообмен, поэтому изучение условий волнообразования на поверхности пленки имеет большое практическое значение для энергетики и химической технологии. Анализ линейной и нелинейной устойчивости свободно стекающей пленки жидкости посвящены многие работы, основные результаты этих исследований приведены в работе [1]. Значительно меньше успехов достигнуто в изучении волн при совместном движении газа и пленки жидкости. Наличие потока газа над поверхностью жидкости приводит к появлению касательных напряжений на межфазной поверхности, которые кардинально влияют на устойчивость пленки и характеристики возникающих волн. Для встречающихся на практике режимов течений поток газа, как правило, турбулентный, и это сильно усложняет теоретическое исследование. В большинстве теоретических работ рассматривается двумерное течение, когда скорость газового потока и проекция силы гравитации на поверхность жидкости направлены вдоль одной прямой (спутное или противоточное движение фаз). В двумерном случае задача устойчивости может быть существенно упрощена, если использовать подход, развитый в работах [2, 3]. При таком подходе поверхность пленки для газового потока считается жесткой и неподвижной, а движение газа вдоль волнистой поверхности рассчитывается независимо от движения жидкости. Влияние газа на устойчивость пленки проявляется через пульсации

напряжений на межфазной поверхности. Задача о течении газа над волнистой поверхностью рассмотрена в работе [3] на основе квазиламинарной модели турбулентного потока газа [4]: рассчитаны амплитуды пульсаций касательного и нормального напряжений на поверхности пленки и представлены результаты расчетов в виде функций одного параметра — модифицированного числа Рейнольдса газового потока  $R_g$ . В работах [5–8] эти результаты применены к исследованию устойчивости газопленочных течений на основе интегральной модели, а также с использованием уравнения Орра–Зоммерфельда. Расчеты [6, 8] показывают, что противоточное течение фаз оказывается более устойчивым, чем спутное, а область неустойчивости более узкая, чем для гравитационной пленки. Этот вывод подтверждают результаты работы [9], в которой теоретически рассматривалась устойчивость вертикальной пленки в случае противоточного движения газа. В работе [10] проведены измерения инкремента и фазовой скорости возбужденных волн в случае спутного и противоточного течений. Сопоставление экспериментальных данных с расчетами по квазиламинарной модели показало хорошее соответствие для умеренных значений числа Рейнольдса.

Если проекция силы гравитации на поверхность жидкости и скорость газового потока не направлены вдоль одной прямой, течение пленки становится трехмерным, и это еще более усложняет задачу. Волнообразование при косом обтекании жидкой пленки турбулентным потоком газа представляет собой важную проблему устойчивости межфазной поверхности в геометрически сложной трехмерной постановке. Кроме научного аспекта, эта задача имеет огромное прикладное значение. Трехмерное совместное течение жидкой пленки и газа реализуется в целом ряде технологических устройств. Так, например, в жалюзийных сепараторах пленка воды стекает вниз и обдувается горизонтальным потоком воздуха (перекрестный ток). В пленочных массообменных аппаратах с целью интенсификации массообмена стекающая по внутренней стенке вертикальной трубы пленка обдувается закрученным потоком газа. Трехмерное течение имеет место в вихревых контактных устройствах для очистки газа от примесей, например, в золоуловителе скрубберного типа для очистки дымовых газов мощных пылеугольных котлов. В кольцевом пространстве скруббера движется восходящий закрученный поток газа, содержащий частицы пыли, а по стенкам стекает пленка воды. За счет центробежного эффекта и турбулентной диффузии пылевые частицы поглощаются пленкой и удаляются в виде пульпы. Эффективность улавливания частиц в значительной степени зависит от скорости газа. Однако при некоторой критической скорости газа происходит срыв капель с поверхности пленки и вынос их из аппарата. Это недопустимо из-за коррозионного воздействия влаги на расположенное за скруббером оборудование, поэтому необходимо прогнозировать эволюцию волн на поверхности пленки в закрученном потоке газа.

### Постановка задачи

Задача об устойчивости течения пленки в вихревом скруббере допускает следующие очевидные упрощения. Вследствие большого диаметра аппарата по сравнению с толщиной пленки течение можно считать плоским, а в силу замкнутости контура поперечного сечения градиент давления вдоль периметра можно полагать равным нулю. Рассмотрим течение пленки жидкости на пластине, наклоненной под углом  $\theta$  к горизонту под действием гравитации, и произвольно направленного турбулентного потока газа. Введем декартову систему координат  $Oxyz$  так, что проекция силы тяжести на пластину будет направлена вдоль оси  $Ox$ , а ось  $Oy$  — перпендикулярна пластине. Касательное напряжение на поверхности пленки  $\tau_0$

(здесь  $\tau_0$  — это абсолютная величина трения) образует произвольный угол  $\delta$  с осью  $Ox$ . В этом случае скорость жидкости по направлению не совпадает ни с силой гравитации, ни с потоком газа, т. е. течение трехмерное. Волны на поверхности пленки могут распространяться в произвольном направлении, поэтому в плоскости пластины введем вспомогательную систему координат  $O\xi\eta$  с осью  $O\xi$  в направлении распространения волны (см. рис. 1, *a*). Угол  $\alpha$  между осями  $O\xi$  и  $Ox$  будем считать произвольным и рассмотрим линейные волны, сделав следующие упрощающие предположения: 1 — возмущение поверхности пленки зависит только от координаты  $\xi$ ; 2 — компонента касательного напряжения по оси  $O\eta$  остается невозмущенной, а по оси  $O\xi$  пульсирует; 3 — для невозмущенного течения градиент давления по оси  $Oz$  равен нулю.

### Интегральная модель трехмерного течения пленки

Возмущение поверхности пленки считаем длинноволновым (толщина пленки  $h$  много меньше длины волны  $l$ ) и используем погранслоинное приближение, полагая  $\partial^2/\partial x^2 \ll \partial^2/\partial y^2$ ,  $\partial^2/\partial z^2 \ll \partial^2/\partial y^2$ ,  $\partial h/\partial x \ll 1$ ,  $\partial h/\partial z \ll 1$ . В принятом приближении запишем для жидкости уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= g \sin \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g \cos \theta \end{aligned} \quad (1)$$

и уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

Здесь  $u, v, w$  — компоненты скорости по осям  $Ox, Oy, Oz$  соответственно. Левая часть третьего уравнения (1) записана в пренебрежении компонентой  $v$ , поскольку  $v/u \sim h/l \ll 1$ . На пластине выполняются условия  $u = v = w = 0$ . На поверхности пленки выполняется кинематическое условие

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u_s \frac{\partial h}{\partial x} + w_s \frac{\partial h}{\partial z} = v_s \quad (3)$$

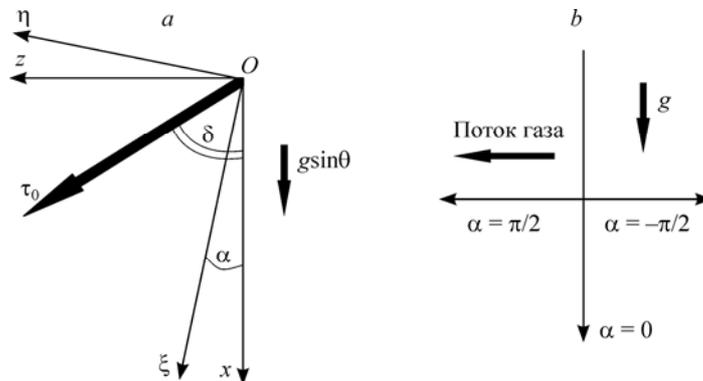


Рис. 1. Схемы течения: *a* — газового потока и пленки; *b* — пленки в скруббере ( $\delta = \pi/2$ ).

и динамические условия

$$p = p_s - \sigma \left( \partial^2 h / \partial x^2 + \partial^2 h / \partial z^2 \right), \quad \mu \partial u / \partial y = \tau_{sx}, \quad \mu \partial w / \partial y = \tau_{sz}. \quad (4)$$

Здесь  $p_s$  — давление газа,  $u_s, v_s, w_s$  — компоненты скорости,  $\tau_{sx}, \tau_{sz}$  — компоненты касательного напряжения на поверхности пленки.

Интегрируя третье уравнение (1) с учетом (4), находим давление

$$p = p_s + \rho g \cos \theta (h - y) - \sigma \left( \partial^2 h / \partial x^2 + \partial^2 h / \partial z^2 \right).$$

Первые два уравнения (1) так же, как и в двумерном случае, проинтегрируем по толщине пленки. Интегралы в левой части преобразуем известным образом [1] с помощью уравнения неразрывности (2), кинематического условия (3) и граничных условий на пластине. В результате левые части первого и второго уравнений (1) преобразуются соответственно в

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h u dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u^2 dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h u w dy \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h w dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h w^2 dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u w dy,$$

а сами уравнения примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial J_1}{\partial x} + \frac{\partial J_{12}}{\partial z} &= \frac{\tau_{sx} - \tau_{wx}}{\rho} - \frac{h}{\rho} \frac{\partial p_s}{\partial x} + gh \left( \sin \theta - \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\sigma h}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial J_2}{\partial z} + \frac{\partial J_{12}}{\partial x} &= \frac{\tau_{sz} - \tau_{wz}}{\rho} - \frac{h}{\rho} \frac{\partial p_s}{\partial z} + \frac{\sigma h}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $q = \int_0^h u dy$  и  $m = \int_0^h w dy$  — расходы жидкости по осям  $Ox$  и  $Oz$  соответственно,

$\tau_{wx} = \mu \partial u / \partial y|_{y=0}$ ,  $\tau_{wz} = \mu \partial w / \partial y|_{y=0}$  — компоненты касательного напряжения на пластине,  $J_1 = \int_0^h u^2 dy$ ,  $J_2 = \int_0^h w^2 dy$ ,  $J_{12} = \int_0^h u w dy$  — потоки количества движения.

Кинематическое условие (3) с помощью (2) преобразуем к виду

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial z} = 0. \quad (6)$$

Чтобы получить систему уравнений замкнутую относительно  $q, m, h$ , необходимо задать профиль скорости в пленке и исключить напряжения на поверхности пленки и на стенке. В двумерном случае для описания длинноволновых возмущений в гравитационной пленке В.Я. Шкадов разработал интегральную модель [11], основанную на автомодельном профиле скорости в пленке  $u/u_s = 2\eta - \eta^2$ .

Для трехмерных волн профиль скорости так же, как и в двумерном случае, зададим в виде полинома 2 степени, удовлетворяющего граничным условиям на пластине и на поверхности пленки:

$$u/u_s = (2 - T_x)\eta + (T_x - 1)\eta^2, \quad w/w_s = (2 - T_z)\eta + (T_z - 1)\eta^2. \quad (7)$$

Здесь  $\eta = y/h$ ,  $T_x = \tau_{sx}h/\mu u_s$ ,  $T_z = \tau_{sz}h/\mu w_s$ .

Нетрудно видеть, что профиль (7) неавтономный, поскольку  $T_x$  и  $T_z$  зависят от координат и времени. Исходя из профиля (7), получаем

$$q = \int_0^h u dy = u_s h \int_0^1 \left( (2 - T_x) \eta + (T_x - 1) \eta^2 \right) d\eta = 2u_s h / 3 - \tau_{sx} h^2 / 6\mu,$$

$$m = \int_0^h w dy = w_s h \int_0^1 \left( (2 - T_z) \eta + (T_z - 1) \eta^2 \right) d\eta = 2w_s h / 3 - \tau_{sz} h^2 / 6\mu,$$

отсюда следует:  $u_s = 3q / h + \tau_{sx} h / 4\mu$ ,  $w_s = 3m / h + \tau_{sz} h / 4\mu$ . (8)

Из (7), (8) находим также компоненты касательного напряжения на пластине

$$\tau_{Wx} = (2 - T_x) \mu u_s / h = 3\mu q / h^2 - \tau_{sx} / 2,$$

$$\tau_{Wz} = (2 - T_z) \mu w_s / h = 3\mu m / h^2 - \tau_{sz} / 2. \quad (9)$$

Используя (9), запишем (5) и (6) в виде системы уравнений относительно  $h$ ,  $q$ ,  $m$ ,  $\tau_{sx}$ ,  $\tau_{sz}$ ,  $P_s$ :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial J_1}{\partial x} + \frac{\partial J_{12}}{\partial z} = \frac{3\tau_{sx}}{2\rho} - \frac{3\nu q}{h^2} + gh \left( \sin \theta - \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{h}{\rho} \frac{\partial p_s}{\partial x} + \frac{\sigma h}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right),$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial J_2}{\partial z} + \frac{\partial J_{12}}{\partial x} = \frac{3\tau_{sz}}{2\rho} - \frac{3\nu m}{h^2} - \frac{h}{\rho} \frac{\partial p_s}{\partial z} + \frac{\sigma h}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right), \quad (10)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial z} = 0.$$

С помощью (7), (8) вычислим интегралы  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_{12}$ :

$$J_1 = 6q^2 / 5h + q\tau_{sx} h / 20\mu + \tau_{sx}^2 h^3 / 120\mu^2, \quad J_2 = 6m^2 / 5h + m\tau_{sz} h / 20\mu + \tau_{sz}^2 h^3 / 120\mu^2,$$

$$J_{12} = 6qm / 5h + h(m\tau_{sx} + q\tau_{sz}) / 40\mu + \tau_{sx}\tau_{sz} h^3 / 120\mu^2.$$

Выберем в качестве масштаба расстояния толщину невозмущенной пленки  $h_m$  и введем масштабы скорости —  $u_m = gh_m^2 / 3\nu$ , времени —  $t_m = h_m / u_m$ , расхода —  $q_m = h_m u_m$ , напряжения —  $\tau_m = \rho gh_m / 3$ . Перейдем к безразмерным переменным  $x/h_m$ ,  $z/h_m$ ,  $t/t_m$ ,  $h/h_m$ ,  $q/q_m$ ,  $m/q_m$ ,  $p_s/\tau_m$ ,  $\tau_{sx}/\tau_m$ ,  $\tau_{sz}/\tau_m$ , оставив для всех величин прежние буквенные обозначения. В безразмерных переменных система уравнений (10) примет вид

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial J_1}{\partial x} + \frac{\partial J_{12}}{\partial z} = \frac{3}{\text{Re}_m} \left( \frac{\tau_{sx}}{2} - \frac{h}{3} \frac{\partial p_s}{\partial x} + h \left( \sin \theta - \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{q}{h^2} \right) + \text{We} h \frac{\partial}{\partial x} \Delta h,$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial J_2}{\partial z} + \frac{\partial J_{12}}{\partial x} = \frac{3}{\text{Re}_m} \left( \frac{\tau_{sz}}{2} - \frac{h}{3} \frac{\partial p_s}{\partial z} - \frac{m}{h^2} \right) + \text{We} h \frac{\partial}{\partial z} \Delta h, \quad (11)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial z} = 0.$$

Здесь  $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial z^2$ ,  $\text{We} = (3\text{Fi} / \text{Re}_m^5)^{1/3}$  — число Вебера,  $\text{Fi} = \sigma^3 / \rho^3 g \nu^4$  — пленочное число,  $\text{Re}_m = gh_m^3 / 3\nu^2$  — критерий Рейнольдса, характеризующий толщину невозмущенной пленки.

В случае невозмущенного течения пленки  $h = 1$ , а все производные равны нулю. Невозмущенные компоненты касательного напряжения на поверхности пленки и расхода по осям  $Ox$ ,  $Oz$  запишутся как  $\tau_{sx0} = r \cos \delta$ ,  $\tau_{sz0} = r \sin \delta$ ,  $q_0 = \sin \theta + 0,5r \cos \delta$ ,  $m_0 = 0,5r \sin \delta$ . Здесь  $r = 3\tau_0 / \rho g h_m$  — безразмерное невозмущенное касательное напряжение на поверхности пленки.

Чтобы получить замкнутую систему уравнений, рассмотрим возмущения поверхностных напряжений при волновом течении пленки.

### Определение поверхностных напряжений для трехмерного течения пленки

Течение газа представим в виде суммы двух движений — в направлении распространения волны и в поперечном направлении. Согласно сделанным предположениям, волновая поверхность пленки является источником возмущений для движения газа по оси  $O\xi$  и никак не сказывается на движении вдоль оси  $O\eta$ . Таким образом, при определении напряжений на поверхности пленки поток газа мы считаем двумерным, поверхность пленки, следуя работам [2, 3], считаем неподвижной твердой стенкой и рассматриваем турбулентный поток газа, движущийся вдоль оси  $O\xi$  над волнистой поверхностью, заданной уравнением  $H(\xi) = a \cos k\xi$ . Здесь  $k$  — волновое число,  $a$  — амплитуда волнистости. Предполагается, что амплитуда  $a$  много меньше длины волны, а толщина пленки много меньше характерного размера канала. В этом случае, как показано в работах [2, 3], уравнения движения газовой фазы можно линеаризовать относительно возмущений межфазной поверхности. Для определения напряжений на поверхности пленки будем использовать квазиламинарную модель турбулентного потока газа [4]. В этой модели предполагается, что возмущения газового потока локализованы в ламинарном подслое. Профиль скорости газа задается турбулентным, но влияние возмущений от волнистой стенки на турбулентные пульсации не учитывается.

Все переменные в этом разделе приведены к безразмерному виду с помощью масштаба скорости  $u_* = \sqrt{|\tau_{0\xi}| / \rho_g}$ , масштаба длины  $l_* = \nu_g / u_*$  и масштаба напряжения  $\tau_{0\xi}$ . Здесь  $\nu_g$ ,  $\rho_g$  — кинематическая вязкость и плотность газа,  $\tau_{0\xi} = \tau_0 \cos(\delta - \alpha)$  — невозмущенное касательное напряжение на стенке. Представим поверхность стенки в комплексной форме  $\hat{H} = ae^{ik\xi}$ , которую можно также записать в виде  $\hat{H} = H - (i/k)\partial H / \partial \xi$ . Возмущения в газовом потоке, обусловленные кривизной стенки, линейно зависят от  $\hat{H}$ :  $\hat{p}' = \hat{p}_s \hat{H}$ ,  $\hat{\tau}' = \hat{\tau}_s \hat{H}$ . Здесь  $\hat{p}_s = p_R + ip_I$  и  $\hat{\tau}_s = \tau_R + i\tau_I$  — комплексные возмущения давления и касательного напряжения на межфазной поверхности. Физически реальные возмущения дает вещественная часть выражений  $\hat{p}'$  и  $\hat{\tau}'$ :

$$p' = p_R H + (p_I/k)(\partial H / \partial \xi), \quad \tau' = \tau_R H + (\tau_I/k)(\partial H / \partial \xi). \quad (12)$$

Отсюда касательное напряжение и давление газа на волнистой стенке принимают вид

$$\tau_\xi = 1 + \tau', \quad p_s = p_0 + p'. \quad (13)$$

Комплексные возмущения  $\hat{p}_s$  и  $\hat{\tau}_s$  являются функциями только одного параметра — модифицированного числа Рейнольдса для газа  $R_g$ . В рассматриваемом случае параметр  $R_g$  определяется как

$$R_g = \frac{1}{\tilde{k}V_g} \sqrt{|\tau_{0\xi}|/\rho_g} = \frac{1}{\tilde{k}V_g} \sqrt{\tau_0 |\cos(\delta - \alpha)|/\rho_g}.$$

Здесь  $\tilde{k} = 2\pi/l$  — размерное волновое число. Результаты расчетов вещественных  $T_R, F_R$  и мнимых  $T_I, F_I$  частей пульсации напряжений представлены в работе [3] в зависимости от  $R_g$ . Компоненты  $p_R, p_I, \tau_R, \tau_I$  связаны с  $T_R, T_I, F_R, F_I$  соотношениями:

$$\begin{aligned} \tau_R &= T_R k, \quad \tau_I = T_I k |\cos(\delta - \alpha)| / \cos(\delta - \alpha), \\ p_R &= F_R k |\cos(\delta - \alpha)| / \cos(\delta - \alpha), \quad p_I = F_I k. \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, используя результаты расчетов [3], находим возмущения поверхностных напряжений  $p', \tau'$ .

### Линейный анализ устойчивости трехмерного течения

Линеаризуем уравнения (11) относительно малых возмущений, полагая  $h = 1 + H(x, z, t)$ ,  $q = q_0 + Q(x, z, t)$ ,  $m = m_0 + M(x, z, t)$ . Здесь  $Q$  и  $M$  — возмущения расхода по осям  $Ox$  и  $Oz$ . Формулы (13) при переходе к масштабу  $\tau_m = \rho g h_m / 3$  имеют вид

$$p_s = p_0 + r \cos(\delta - \alpha) p', \quad \tau_\xi = r \cos(\delta - \alpha) (1 + \tau'). \quad (15)$$

Компонента  $\tau_\eta$  остается невозмущенной:  $\tau_\eta = r \sin(\delta - \alpha)$ , а компоненты  $\tau_{sx}, \tau_{sz}$  вычисляются из геометрических соотношений

$$\begin{aligned} \tau_{sx} &= \tau_\xi \cos \alpha - \tau_\eta \sin \alpha = r (\cos \delta + \tau' \cos(\delta - \alpha) \cos \alpha), \\ \tau_{sz} &= \tau_\xi \sin \alpha + \tau_\eta \cos \alpha = r (\sin \delta + \tau' \cos(\delta - \alpha) \sin \alpha). \end{aligned} \quad (16)$$

Линеаризуя  $J_1, J_2, J_{12}$ , представим их в виде суммы невозмущенной части и малого возмущения  $J'$ . После громоздких выкладок получаем

$$\begin{aligned} J'_1 &= -a_1 H + 2a_2 Q + a_3 r \tau', \quad J'_2 = -b_1 H + 2b_2 M + b_3 r \tau', \\ J'_{12} &= -e_1 H + a_2 M + b_2 Q + e_3 r \tau'. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{(r \cos \delta + 3 \sin \theta)(r \cos \delta + 1,6 \sin \theta)}{4}, \quad a_2 = \frac{48 \sin \theta + 25r \cos \delta}{40}, \quad b_1 = \frac{r^2 \sin^2 \delta}{4}, \\ b_2 &= \frac{5r \sin \delta}{8}, \quad a_3 = \frac{\cos(\delta - \alpha) \cos \alpha}{20} \left( \sin \theta + \frac{5r \cos \delta}{6} \right), \quad b_3 = \frac{r \cos(\delta - \alpha) \sin \alpha \sin \delta}{24}, \\ e_1 &= \frac{r \sin \delta (r \cos \delta + 2,3 \sin \theta)}{4}, \quad e_3 = \frac{\cos(\delta - \alpha)}{40} \left( \sin \theta \sin \alpha + \frac{5r \sin(\alpha + \delta)}{6} \right). \end{aligned}$$

Подставляя (15)–(17) в (11), получаем систему линейных уравнений для малых возмущений  $H, Q, M, \tau', p'$ :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial Q}{\partial t} - a_1 \frac{\partial H}{\partial x} + 2a_2 \frac{\partial Q}{\partial x} + r \left( a_3 \frac{\partial \tau'}{\partial x} + e_3 \frac{\partial \tau'}{\partial z} \right) - e_1 \frac{\partial H}{\partial z} + a_2 \frac{\partial M}{\partial z} + b_2 \frac{\partial Q}{\partial z} = \\
 & = \frac{3}{\text{Re}_m} \left( A_1 H + B_1 r \tau' \cos(\delta - \alpha) - \frac{r}{3} \cos(\delta - \alpha) \frac{\partial p'}{\partial x} - Q - \cos \theta \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \text{We} \frac{\partial}{\partial x} \Delta H, \\
 & \frac{\partial M}{\partial t} - b_1 \frac{\partial H}{\partial z} + 2b_2 \frac{\partial M}{\partial z} + r \left( b_3 \frac{\partial \tau'}{\partial z} + e_3 \frac{\partial \tau'}{\partial x} \right) - e_1 \frac{\partial H}{\partial x} + a_2 \frac{\partial M}{\partial x} + b_2 \frac{\partial Q}{\partial x} = \\
 & = \frac{3}{\text{Re}_m} \left( A_2 H + B_2 r \tau' \cos(\delta - \alpha) - \frac{r}{3} \cos(\delta - \alpha) \frac{\partial p'}{\partial x} - M \right) + \text{We} \frac{\partial}{\partial z} \Delta H, \\
 & \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial z} = 0.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Здесь  $A_1 = 3 \sin \theta + r \cos \delta$ ,  $A_2 = r \sin \delta$ ,  $B_1 = 0,5 \cos \alpha$ ,  $B_2 = 0,5 \sin \alpha$ .

### Двухволновое уравнение и дисперсионные соотношения

Продифференцируем первое уравнение (18) по  $x$ , второе по  $z$ . Сложим оба уравнения и получим:

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{\partial}{\partial t} + a_2 \frac{\partial}{\partial x} + b_2 \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial z} \right) - \left( a_1 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + 2e_1 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial z} + b_1 \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \right) + \\
 & + r \left( a_3 \frac{\partial^2 \tau'}{\partial x^2} + 2e_3 \frac{\partial^2 \tau'}{\partial x \partial z} + b_3 \frac{\partial^2 \tau'}{\partial z^2} \right) = \\
 & = \frac{3}{\text{Re}_m} \left( A_1 \frac{\partial H}{\partial x} + A_2 \frac{\partial H}{\partial z} + r \cos(\delta - \alpha) \left( B_1 \frac{\partial \tau'}{\partial x} + B_2 \frac{\partial \tau'}{\partial z} - \frac{1}{3} \Delta p' \right) - \right. \\
 & \left. - \left( \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial z} + \cos \theta \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right) \right) + \text{We} \Delta^2 H.
 \end{aligned}$$

Исключим из этого уравнения  $(\partial Q / \partial x + \partial M / \partial z)$  с помощью третьего уравнения (18). В результате получим уравнение для возмущений толщины пленки и напряжений:

$$\begin{aligned}
 & \left( 2a_2 \frac{\partial}{\partial x} + 2b_2 \frac{\partial}{\partial z} + \frac{3}{\text{Re}_m} \right) \frac{\partial H}{\partial t} + \left( a_1 - \frac{3 \cos \theta}{\text{Re}_m} \right) \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \\
 & + 2e_1 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial z} + b_1 \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + \frac{3}{\text{Re}_m} \left( A_1 \frac{\partial H}{\partial x} + A_2 \frac{\partial H}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \text{We} \Delta^2 H = \\
 & = r \left( a_3 \frac{\partial^2 \tau'}{\partial x^2} + 2e_3 \frac{\partial^2 \tau'}{\partial x \partial z} + b_3 \frac{\partial^2 \tau'}{\partial z^2} + \frac{\cos(\delta - \alpha)}{\text{Re}_m} \left( \Delta p' - 3 \left( B_1 \frac{\partial \tau'}{\partial x} + B_2 \frac{\partial \tau'}{\partial z} \right) \right) \right).
 \end{aligned}$$

В этом уравнении перейдем к координатам  $\xi, \eta$  по формулам

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial \xi} - \sin \alpha \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \sin \alpha \frac{\partial}{\partial \xi} + \cos \alpha \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Учитывая  $\partial/\partial\eta = 0$  и исключая  $\tau', p'$  с помощью (12), после некоторых преобразований приходим к уравнению для возмущения толщины пленки:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c_1 \frac{\partial}{\partial \xi}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_2 \frac{\partial}{\partial \xi}\right) H + \frac{3}{\text{Re}_m} \left(\frac{\partial H}{\partial t} + c_0 \frac{\partial H}{\partial \xi}\right) + n_0 \frac{\partial^3 H}{\partial \xi^3} + \text{We} \frac{\partial^4 H}{\partial \xi^4} = 0. \quad (19)$$

Здесь  $c_0 = 3 \sin \theta \cos \alpha + r \cos(\delta - \alpha)(1 + \tau_R/2)$ ,  $c_{1,2} = a_0 \pm \sqrt{a_0^2 - b_0}$ ,  $a_0 = a_2 \cos \alpha + b_2 \sin \alpha$ ,  $n_0 = -r \left( \left( a_3 \cos^2 \alpha + 2e_3 \sin \alpha \cos \alpha + b_3 \sin^2 \alpha \right) \frac{\tau_I}{k} + \cos(\delta - \alpha) \frac{p_I}{k \text{Re}_m} \right)$ ,

$$b_0 = \cos^2 \alpha (a_1 - 3 \cos \theta / \text{Re}_m - r a_3 \tau_R) + \sin^2 \alpha (b_1 - r b_3 \tau_R) + 2 \sin \alpha \cos \alpha (e_1 - r e_3 \tau_R) + r \cos(\delta - \alpha) (3 \tau_I / 2k - p_R) / \text{Re}_m.$$

Линейное уравнение (19) имеет двухволновую структуру. Первый волновой оператор в (19) описывает динамические волны, движущиеся со скоростями  $c_1$  и  $c_2$ , он дает основной вклад при больших  $\text{Re}_m$ . Второй волновой оператор описывает кинематическую волну, движущуюся со скоростью  $c_0$ , он дает основной вклад при малых  $\text{Re}_m$ . Для двумерного газожидкостного течения двухволновое уравнение было получено в работе [5], а в [12] аналогичное уравнение выведено с учетом фазового превращения. В отличие от двумерного случая, в (19) появились два новых параметра — углы  $\alpha$  и  $\delta$ , от которых зависят коэффициенты  $c_0$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $n_0$ . Для двумерного течения ( $\alpha = 0$ ,  $\sin \delta = 0$ ) все формулы совпадают с выведенными в [5].

Представим возмущение поверхности пленки в виде  $H = H_a \exp(ik(\xi - ct) + \beta t)$ , где  $H_a$ ,  $k$ ,  $c$ ,  $\beta$  — вещественные амплитуда, волновое число, фазовая скорость, инкремент волны. Подставляя это в (19), получим дисперсионное уравнение

$$(\beta + ik(c_1 - c))(\beta + ik(c_2 - c)) + (3/\text{Re}_m)(\beta + ik(c_0 - c)) = n_0 ik^3 - \text{We} k^4.$$

Разделяя вещественную и мнимую части, получаем дисперсионные соотношения в виде:

$$\frac{\beta \text{Re}_m}{3} + \frac{1}{2} = \frac{A_0}{2(c - a_0)}, \quad \left( \frac{\beta \text{Re}_m}{3} + \frac{1}{2} \right)^2 = \left( \frac{k \text{Re}_m}{3} \right)^2 \left( (c - a_0)^2 - B_0 \right) + \frac{1}{4}. \quad (20)$$

Здесь  $A_0 = c_0 - a_0 - n_0 k^2 \text{Re}_m / 3$ ,  $B_0 = a_0^2 - b_0 + \text{We} k^2$ .

Исключая из (20) скорость  $c$ , получим для  $Z \equiv (\beta \text{Re}_m / 3 + 1/2)^2$  квадратное уравнение:

$$Z^2 - Z \left( 0,25 - B_0 (k \text{Re}_m / 3)^2 \right) - 0,25 A_0^2 (k \text{Re}_m / 3)^2 = 0.$$

Решая его, находим

$$Z = 0,5 \left( 0,25 - B_0 (k \text{Re}_m / 3)^2 + \sqrt{\left( 0,25 - B_0 (k \text{Re}_m / 3)^2 \right)^2 + A_0^2 (k \text{Re}_m / 3)^2} \right),$$

$$\beta = 3(-0,5 \pm \sqrt{Z}) / \text{Re}_m, \quad c = a_0 \pm 0,5 A_0 / \sqrt{Z}. \quad (21)$$

Знаки  $\pm$  в формулах (21) дают две различные волновые моды. Мода, соответствующая знаку «плюс», может давать неустойчивость ( $\beta > 0$ ), а знаку «минус» соответствует устойчивая мода.

### Результаты расчетов

Для вихревых контактных устройств наиболее важен случай, когда пленка жидкости вертикальная, а поток газа горизонтальный, поэтому далее в качестве иллюстрации приведены расчеты неустойчивой моды только для указанной конфигурации течения ( $\theta = \pi/2$ ,  $\delta = \pi/2$ ) для системы вода–воздух (рис. 1, *b*). При заданных параметрах течения  $r$ ,  $Re_m$  инкремент и фазовая скорость зависят от волнового числа  $k$  и угла  $\alpha$ . Таким образом, для трехмерного течения имеем поверхности  $\beta = \beta(k, \alpha)$ ,  $c = c(k, \alpha)$ . Если положить  $\alpha = \text{const}$ , получаем дисперсионные кривые  $\beta(k)$ ,  $c(k)$  для фиксированного направления распространения волны. Угол  $\alpha$  достаточно рассмотреть в диапазоне  $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ , т. к. угол  $(\pi - \alpha)$  дает ту же самую прямую, что угол  $(-\alpha)$ , но с противоположным направлением оси  $O\xi$ .

Сначала проанализируем случай  $r = 0$  (гравитационная пленка). В этом случае имеется симметрия относительно оси  $Ox$ . Поверхность  $\beta(k, \alpha)$  показана на рис. 2, *a* при  $Re_m = 10$ . Для любого значения  $\alpha \in (-\pi/2; \pi/2)$  имеется диапазон волнового числа  $0 < k < k_n(\alpha)$ , в котором инкремент положительный и достигает максимального значения. Абсолютный максимум поверхности  $\beta(k, \alpha)$  достигается при  $\alpha = 0$ , т. е. для волны в направлении гравитации. На рис. 2, *b* показаны кривые, полученные сечением поверхности  $\beta(k, \alpha)$  плоскостями  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = \pi/4$  и  $\alpha = \pi/2$ . Область неустойчивости  $0 < k < k_n(\alpha)$  сужается с ростом  $|\alpha|$  и полностью исчезает при  $|\alpha| = \pi/2$ , т. е. в горизонтальном направлении возмущения не растут. На рис. 3, *a* показана поверхность  $c = c(k, \alpha)$ , а на рис. 3, *b* — кривые, полученные сечением плоскостями  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = \pi/4$  и  $\alpha = \pi/2$ . Фазовая скорость тоже монотонно уменьшается с ростом  $|\alpha|$ . Как видно из рис. 3, в горизонтальном направлении при  $k \rightarrow 0$  реализуются нейтральные стоячие волны, которые с увеличением  $k$  превращаются в бегущие затухающие капиллярные волны. Итак, в свободно стекающей пленке наиболее быстро растут волны в направлении гравитации,

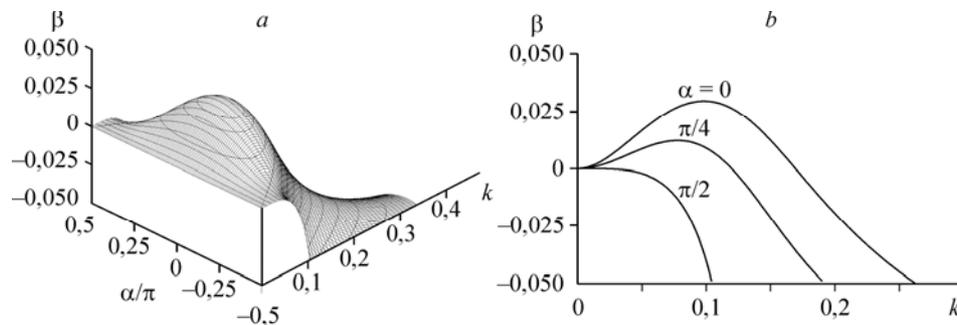


Рис. 2. Поверхность  $\beta(k, \alpha)$  при  $r = 0$ ,  $Re_m = 10$  (*a*); кривые  $\beta(k)$  при  $r = 0$ ,  $Re_m = 10$  для различных значений угла распространения волны  $\alpha$  (*b*).

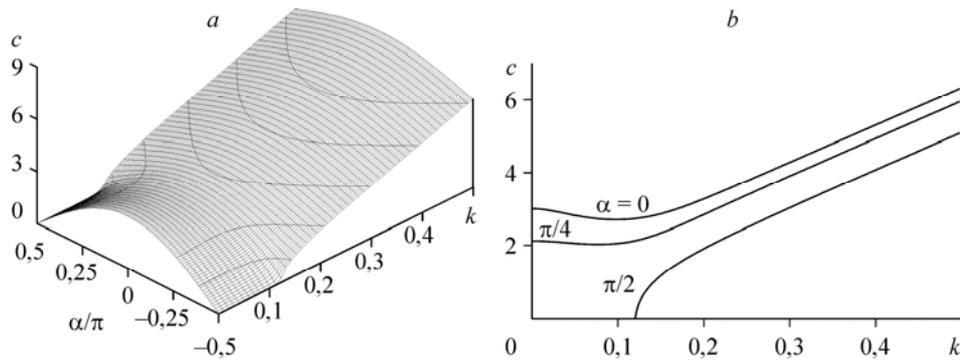


Рис. 3. Поверхность  $c(k, \alpha)$  при  $r = 0$ ,  $Re_m = 10$  (a); кривые  $c(k)$  при  $r = 0$ ,  $Re_m = 10$  для различных значений угла распространения волны  $\alpha$  (b).

но возмущения могут расти также и в близких направлениях. Вследствие этого двумерные естественно развивающиеся волны становятся трехмерными.

На рис. 4, 5 показаны результаты расчетов при наличии потока газа ( $r = 1$ ,  $Re_m = 10$ ). В отличие от гравитационной пленки, поверхности  $\beta(k, \alpha)$  (рис. 4, a) и  $c(k, \alpha)$  (рис. 5, a) несимметричны относительно сечения  $\alpha = 0$ . Абсолютный максимум поверхности  $\beta(k, \alpha)$  достигается при  $\alpha^* / \pi \approx 0,28$ . Это означает, что быстрее всего волны растут в направлении, не совпадающем ни с гравитацией, ни с потоком газа. Волны могут расти также в горизонтальном направлении (т. е. в направлении движения газа). Угол между направлением распространения растущих волн и гравитацией может быть больше  $\pi/2$ . На рис. 4, b показаны кривые, полученные сечением поверхности  $\beta(k, \alpha)$  плоскостями  $\alpha = \text{const}$ . Значения  $\alpha = \pm\pi/2$  дают совпадающие кривые  $\beta(k)$ , т. к. величина инкремента не меняется при изменении знака координаты  $\xi$ . Из рис. 5, a видно, что короткие (капиллярные) волны имеют положительные значения скорости в диапазоне  $-0,4 < \alpha/\pi < 0,5$  и отрицательные значения в диапазоне  $-0,5 < \alpha/\pi < -0,4$ . Изменение знака фазовой скорости происходит при малом изменении угла  $\alpha$ , поэтому кажется, будто поверхность  $c(k, \alpha)$  имеет разрыв. Это объясняется тем, что в широком диапазоне угла  $\alpha$  капиллярные волны распространяются вниз (по оси  $O\xi$ ), и только для направления, близкого к горизонтальному, волны распространяются в сторону

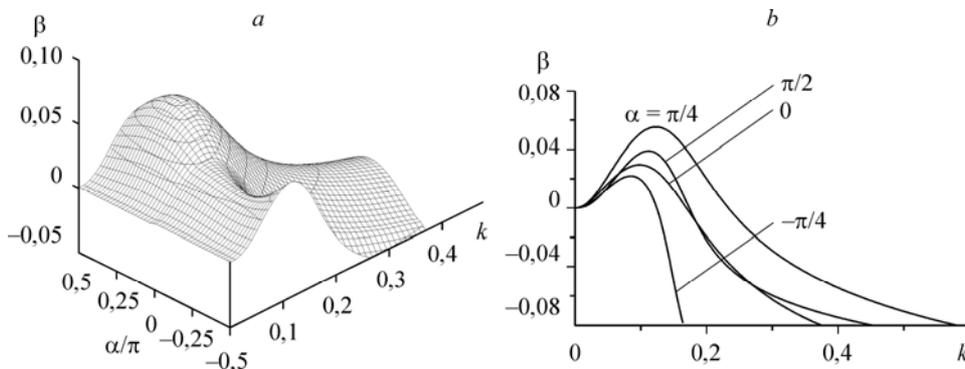


Рис. 4. Поверхность  $\beta(k, \alpha)$  при  $r = 1$ ,  $Re_m = 10$  (a); кривые  $\beta(k)$  при  $r = 1$ ,  $Re_m = 10$  для различных значений угла распространения волны  $\alpha$  (b).

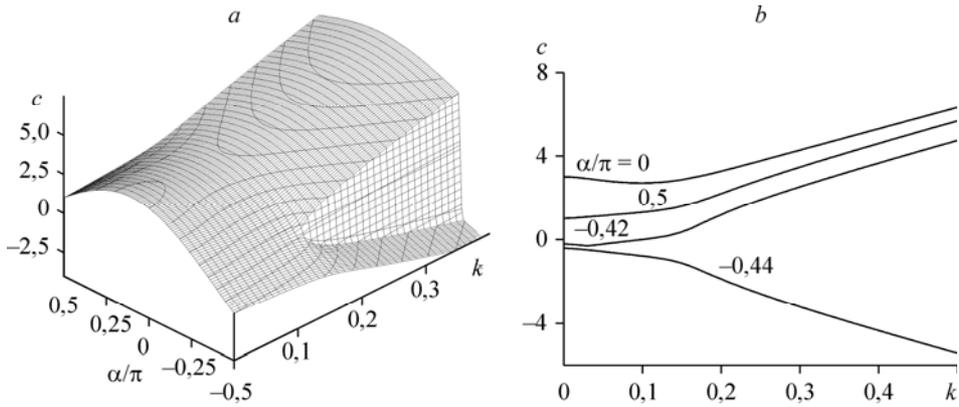


Рис. 5. Поверхность  $c(k, \alpha)$  при  $r = 1$ ,  $Re_m = 10$  (a); кривые  $c(k)$  при  $r = 1$ ,  $Re_m = 10$  различных значений угла распространения волны  $\alpha$  (b).

движения газа. Линия нулевого значения скорости на поверхности  $c(k, \alpha)$  пересекает плоскость  $k = 0$  при  $\alpha/\pi \approx -0,4$ . Это означает, что в направлении  $\alpha/\pi \approx -0,4$  длинные волны являются стоячими растущими волнами. Кривые, полученные сечением поверхности  $c(k, \alpha)$  плоскостями  $\alpha = \text{const}$ , показаны на рис. 5, b. Расчеты показывают, что асимметрия поверхностей  $\beta(k, \alpha)$  и  $c(k, \alpha)$  усиливается с ростом скорости газа (значения  $r$ ). При увеличении  $r$  абсолютный максимум поверхности  $\beta(k, \alpha)$  также растет.

На рис. 6, 7 и 8 приведены кривые: нейтральное волновое число  $k_n(\alpha)$ , а также волновое число  $k_{\text{max}}(\alpha)$  и инкремент  $\beta_{\text{max}}(\alpha)$  для максимально растущих волн при  $Re_m = 5$  и различных значениях  $r$ . Максимум каждой кривой на рис. 8 представляет собой абсолютный максимум  $\beta^*$  поверхности  $\beta(k, \alpha)$ . С увеличением скорости газа (значения  $r$ ) происходит резкое расширение области неустойчивости для углов  $\alpha$ , близких к  $\pm\pi/2$  (см. рис. 6). Инкремент для этих направлений также значительно возрастает с ростом  $r$  (рис. 8). Для малых углов  $\alpha$  увеличение инкремента и расширение области неустойчивости незначительные.

На рис. 9 показаны направления распространения волн с максимальным инкрементом  $\beta^*$  в виде кривых  $\alpha^*(r)$  при различных значениях  $Re_m$ . Видно, что

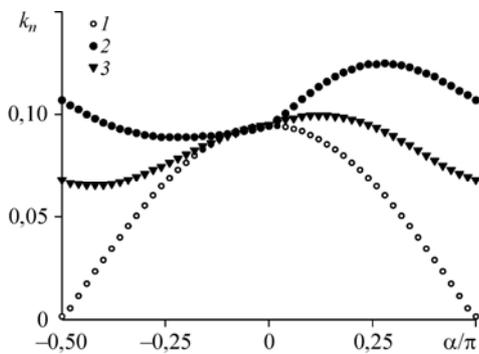


Рис. 6. Нейтральное волновое число  $k_n$  при  $Re_m = 5$  для  $r = 0$  (1), 0,5 (3), 1 (2).

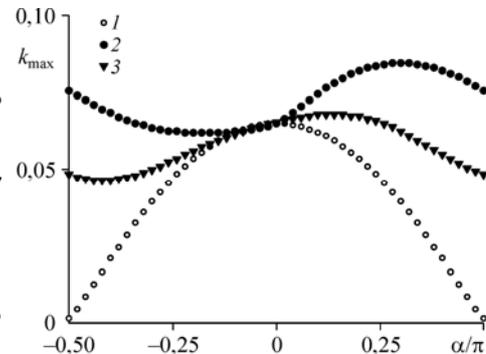


Рис. 7. Волновое число  $k_{\text{max}}$  при  $Re_m = 5$  для  $r = 0$  (1), 0,5 (3), 1 (2).

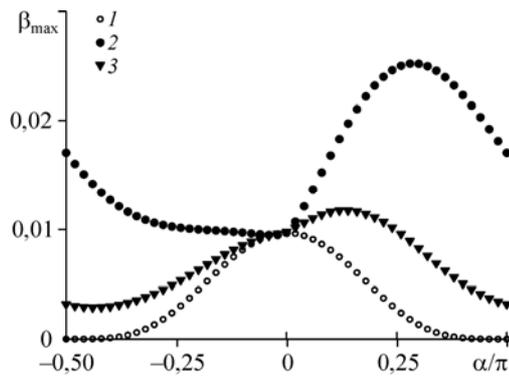


Рис. 8. Инкремент волн максимального роста при  $Re_m = 5$  для  $r = 0$  (1), 0,5 (3), 1 (2).

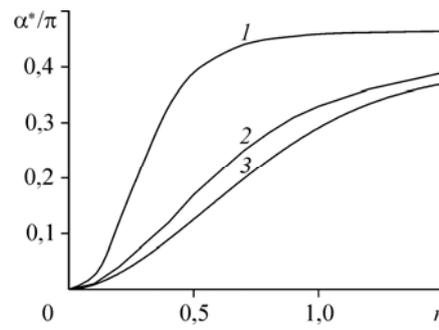


Рис. 9. Направление распространения волн с максимальным инкрементом для  $Re_m = 1$  (1), 3 (2), 5 (3).

с уменьшением  $Re_m$  значения  $\alpha^*$  возрастают. Для тонкой пленки ( $Re_m < 1$ ) при  $r > 1$  волны с максимальным инкрементом распространяются почти в горизонтальном направлении.

### Заключение

На основе интегрального подхода впервые разработана модель, описывающая трехмерное возмущенное течение пленки жидкости, движущейся под действием гравитации и произвольно направленного турбулентного потока газа. В этой модели элементарные волны в пленке рассматриваются как двумерные, но могут распространяться в любом направлении. Продемонстрирована возможность простого вычисления касательного напряжения на межфазной поверхности в трехмерном случае через соответствующие значения для двумерной задачи. В линейной постановке система трех выведенных уравнений сводится к одному уравнению для возмущения толщины пленки, которое имеет двухволновую структуру.

Для конкретного случая вертикальной пленки и горизонтального потока газа проведены расчеты инкремента и фазовой скорости волн. Результаты расчетов позволяют сделать следующие выводы:

- 1) движение газа приводит к расширению области неустойчивости для всех направлений распространения волн, особенно для направлений близких к направлению движения газа;
- 2) волны с максимальным инкрементом распространяются в некотором промежуточном направлении между газовым потоком и гравитацией;
- 3) наличие поперечного газового потока существенно расширяет диапазон направлений, в которых распространяются быстро растущие возмущения. Вследствие этого развитие трехмерных волн из двумерных возмущений должно происходить значительно быстрее, чем для свободно стекающей пленки.

### Обозначения

$c$  — фазовая скорость волны, м/с,  
 $g$  — ускорение свободного падения, м/с<sup>2</sup>,  
 $h$  — толщина пленки, м,  
 $u, v, w$  — компоненты скорости жидкости, м/с,  
 $k$  — волновое число, м<sup>-1</sup>,  
 $l$  — длина волны, м,  
 $H$  — возмущение толщины пленки,

$x, y, z$  — координаты, м,  
 $t$  — время, с,  
 $q$  — расход жидкости по оси  $Ox$ , м<sup>2</sup>/с,  
 $m$  — расход жидкости по оси  $Oz$ , м<sup>2</sup>/с,  
 $p$  — давление, Н/м<sup>2</sup>,  
 $M$  — возмущение расхода по оси  $Oz$ ,  
 $Q$  — возмущение расхода по оси  $Ox$ .

### Греческие символы

$\theta$ — угол наклона пластины к горизонту,		$\beta$ — временной инкремент волны, $c^{-1}$ ,
$\nu$ — кинематическая вязкость, $m^2/c$ ,		$\sigma$ — поверхностное натяжение, Н/м,
$\alpha$ — угол между направлением распространения волны и гравитацией,		$\rho$ — плотность жидкости, $kg/m^3$ ,
$\delta$ — угол между направлением газового потока и гравитацией,		$\mu$ — динамическая вязкость, $kg/mc$ ,
		$\xi, \eta$ — координаты, м,
		$\tau$ — касательное напряжение, $N/m^2$ .

### Индексы

max — волна максимального роста,		$s$ — на поверхности жидкости,
* — волны с максимальным инкрементом,		$W$ — на пластине.
0 — невозмущенное состояние,		

### Безразмерные критерии

$Re_m = gh_m^3 / 3\nu^2$ — безразмерная толщина пленки,		$We = (3Fi / Re_m^5)^{1/3}$ — число Вебера,
$Fi = \sigma^3 / \rho^3 g\nu^4$ — пленочное число,		
$r =  \tau_0  / \rho gh_m$ — безразмерное касательное напряжение на поверхности пленки.		

### Список литературы

1. Алексеенко С.В., Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г. Волновое течение пленок жидкости // Новосибирск: ВО «Наука», 1992. 256 с.
2. Гугучкин В.В., Демёхин Е.А., Калугин Г.Н., Маркович Э.Э., Пикин В.Г. О линейной и нелинейной устойчивости совместного плоскопараллельного течения пленки жидкости и газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 1. С. 36–42.
3. Демёхин Е.А. Нелинейные волны в пленке жидкости, увлекаемой турбулентным газовым потоком // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 2. С. 37–42.
4. Benjamin T.B. Shearing flow over a wavy boundary // J. Fluid Mech. 1959. Vol. 6, No. 2. P. 161–205.
5. Alekseenko S.V., Nakoryakov V.E. Instability of a liquid film moving under the effect of gravity and gas flow // Int. J. Heat Mass Transfer. 1995. Vol. 38. P. 2127–2134.
6. Aktershev S.P., Alekseenko S.V. Interfacial instabilities in an annular two-phase flow // Russ. J. Eng. Thermophys. 1996. Vol. 6, No. 4. P. 307–320.
7. Трифонов Ю.Я. Волнообразование при стекании пленки вдоль наклонной поверхности при наличии фазового перехода и касательного напряжения на свободной поверхности // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 2. С. 109–119.
8. Демёхин Е.А., Токарев Г.Ю., Шкадов В.Я. Неустойчивость и нелинейные волны в вертикальной пленке жидкости, текущей в противотоке с турбулентным газовым потоком // ТОХТ. 1989. Т. 23, № 1. С. 64–70.
9. Uma V., Usha R. Weakly nonlinear stability analysis of a falling film with countercurrent gas flow // Nonlinear Dyn. 2008. Vol. 52. P. 115–128.
10. Alekseenko S.V., Aktershev S.P., Cherdantsev A.V., Kharlamov S.M., Markovich D.M. Primary instabilities of liquid film flow sheared by turbulent gas stream // Int. J. Multiphase Flow. 2009. Vol. 35. P. 617–627.
11. Шкадов В.Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести // Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. № 1. С. 43–51.
12. Aktershev S.P., Alekseenko S.V. Influence of condensation on the stability of a liquid film moving under the effect of gravity and turbulent vapor flow // Int. J. Heat Mass Transfer. 2005. Vol. 48. P. 1039–1052.

Статья поступила в редакцию 11 мая 2011 г.