УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ ДИЛАТАНСИИ НА ТИП СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

В. А. Бабаков, А. В. Шиманская

Оклендский технологический университет, 1142 Окленд, Новая Зеландия
E-mail: vitali.babakov@aut.ac.nz

При использовании классической модели идеального жесткопластического материала в случае отсутствия упрочнения определяющая система уравнений является системой гиперболического типа, а при учете упрочнения тип системы уравнений меняется на эллиптический. При этом нарушается соответствие между наблюдаемыми в опытах линиями локализации деформаций и характеристиками квазилинейной системы. Показано, что в случае учета дилатансии сохраняется гиперболический тип системы уравнений.

Ключевые слова: дилатансия, упрочнение, квазилинейная система, гиперболический тип, характеристики.

Введение. Постановка краевых задач, их корректная формулировка и методы решения существенно зависят от типа системы уравнений, описывающих деформирование материала. При использовании классической модели идеального жесткопластического материала в случае плоской деформации определяющая система уравнений является системой гиперболического типа [1]. Входящие в эту систему два семейства характеристик коррелируют с наблюдаемыми в опытах линиями скольжения — линиями Людерса — Чернова, возникающими на поверхности металлов в результате пластической деформации. Аналогичные характеристики, описываемые моделью сыпучих сред, также коррелируют с наблюдаемыми в опытах [2, 3] линиями локализации деформаций.

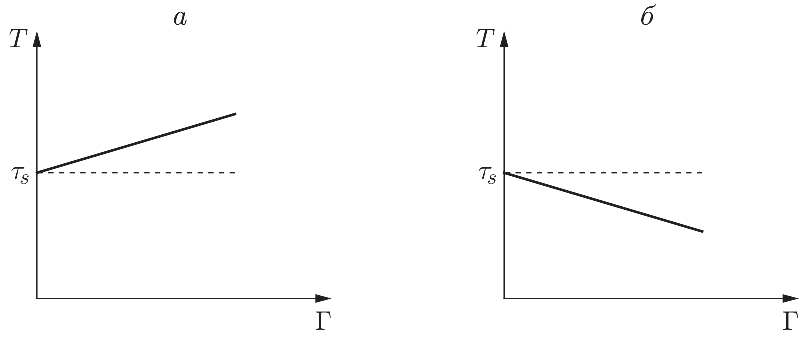
Однако при использовании модели жесткопластического материала с учетом упрочнения определяющая система уравнений становится системой эллиптического типа. При этом нарушаются корреляции характеристик с линиями скольжения (или локализации деформаций). В случае сред, деформирующихся с упрочнением, методы решения задач идеальной пластичности становятся непригодными.

Указанные математические модели твердого тела, имеющие близкие формулировки, дают существенно различающиеся результаты.

В данной работе с использованием модели жесткопластического материала (все упругие составляющие деформаций равны нулю) в рамках задачи о плоской деформации исследовано совместное влияние дилатансии и упрочнения на тип определяющей системы уравнений.

Жесткопластический материал, деформирующийся с упрочнением (разупрочнением) и дилатансией. В случае плоской задачи имеют место следующие соотношения для напряжений:

$$\sigma_x = \sigma_n - T\sin 2\theta, \quad \sigma_y = \sigma_n + T\sin 2\theta, \quad \tau_{xy} = T\cos 2\theta.$$



Зависимость касательного напряжения T от главного сдвига Г:
а — с учетом упрочнения, *б* — с учетом разупрочнения

Здесь $\theta + \pi/4 = (1, x)$ — угол между первым главным направлением и осью x; $\sigma_n = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$; $T = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$.

Условие пластичности с учетом упрочнения и разупрочнения (см. рисунок) имеет вид

$$T = \tau_s + G\Gamma,$$

где Г — главный сдвиг; τ_s — предел текучести; $G > 0$ — модуль упрочнения, $G < 0$ — модуль разупрочнения, при $G = 0$ имеет место идеальная пластичность.

Дилатансия определяет связь между сдвиговой деформацией и объемным сжатием:

$$\varepsilon^p = \vartheta\Gamma^p$$

(ϑ — коэффициент дилатансии). Для напряжений эту связь можно представить в виде

$$\sigma_n = K\vartheta\Gamma = K_1\Gamma.$$

Здесь и далее индекс p опущен.

Выражения для компонент тензора напряжений можно записать в виде

$$\sigma_x = K_1\Gamma - (\tau_s + G\Gamma)\sin 2\theta,$$
$$\sigma_y = K_1\Gamma + (\tau_s + G\Gamma)\sin 2\theta,$$
$$\tau_{xy} = (\tau_s + G\Gamma)\cos 2\theta$$

и подставить их в уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0.$$

В результате получаем систему двух квазилинейных уравнений в частных производных относительно функций Г и θ:

$$(K_1 - G\sin 2\theta)\frac{\partial \Gamma}{\partial x} + G\cos 2\theta\frac{\partial \Gamma}{\partial y} - 2(\tau_s + G\Gamma)\cos 2\theta\frac{\partial \theta}{\partial x} - 2(\tau_s + G\Gamma)\sin 2\theta\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0,$$
$$G\cos 2\theta\frac{\partial \Gamma}{\partial x} + (K_1 + G\sin 2\theta)\frac{\partial \Gamma}{\partial y} - 2(\tau_s + G\Gamma)\sin 2\theta\frac{\partial \theta}{\partial x} + 2(\tau_s + G\Gamma)\cos 2\theta\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0.$$

Добавив к этим уравнениям два очевидных тождества

$$d\Gamma = \frac{\partial \Gamma}{\partial x}dx + \frac{\partial \Gamma}{\partial y}dy, \qquad d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x}dx + \frac{\partial \theta}{\partial y}dy,$$

получаем систему четырех квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных, которую можно рассматривать как алгебраическую систему уравнений относительно этих производных [4]. Тип системы дифференциальных уравнений зависит от разрешимости этой алгебраической системы.

Для того чтобы существовало нетривиальное решение системы, ее главный определитель должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix} K_1 - G\sin 2\theta & G\cos 2\theta & -A\cos 2\theta & -A\sin 2\theta \\ G\cos 2\theta & K_1 + G\sin 2\theta & -A\sin 2\theta & A\cos 2\theta \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \end{vmatrix} = 0.$$

Здесь $A = 2(\tau_s + G\Gamma)$. Из полученного выражения следует уравнение

$$\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2(-K_1\sin 2\theta + G) - 2\,\frac{dy}{dx}\,K_1\cos 2\theta + K_1\sin 2\theta + G = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{K_1\cos 2\theta \pm \sqrt{K_1^2 - G^2}}{-K_1\sin 2\theta + G},$$

действительные решения которого зависят от дискриминанта $K_1^2 - G^2$.

Таким образом, при $|K_1| > |G|$ система дифференциальных уравнений является гиперболической, при $K_1 = G$ — параболической, при $|K_1| < |G|$ — эллиптической.

С учетом того что характеристики системы следует интерпретировать как линии скольжения, наблюдаемые в опытах, можно сделать вывод о том, что линии скольжения (локализации деформаций) образуются в случае $|K_1| > |G|$.

Независимо от наличия или отсутствия дилатансии из условия $G = 0$ получаем два семейства известных ортогональных характеристик

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta, \qquad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg}\theta.$$

В случае наличия упрочнения и дилатансии неортогональные характеристики описываются уравнениями

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos 2\theta \pm \sqrt{1-\delta^2}}{-\sin 2\theta + \delta},$$

где $\delta = G/K_1$.

Условия на характеристиках можно найти, приравнивая к нулю вспомогательные определители. Заменяя первый столбец в выражении для определителя на правые части системы четырех дифференциальных уравнений, имеем

$$\begin{vmatrix} 0 & G\cos 2\theta & -A\cos 2\theta & -A\sin 2\theta \\ 0 & K_1 + G\sin 2\theta & -A\sin 2\theta & A\cos 2\theta \\ d\Gamma & dy & 0 & 0 \\ d\theta & 0 & dx & dy \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляя определитель по столбцам, получаем уравнение

$$d\Gamma \begin{vmatrix} G\cos 2\theta & -A\cos 2\theta & -A\sin 2\theta \\ K_1 + G\sin 2\theta & -A\sin 2\theta & A\cos 2\theta \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix} -$$

$$- \, d\theta \begin{vmatrix} G\cos 2\theta & -A\cos 2\theta & -A\sin 2\theta \\ K_1 + G\sin 2\theta & -A\sin 2\theta & A\cos 2\theta \\ dy & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\delta\cos 2\theta\, d\Gamma\Big(\sin 2\theta+\cos 2\theta\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^{-1}\Big)+(1+\delta\sin 2\theta)\, d\Gamma\Big(-\cos 2\theta+\sin 2\theta\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^{-1}\Big)= \\ =2\Big(\frac{\tau_s}{K_1}-\delta\Gamma\Big)\, d\theta.$$

Следовательно,

$$\frac{d\Gamma}{2(\tau_s/K_1-\delta\Gamma)}=\pm\frac{d\theta}{\sqrt{1-\delta^2}}.$$

Условие гиперболичности $|K\vartheta|>|G|$ позволяет оценить величину коэффициента дилатансии ϑ при заданном упрочнении, необходимую для образования линий локализации деформаций. Если упрочнение велико, т. е. значение G близко к значению упругого модуля сдвига μ, то

$$\vartheta>\frac{\mu}{\lambda+2\mu/3}.$$

Например, для среды Пуассона при $\lambda=\mu$ получаем $\vartheta>0{,}6$. При меньших упрочнениях значение коэффициента ϑ уменьшается. При очень малом упрочнении линии локализации образуются всегда.

Приведенные выше рассуждения и выводы основаны на предположении о тождественности характеристик дифференциальных уравнений и линий скольжения (линий локализации деформаций).

Поле скоростей. Тензорные соотношения для скоростей деформации можно записать в виде

$$\dot\varepsilon_x=\dot\varepsilon-\dot\Gamma\sin 2\theta,\quad \dot\varepsilon_y=\dot\varepsilon+\dot\Gamma\sin 2\theta,\quad \dot\gamma_{xy}=\dot\Gamma\cos 2\theta,$$

где

$$\dot\varepsilon=\frac{\dot\varepsilon_x+\dot\varepsilon_y}{2},\qquad \dot\Gamma=\frac{1}{2}\sqrt{(\dot\varepsilon_y-\dot\varepsilon_x)^2+\dot\gamma_{xy}^2}\,.$$

С учетом дилатансионной зависимости

$$\dot\varepsilon=\vartheta\dot\Gamma$$

первые два соотношения можно представить в виде

$$\dot\varepsilon_x=(\vartheta-\sin 2\theta)\dot\Gamma,\qquad \dot\varepsilon_y=(\vartheta+\sin 2\theta)\dot\Gamma,$$

откуда следует

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,(\sin 2\theta+\vartheta)+\frac{\partial v}{\partial y}\,(\sin 2\theta-\vartheta)=0$$

(u, v — перемещения). В случае отсутствия дилатансии последнее уравнение переходит в известное условие несжимаемости

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

Принимая допущение о соосности тензоров напряжений и скоростей деформации, получаем известное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}+\operatorname{tg}2\theta\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=0.$$

Добавляя к этой системе очевидные тождества

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy, \qquad dv = \frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy,$$

получаем замкнутую систему четырех линейных уравнений для четырех неизвестных $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$, $\partial v/\partial y$.

Для того чтобы существовало нетривиальное решение системы, ее главный определитель должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \sin 2\theta + \vartheta & 0 & 0 & \sin 2\theta + \vartheta \\ 1 & \operatorname{tg} 2\theta & \operatorname{tg} 2\theta & -1 \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\cos 2\theta \pm \sqrt{1 - \vartheta^2}}{\sin 2\theta + \vartheta}.$$

Таким образом, при положительном дискриминанте система всегда имеет два семейства вещественных характеристик, поскольку для реальных сред коэффициент дилатансии $|\vartheta| < 1$. Это означает, что система дифференциальных уравнений, записанная для скоростей деформаций, всегда является гиперболической независимо от наличия или отсутствия дилатансии.

Следует отметить, что характеристики уравнений для скоростей не совпадают с характеристиками уравнений в случае напряженного состояния.

Таким образом, учет дилатансии позволяет устранить указанное выше противоречие и сохранить гиперболический тип системы уравнений для жесткопластического материала, деформирующегося с упрочнением (разупрочнением). Кроме того, коэффициент дилатансии, входящий в формулы для дискриминантов, имеет вторую степень, т. е. основные результаты справедливы как для положительного коэффициента, так и для отрицательного (как в случае расширения, так и в случае уплотнения среды). Аналогичный вывод справедлив для модуля упрочнения (разупрочнения) материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Качанов Л. М.** Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969.
2. **Ревуженко А. Ф., Стажевский С. Б., Шемякин Е. И.** О механизме деформирования сыпучего материала при больших сдвигах // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1974. № 3. С. 130–133.
3. **Ревуженко А. Ф., Стажевский С. Б., Шемякин Е. И.** О несимметрии пластического течения в сходящемся симметричном канале // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1977. № 3. С. 3–9.
4. **Христианович С. А.** Плоская задача математической теории пластичности при внешних силах, заданных на замкнутом контуре // Мат. сб. 1936. Т. 1, № 4. С. 511–534.

Поступила в редакцию 12/IV 2013 г.