

ИНЕРЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ МОДЕЛЯХ ЭВОЛЮЦИИ ПЛАМЕНИ

С. С. Минаев, Р. В. Фурсенко

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН им. С. А. Христиановича, 630090 Новосибирск
minaev@itam.nsc.ru

Целью данной работы является разработка новых моделей эволюции фронта пламени, способных описывать как явления инициирования, затухания и пульсаций, так и обычный режим распространения. Обычные уравнения, составляющие одномерную диффузионно-тепловую модель, были упрощены до двух обыкновенных дифференциальных уравнений для координаты фронта пламени и температуры на фронте пламени. Полученные уравнения допускают решения, описывающие, например, зажигание, затухание и нелинейные колебания пламени, которые наблюдаются при горении газа в микроканалах с повышенной температурой стенок или в случае тепловой неустойчивости при безгазовом горении конденсированных веществ. Подобие исходных диффузионно-тепловых моделей, предполагающих существование бесконечно тонкой зоны химических реакций, позволило применить общий метод для вывода упрощенных уравнений в физически разных системах. Было показано, что моделирование колебаний пламени требует, как минимум, рассмотрения эффектов, связанных с ускорением пламени («инерцией» пламени), и скорости изменения температуры фронта пламени. Точность предложенной модели с инерционными эффектами была проверена результатами прямого численного моделирования исходных уравнений.

Ключевые слова: фронт пламени, нормальная скорость, зажигание/затухание пламени, микроканал, тепловая неустойчивость.

ВВЕДЕНИЕ

Представление фронта пламени предварительно перемешанной смеси газов в виде поверхности, разделяющей свежую смесь и продукты горения, существенно облегчает решение многих задач горения и составляет основу многих упрощенных моделей эволюции пламени, таких, например, как модель «flamelet» [1]. В модели «flamelet» предполагается, что нестационарное поведение фронта пламени определяется локальной нормальной скоростью распространения фронта по несгоревшей смеси. Значение нормальной скорости зависит от состава несгоревшей смеси и температуры газа на фронте пламени и может быть получено либо из предварительных расчетов, использующих одномерную модель распространения пламени с детальной кинетикой химических реакций, либо из эксперимента.

Таким образом, существующие модели распространения фронта пламени предполагают, что эволюция пламени контролируется исключительно локальной нормальной скоростью.

Согласно этим представлениям значение нормальной скорости может быть получено из решения задачи о стационарном распространении волны реакции с учетом параметров, характеризующих течение свежей смеси, теплотери, диаметр и температуру стенок канала, в котором распространяется пламя. Значения этих параметров зависят от текущего положения фронта пламени. В то же время в рамках этого представления невозможно описать процессы воспламенения, затухания или нелинейные пульсации пламени. Целью данной работы является формулировка модели эволюции фронта пламени, которая позволила бы описывать как эти нестационарные явления, так и обычный режим распространения пламени, описываемый моделью «flamelet». Обычные уравнения, составляющие одномерную диффузионно-тепловую модель, были упрощены до двух обыкновенных дифференциальных уравнений для координаты фронта пламени и температуры на фронте пламени. В этой работе мы проиллюстрируем применение этого метода на двух различных задачах нестационарного распространения волн горения.

Первая задача связана с описанием распространения пламени в узком канале с переменным сечением и продольным градиентом температуры в стенках. Понимание особенностей динамического поведения фронта пламени в узких каналах необходимо для развития новых технологий сжигания газов, таких, например, как сжигание бедных смесей или микрогорения [2–5]. Для проектирования малоразмерных энергопреобразующих устройств с горением газа требуются удобные модели распространения пламени в узких каналах с переменным сечением, неоднородной температурой стенок и неоднородным потоком газа. Результаты численного моделирования распространения пламени в микроканалах показали, что во многих случаях поверхность пламени плоская. Плоская поверхность пламени наблюдалась также в экспериментах по горению газа в микроканале с внешним подогревом [6]. В этом случае одномерная постановка задачи вполне оправдана, учитывая, что в практических приложениях желателен использование простых моделей, отражающих физические механизмы, ответственные за динамическое поведение фронта пламени.

Вторая задача связана с описанием динамики фронта горения в случае тепловой неустойчивости. В некоторых моделях горения твердых топлив предполагается, что горение происходит без образования газовой фазы и химическая реакция протекает в твердой фазе на границе между сгоревшим и несгоревшим веществом [7–9]. Поскольку и продукты горения, и несгоревшее вещество находятся в твердой фазе, исходная математическая модель включает в себя только уравнение распространения тепла с источником тепловыделения [7]. Этот тип горения относится к безгазовому горению конденсированных веществ. Использование того же подхода, который применялся для описания динамики фронта пламени в микроканале, позволило получить нелинейное эволюционное уравнение для фронта горения из диффузионно-тепловой модели горения безгазовых конденсированных веществ. Интересно, что приближенные уравнения, описывающие распространение высокоскоростной волны горения в микроканале с учетом бародиффузии [10], имеют тот же вид, что и уравнения, описывающие тепловую неустойчивость волны безгазового горения. Численные расчеты по этой модели, выполненные в работе [10], по-

казали, что возможно как устойчивое распространение волны горения, так и одномерные пульсации.

Следует отметить, что процессы затухания, воспламенения и пульсации пламени описаны во многих работах с использованием прямого численного моделирования в рамках диффузионно-тепловой модели. В то же время описание этих процессов на основе простого эволюционного уравнения для фронта пламени отсутствует.

В настоящей статье дана математическая формулировка исходной диффузионно-тепловой задачи со свободной границей, соответствующей случаю пламени, распространяющегося в канале, и случаю волны безгазового горения конденсированных веществ. Описан асимптотический метод, позволяющий получить эволюционное уравнение из исходной системы. В качестве примера использования данного подхода приведены решения задачи о периодическом процессе воспламенения-затухания пламени в микроканале и задачи о нелинейных пульсациях волны горения конденсированного вещества.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА

1.1. Исходные уравнения диффузионно-тепловой модели

Для плоской волны горения, распространяющейся вдоль оси x , распределения температуры газа и недостающего компонента горючей смеси описываются безразмерными уравнениями:

$$\frac{\partial T_{1,2}}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_{1,2}}{\partial x^2} + V(x) \frac{\partial T_{1,2}}{\partial x} - \Omega(x)(T_{1,2} - \theta(x)), \quad (1)$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + V(x) \frac{\partial C_1}{\partial x}, \quad C_2 = 0. \quad (2)$$

Вдали от фронта пламени граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} x \rightarrow +\infty: \quad C_1 &= 1, \quad T_1 = \sigma; \\ x \rightarrow -\infty: \quad \frac{\partial T_2}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Эти уравнения дополняются граничными условиями на фронте пламени. Вид граничных

условий, безразмерные переменные и значения параметров зависят от физической постановки задачи и приведены ниже.

1.2. Граничные условия на фронте пламени, распространяющегося в канале

В случае плоского канала с распределением температуры стенок $\theta(x)$ и расстоянием между стенками $d(x)$ безразмерные параметры и переменные в уравнениях (1), (2) такие же, как в работе [11]. В уравнениях (1), (2) T — безразмерная температура газа, измеряемая в единицах адиабатической температуры пламени T_b . Предполагается, что температура стенок канала $\theta(x)$ не меняется со временем, но зависит от координаты x и измеряется в единицах T_b . Безразмерная концентрация C измеряется в единицах C_0 — концентрации недостающего компонента свежей смеси на входе в канал. Везде индекс 1 соответствует свежей смеси, 2 — продуктам горения. Безразмерная координата x и расстояние d измеряются в единицах тепловой толщины пламени $l_{th} = D_{th}/U_b$, где D_{th} — коэффициент температуропроводности свежей смеси, U_b — скорость распространения плоского адиабатического пламени. Безразмерное время t измеряется в единицах D_{th}/U_b^2 . Безразмерная скорость газа $V(x)$ измеряется в единицах U_b , и при постоянной плотности газа выполняется условие $V(x)(d(x))^2 = \text{const}$. Параметр σ определяется как отношение $\sigma = T_0/T_b$, где T_0 — начальная температура свежей смеси. Безразмерный параметр $\Omega(x) = 4\text{Nu}_{th}^2/(d(x))^2$ характеризует интенсивность теплообмена между газом и стенками канала, где $\text{Nu} = \alpha d(x)/\lambda_g$ — число Нуссельта для плоского канала с поперечным размером $d(x)$, коэффициентом теплообмена α и теплопроводностью газа λ_g . На поверхности пламени $x = x_f(t)$ температура, концентрация, тепловые потоки и поток концентрации связаны следующими граничными условиями:

$$T_1 = T_2 = T_f, \quad (4)$$

$$C_1 = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial x} = \exp \frac{N}{2(1-1/T_f)}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial x} - \frac{\partial T_1}{\partial x} = (1-\sigma) \frac{\partial C_1}{\partial x}. \quad (7)$$

Здесь $N = T_a/T_b$ — безразмерная температура активации химической реакции, T_f — безразмерная температура газа на фронте пламени. Предполагается, что безразмерный градиент температуры в стенках канала и изменение поперечного размера канала $d(x)$ являются малыми величинами: $|\partial\theta/\partial x| = \varepsilon \ll 1$, $|\partial d(x)/\partial x| = O(\varepsilon)$.

1.3. Граничные условия на фронте волны безгазового горения

В случае безгазового горения математическая модель включает в себя только уравнение (1) для температуры, поскольку диффузия горючего вещества отсутствует. Рассматривается случай отсутствия теплопотерь во внешнюю среду ($\Omega = 0$) и конвективного переноса ($V = 0$), поскольку и продукты горения, и исходное вещество находятся в твердой фазе. Реакция происходит на фронте горения $x = x_f(t)$, где выполняются условия [7]:

$$T_1 = T_2 = T_f, \quad (8)$$

$$\frac{dx_f}{dt} = \exp \frac{N}{2(1-1/T_f)}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial x} - \frac{\partial T_1}{\partial x} = (1-\sigma) \exp \frac{N}{2(1-1/T_f)}. \quad (10)$$

Используемые безразмерные переменные подобны тем, что использовались в п. 1.2, более подробную информацию о процедуре безразмеривания можно найти в работе [7]. Эта модель в математической постановке идентична модели распространения дозвуковой детонации в узком теплоизолированном канале, описанной в [10], если рассматривать T как безразмерное давление, а величину $N(1-\sigma)$ как число Зельдовича, где σ — отношение начальной температуры к адиабатической температуре продуктов горения.

2. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ИСХОДНЫХ УРАВНЕНИЙ

Опишем кратко метод получения эволюционных уравнений в приближении «медленной эволюции» фронта горения из исходной системы уравнений (1), (2). Предполагается, что характерный размер, на котором изменяется

диаметр канала, или характерный размер температурной неоднородности стенок канала намного превышают тепловую толщину пламени $l_{th} = D_{th}/U_b$. В этом случае производные по времени от температуры и концентрации в уравнениях (1), (2) имеют малость $1/\tau_c \approx \varepsilon$, где $\tau_c \gg 1$ — характерное безразмерное время прохождения пламенем температурной неоднородности в стенках или области, где находится сужение/расширение канала. Если считать частные производные по времени в уравнениях малыми величинами, то асимптотическое решение уравнения (2) с граничным условием (3) может быть записано в виде [11, 12]:

$$C_1 = 1 - \tilde{C}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} = -V\tilde{C} + \frac{1}{V} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} - \frac{1}{V^3} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial t^2} + \dots O\left(\frac{\partial^3 \tilde{C}}{\partial t^3}\right).$$

Решение уравнения (1) после подстановки $T_{1,2} = \tilde{T}_{1,2} + \Phi_{1,2}$ имеет такой же вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{T}_{1,2}}{\partial x} &\cong \lambda_{1,2} \tilde{T}_{1,2} \mp \\ &\mp \frac{1}{H} \frac{\partial \tilde{T}_{1,2}}{\partial t} \pm \frac{1}{H^3} \frac{\partial^2 \tilde{T}_{1,2}}{\partial t^2} + \dots, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\Phi_{1,2} \cong \theta(x)$ — стационарное частное решение уравнения (1). В выражении (12) используются обозначения $\lambda_{1,2} = -V/2 \pm H/2$ и $H = (V^2 + 4\Omega)^{1/2}$. Для того чтобы получить эволюционное уравнение для фронта пламени, необходимо найти связь между частными производными от температуры и концентрации в граничных условиях на фронте пламени (6), (7) и полными производными dx_f/dt , d^2x_f/dt^2 и dT_f/dt . Это можно сделать путем дифференцирования по времени граничных условий (4), (5) и отбрасывания членов, имеющих порядок малости $O(\tau_c^{-3})$. Здесь считается, что производная по времени имеет порядок малости $O(\tau_c^{-1})$.

В результате получаем следующие уравнения, описывающие эволюцию пламени:

$$\frac{d^2 x_f}{dt^2} = U - \frac{dx_f}{dt} - V, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_f}{dt} &= \\ &= \frac{U[(1 - \sigma)U - (U^2 + 4\Omega)^{1/2}(T_f - \theta)]}{2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь $U = \exp[N/2(1 - 1/T_f)]$ — зависимость нормальной скорости пламени от температуры фронта. Функции V , Ω и θ зависят от диаметра канала и локальной температуры стенок канала, соответствующих текущему положению фронта пламени $x = x_f(t)$.

Уравнение (13) без члена, описывающего ускорение пламени d^2x_f/dt^2 , представляет собой классическое уравнение распространения пламени по свежей смеси с нормальной скоростью U , зависящей от температуры на фронте пламени. Новым элементом здесь является учет ускорения фронта пламени или, иначе, «инерции» пламени [11].

Уравнение (14) описывает баланс тепловых потоков на фронте пламени и дает связь между температурой на фронте пламени T_f и текущей координатой фронта пламени x_f . При постоянной температуре стенок $\Theta = \sigma$ (в этом случае $d^2x_f/dt^2 = 0$, $dT_f/dt = 0$) уравнения (13) и (14) переходят в уравнения, описывающие неадиабатическое пламя [12]:

$$D_f = \exp\left[\frac{N}{2(1 - 1/T_f)}\right], \quad (15)$$

$$\sqrt{D_f^2 + 4\Omega(T_f - \sigma)} = (1 - \sigma)D_f.$$

Здесь $D_f = V(x_f) + dx_f/dt$ — нормальная скорость неадиабатического пламени, которая находится из решения уравнений (15). Известно, что если параметр теплотеря меньше критического значения

$$\Omega < \Omega_c = \frac{1}{2e(1 - \sigma)N}, \quad (16)$$

то уравнение (15) имеет два решения. Решение с большим значением скорости устойчиво, а с меньшим — неустойчиво. В частности, если пламя распространяется в канале, то существует критический диаметр канала d_c , который определяется выражением $\Omega = 4Nu_{th}^2/d_c^2 = \Omega_c$. Если диаметр канала равен критическому, то уравнения (15) допускают единственное решение $D_{f,c} = 1/\sqrt{e}$ [13]. При $d < d_c$ уравнения (15) не имеют решений и, следовательно, пламя не может распространяться в канале, если расстояние между стенками канала меньше d_c . Таким образом, согласно общепринятой модели (15) невозможно прохождение пламенем сужения в канале, если минимальное значение диаметра канала меньше критического значения. В следующем параграфе приведены результаты прямого

численного моделирования задачи в исходной диффузионно-тепловой постановке и результаты, полученные в рамках предлагаемой модели, которые показывают, что в некоторых случаях эти выводы могут быть неверны. Поэтому новая формулировка модели эволюции фронта пламени содержит принципиальную новизну.

3. ДИНАМИКА ПЛАМЕНИ В МИКРОКАНАЛЕ

3.1. Воспламенение и затухание пламени

В этом параграфе представлены результаты моделирования на основе уравнений (13), (14) периодического затухания/воспламенения пламени в прямом канале с неоднородно нагретыми стенками. Это явление описано в работах [6, 13] и экспериментально наблюдалось при горении предварительно перемешанной смеси газов в неравномерно нагретой трубке диаметром меньше критического значения, соответствующего окружающей температуре. С одного конца трубки подавалась горючая смесь, а другой конец подогревался внешним источником тепла. Пламя после зажигания на горячем конце трубки распространялось против потока и затухало на холодном конце. После некоторой задержки пламя зажигалось снова в нагретой части трубки, и процесс повторялся. Это явление названо периодическим затуханием/воспламенением (FREI) и наблюдалось в некотором диапазоне расходов газа. Вне этого диапазона, как при больших, так и при малых расходах газа, горение было устойчивым. Особенности динамического поведения пламени описаны во многих работах (см., например, [14–16]), в данном параграфе мы хотели бы продемонстрировать, что это явление может быть описано в рамках предлагаемой модели (13), (14).

Предположим для простоты, что стационарное распределение температуры в стенках канала описывается выражением

$$\theta(x) = \sigma + (\Theta - \sigma) \exp(-x/L), \quad \text{если } x > 0; \quad (17)$$

$$\theta(x) = \Theta, \quad \text{если } x < 0,$$

где L — безразмерный параметр, характеризующий расстояние, на котором температура стенки увеличивается от σ до Θ . На рис. 1

приведены результаты моделирования на фазовой плоскости $(x_f, dx_f/dt)$ процесса периодического воспламенения/затухания в рамках модели (13), (14). В момент времени, когда пламя движется против потока ($dx_f/dt > 0$, верхняя часть замкнутой кривой на рис. 1), скорость пламени относительно свежей смеси больше критического значения: $D_f > D_{f,c} = 1/\sqrt{e}$. Этот режим горения соответствует обычному распространению пламени и может быть описан в рамках классической модели, не учитывающей ускорения фронта реакции. В то же время затухание пламени, перенос фронта раздела между свежим газом и продуктами горения и воспламенение (нижняя часть замкнутой кривой, включающей части кривой около точек поворота на рис. 1) не могут быть описаны в рамках обычной модели. Предлагаемая модификация модели позволяет это сделать. На рис. 1 показано, что, двигаясь против потока, пламя достигает точки, где происходят падение температуры пламени и почти полное прекращение тепловыделения. После этого фронт, разделяющий продукты горения и свежую смесь, движется вниз по потоку ($dx_f/dt < 0$). Скорость распространения пламени относительно стенок близка к скорости движения свежей смеси $-V$. На рис. 2 приведена зависимость температуры пламени от его координаты, рассчитанная при тех же параметрах, что и на рис. 1. Видно, что температура пламени падает почти до значения температуры окружающей среды в точке поворота, расположенной сверху по потоку, и поэтому процесс можно рассматривать как затухание пламени. Когда пламя движет-

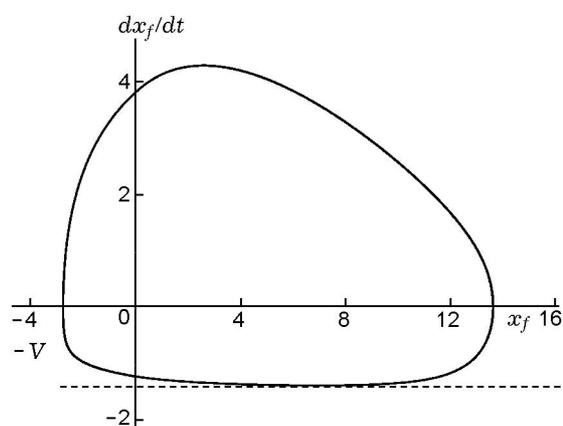


Рис. 1. Фазовый портрет, построенный на основе решения (13), (14) для случая $\sigma = 0.2$, $\Theta = 0.847$, $N = 10$, $V = 1.43$, $L = 20$, $\Omega = 0.627$

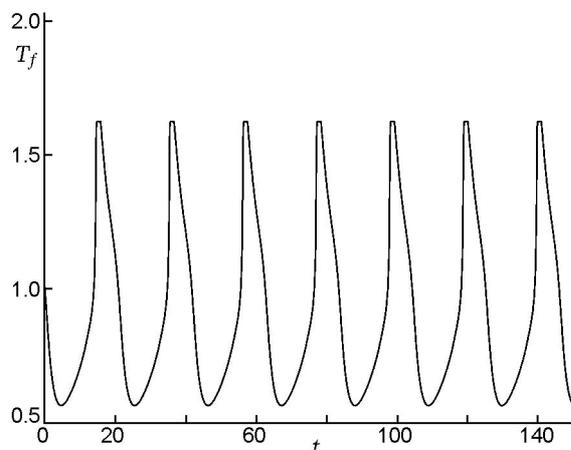


Рис. 2. Зависимость температуры пламени от времени в процессе периодического воспламенения/затухания (параметры соответствуют приведенным в подписи к рис. 1)

ся вниз по потоку, его температура возрастает из-за нагрева газа горячими стенками. Затем вблизи нижней по потоку точки поворота температура газа резко увеличивается за счет начавшейся химической реакции, эту точку поворота можно рассматривать как точку самовоспламенения. Отметим, что в обычном представлении фронт пламени рассматривался как поверхность, на которой происходит интенсивное тепловыделение в ходе химической реакции. Скорость реакции сильно зависит от температуры, и реакция протекает в узком температурном интервале, расположенном вблизи адиабатической температуры $T_f \approx 1$. Если температура пламени выходит за рамки этого интервала, то выделение тепла в ходе химической реакции становится пренебрежимо малым и фронт пламени превращается в границу раздела между свежей смесью и продуктами горения. В отличие от общепринятой модели, новая формулировка (13), (14) позволяет описать переход между обычным фронтом пламени и границей раздела между несгоревшим и сгоревшим газом.

3.2. Прохождение сужения канала

Приведем решение задачи о прохождении пламенем цилиндрического канала с сужением в рамках модели (13), (14). Диаметр канала задается формулой $d = d_0[1 + p - pL^2/(x^2 + L^2)]$, где d_0 — минимальный диаметр сужения трубки, которое расположено в точке $x = 0$, а

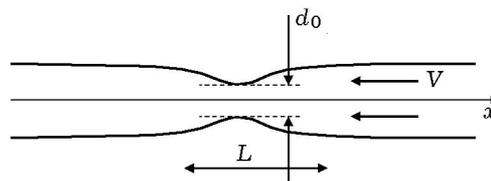


Рис. 3. Схема микроканала с сужением

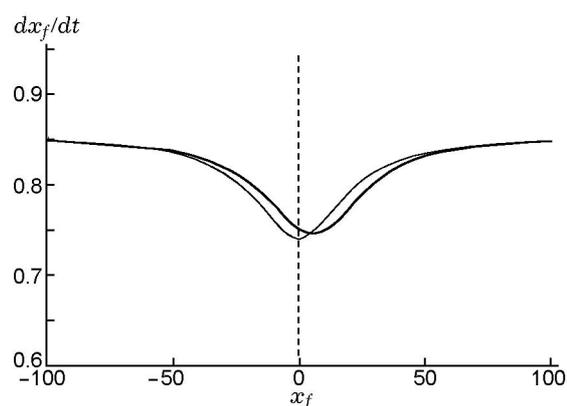


Рис. 4. Траектории фронта пламени, распространяющегося в канале с сужением, рассчитанные по традиционной модели (тонкая линия) и по уравнениям (13), (14) (толстая линия) для случая $\sigma = 0.16$, $N = 8$, $p = 0.2$, $L = 30$, $d_0 = 1.05d_c$, $d_c = 24.177$, $Nu = 4$

вдали от сужения диаметр трубки постоянный и равен $d_0(1 + p)$. Схема канала показана на рис. 3. Скорость газа задана формулой $V(x) = V_0 d_0^2 / (d(x))^2$, где V_0 — максимальная скорость газа, которая достигается в наиболее узкой части канала. Температура стенок канала считается постоянной и равной температуре окружающей среды. Если минимальный диаметр сужения d_0 больше критического, пламя свободно проходит через сужение. Этот случай ($d_0 = 1.05d_c$) иллюстрирует рис. 4, где построены траектории пламени на фазовой плоскости $(x_f, dx_f/dt)$, вычисленные в рамках как традиционной модели (15), так и модели, учитывающей инерционные эффекты (13), (14) в случае $V = 0$. Траектория, полученная в рамках традиционной модели, имеет вид симметричной функции, а в рамках модели с ускорением — несимметричной функции относительно оси $x = 0$. Согласно традиционной модели скорость пламени минимальна в наиболее узкой части трубки. Модель, учитывающая ускорение пламени, предсказывает, что минимальная скорость фронта пламени достигается в неко-

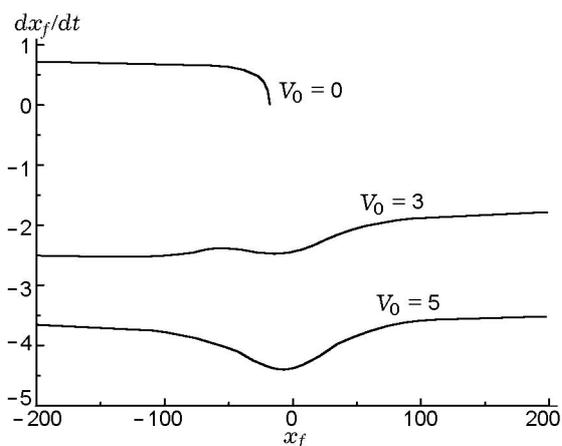


Рис. 5. Траектории фронта пламени, распространяющегося в канале с сужением, на фазовой плоскости, рассчитанные по уравнениям (13), (14) для случаев $V_0 = 0, 3$ и 5 при $\sigma = 0.16$, $N = 8$, $p = 0.1$, $L = 50$, $d_0 = 0.93d_c$, $d_c = 24.177$, $Nu = 4$

торой точке, расположенной вниз по потоку за сужением. Эта задержка в изменении скорости пламени связана, очевидно, с инерционными эффектами.

Инерционные эффекты пламени проявляются в возможности прохождения волны горения через сужения, диаметр которых меньше критического. Для того чтобы продемонстрировать это явление, мы выбрали диаметр сужения $d_0 = 0.93d_c$ и параметры $L = 50$ и $p = 0.1$. На рис. 5 показаны траектории пламени, построенные для случаев, когда скорость газа равна $V_0 = 0$, соответствующие им зависимости температуры фронта пламени от координаты приведены на рис. 6. При $V_0 = 0$ пламя, расположенное слева от сужения, распространялось слева направо и затухало перед сужением. При $V_0 = 3$ пламя двигалось вниз по потоку и также затухало, но уже после прохождения сужения. При $V_0 = 5$ пламя проходило сужение, так как времени для охлаждения газа стенками канала было недостаточно, чтобы существенно уменьшить температуру в зоне химических реакций. Отметим, что в рамках традиционной модели (15) пламя затухает в узкой части трубки при любых значениях скорости газа.

3.3. Численный расчет в рамках исходной диффузионно-тепловой модели

Для проверки результатов предложен-

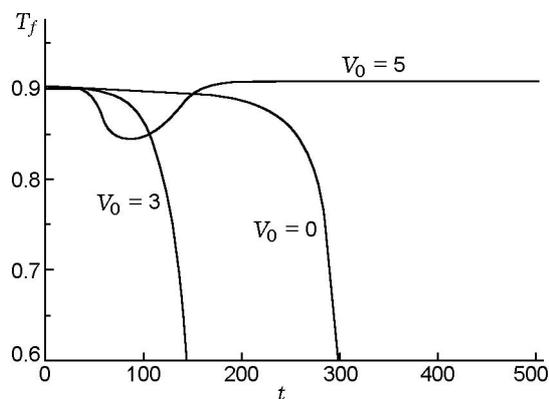


Рис. 6. Зависимости температуры пламени от времени, соответствующие данным, приведенным на рис. 5

ной модели эволюции пламени было выполнено прямое численное моделирование исходной диффузионно-тепловой задачи с одноступенчатой химической реакцией, распределенной в объеме. Для этого в правые части уравнений (1), (2) были добавлены члены $(1 - \sigma)W(C, T)$ и $-W(C, T)$ соответственно. Здесь $W(C, T) = 0.5N^2(1 - \sigma)^2 C \exp[N(1 - 1/T)]$ — безразмерная скорость химической реакции, которая в приближении $N \gg 1$ соответствует асимптотическому решению, позволяющему свести задачу к кусочно-линейной постановке с граничными условиями (4)–(7). Численное интегрирование нестационарных уравнений (1), (2) с химической реакцией выполнялось по явной разностной схеме. Расчетная область была определена в пространственном интервале $-300 < x < 300$. Точность решения проверяли с помощью предварительных расчетов с различными шагами по времени и пространству.

Сравнение результатов расчета процесса периодического воспламенения/затухания в нагретом канале, выполненного в рамках упрощенной модели с инерционными эффектами (13), (14), с результатами прямого численного моделирования исходной диффузионно-тепловой задачи приведено в работе [11]. Показано, что хотя формы предельных циклов на фазовой плоскости $(x_f, dx_f/dt)$, рассчитанных по двум моделям, полностью не совпадали, но согласование амплитуд и периодов пульсаций пламени было удовлетворительным. Различия результатов вызвано тем, что простая модель, использующая представление пламени как поверхности разрыва, не учитывает эффекты, связанные с расходом вещества и теп-

ловыделением в объеме. Численное исследование исходной системы уравнений выявило новые важные нестационарные детали периодического воспламенения/затухания пламени, такие как одновременное образование двух фронтов пламени при самовоспламенении [11], режим воспламенения/затухания с осцилляциями [11] и др. Эти эффекты не воспроизводятся моделью, учитывающей инерционные эффекты. С другой стороны, периодическое воспламенение/затухание в принципе не могло быть описано в рамках традиционной модели, и расчет по модели с инерционными эффектами дает существенную экономию расчетного времени, поэтому предлагаемая модель может быть использована для грубого построения диаграмм различных нестационарных режимов горения в широком диапазоне параметров.

Было выполнено численное моделирование исходных уравнений распространения пламени в трубке с сужением для проверки предсказаний модели (13), (14). Результаты расчетов при параметрах, соответствующих тем, что использовались при построении рис. 5, представлены на рис. 7. Сравнение результатов указывает на хорошее согласие и подтверждает возможность прохождения пламенем сужения, размер которого меньше критического значения.

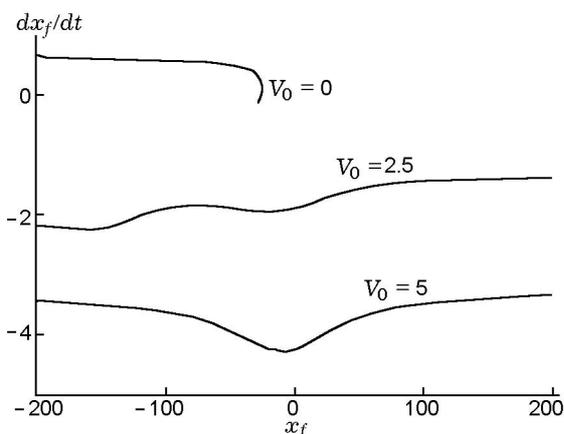


Рис. 7. Траектории фронта пламени, распространяющегося в канале с сужением, на фазовой плоскости, рассчитанные по уравнениям (13), (14) для случаев $V_0 = 0, 2.5$ и 5 (другие параметры соответствуют данным, приведенным на рис. 5)

4. ПУЛЬСАЦИИ ВОЛНЫ ГОРЕНИЯ В СЛУЧАЕ ТЕПЛОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

В этом параграфе дан вывод модели эволюции фронта волны горения в случае тепловой неустойчивости и приведено сравнение результатов расчета по приближенной модели с результатами прямого численного моделирования уравнения (1) с граничными условиями (8)–(10). В случае стационарного распространения волны горения решение уравнения (1) имеет вид $T_{1,s} = \sigma + (1 - \sigma) \exp[-(x - x_{f,s}(t))]$ и $T_{2,s} = 1$, где индекс 1 относится к несгоревшему веществу, а 2 — к продуктам горения. Подставляя эти решения в граничные условия, получаем, что $T_{f,s} = 1$ и безразмерная скорость распространения пламени равна $dx_{f,s}/dt = 1$. В результате линейного анализа устойчивости этого стационарного решения, выполненного в работе [9], получено следующее дисперсионное уравнение:

$$4\omega^2 + (1 + Ze - Ze^2/4)\omega + Ze/2 = 0. \quad (18)$$

Здесь ω — скорость нарастания возмущений, пропорциональных $\exp(\omega t)$, $Ze = (1 - \sigma)N$ — число Зельдовича, которое является параметром бифуркации. Решение становится неустойчивым ($\text{Re}(\omega) > 0$), если $Ze > 4 + 2\sqrt{5} = Ze_c$. При $Ze > Ze_c$ скорость нарастания возмущений имеет мнимую часть, что соответствует бифуркации Хопфа. В этом случае следует ожидать пульсаций волны горения. Теоретическое описание нелинейной стадии развития неустойчивости дано, например, в работе [7]. Здесь мы хотели бы показать, что использование того же подхода, что и для решения задачи о распространении пламени в канале, позволяет получить нелинейные уравнения для координаты волны горения и температуры на фронте. В отличие от аналитического решения, приведенного в § 1, где ускорение пламени рассматривалось как малый параметр, в задаче о пульсациях волны горения конденсированного вещества это приближение некорректно, поскольку частота пульсаций $\text{Im}(\omega) = \pm\sqrt{Ze_c/2}$ для $Ze = Ze_c$ не является малым параметром. Тем не менее эволюционные уравнения можно получить и в этом случае, если пренебречь всеми нелинейными членами, содержащими ускорение пламени или скорость изменения температуры фронта волны горения в степенях выше первой или их перекрестные произведения, т. е. члены вида $(d^2x_f/dt^2)^2$, $(dT_f/dt)^2$,

$(d^2x_f/dt^2)(dT_f/dt)$ и т. д. Тогда частные производные от температуры на фронте горения могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = -(T_f - \sigma)D \left(\hat{R} - \frac{D}{2} \right) x_f - \left(\hat{R} - \frac{D}{2} \right) (T_f - \sigma), \quad (19)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial x} = \left(\hat{R} - \frac{D}{2} \right) (T_f - \sigma),$$

где $\hat{R} = (D^2/4 + d/dt)^{1/2} = D/2 + Dd/dt - 1/D^3 d^2/dt^2 + \dots$ и $D = dx_f/dt$. Эволюционные уравнения, связывающие координату волны горения и температуру на фронте пламени, можно получить подстановкой решения (19) в граничные условия (9), (10), но такие уравнения неудобны для численного исследования, так как содержат оператор \hat{R} . Однако, оставаясь в рамках использованных выше предположений, можно привести эти уравнения к удобному для численного моделирования виду. Опуская второстепенные детали, уравнение для температуры на фронте волны горения сразу запишем в конечном виде:

$$d^2 \frac{T_f}{dt^2} + \frac{A(T_f)dT_f}{dt} + B(T_f) = 0, \quad (20)$$

где $A(T_f) = U(T_f)^2 [4a(T_f)(T_f - \sigma)/(1 - \sigma) + 1 - a(T_f)^2]/4$, $B(T_f) = Ze(U(T_f)^4 - 1)/8N$, $U(T_f) = \exp[N/2(1 - 1/T_f)]$ и $a(T_f) = Ze/2T_f^2$. Уравнение (20) имеет единственное стационарное решение $T_{f,s} = 1$, и дисперсионное уравнение для скорости роста малых возмущений этого решения, полученное из уравнения (19), в точности совпадает с дисперсионным уравнением (18).

На рис. 8 приведены результаты расчета температуры волны горения от времени, полученные из численного решения уравнения (20) при $Ze = 8.88 > 4 + 2\sqrt{5} = Ze_c$. Это значение числа Зельдовича выбрано таким же, как в работе [10]. На рис. 8 представлены также результаты расчетов исходной задачи, включающей уравнение (1) с граничными условиями (8)–(10). Из сравнения результатов расчетов видно, что согласие между ними не такое хорошее, как в случае пульсаций пламени в микроканале. В частности, периоды нелинейных пульсаций отличаются на $\approx 30\%$. Этот пример показывает, что упрощенная модель (20) способна описывать нелинейные пульсации даже в том случае, когда в задаче отсутствует малый параметр.

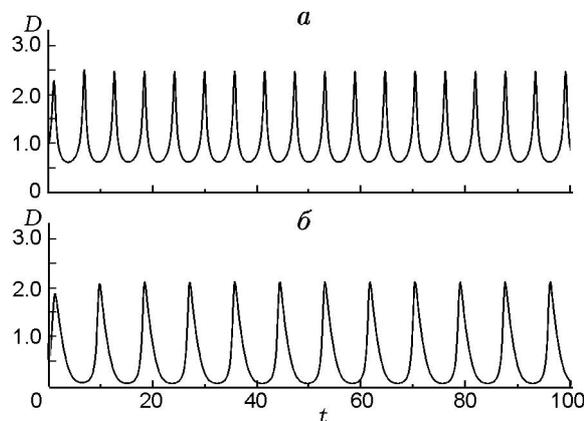


Рис. 8. Пульсации скорости распространения фронта горения конденсированного вещества, рассчитанные по исходной модели (а) и упрощенной модели (б)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен метод получения одномерных нелинейных эволюционных уравнений для координаты фронта волны горения и температуры на фронте горения из системы уравнений, описывающих волны горения в рамках диффузионно-тепловой модели. Рассмотрены случаи нестационарного распространения пламени в узком канале с переменным сечением и неоднородным распределением температуры в стенках канала, а также задача о пульсациях фронта волны горения конденсированного вещества. Несмотря на упрощения, полученные эволюционные уравнения, учитывающие инерционные эффекты пламени, способны описывать самовоспламенение газа в нагретом канале, затухание пламени и нелинейные пульсации, которые не поддавались описанию в рамках традиционной модели, основанной на концепции нормальной скорости. Сравнение результатов расчетов на основе эволюционных уравнений с результатами прямого численного моделирования исходных уравнений показало хорошее согласие. Предложенный аналитический метод позволил вывести нелинейное эволюционное уравнение для фронта волны горения конденсированного вещества, которое описывает нелинейные пульсации при тепловой неустойчивости волны горения. Данный подход, учитывающий инерционные эффекты, может быть применен для создания упрощенных моделей эволюции фронта волны горения при распространении пламени в сложном поле течения газа или в замкнутом пространстве. По-

добные модели могли бы обладать теми же преимуществами, что и модель «flamelet», и позволили бы описывать затухание, воспламенение и нелинейные осцилляции пламени.

Несмотря на то, что эволюционное уравнение получено в рамках модели с одностадийной реакцией, можно предположить, что оно выполняется и в более общем случае, включающем рассмотрение детальной кинетики реакций. В этом случае в размерном уравнении перед членом с ускорением возникает параметр, который зависит от состава смеси и имеет размерность времени. Зависимость этого характерного времени от температуры можно вычислить из предварительного решения задачи о времени самовоспламенения заданной смеси газов или задачи о распространении адiabатической волны горения, используя существующую методику расчета с детальной кинетикой химических реакций. Данный асимптотический метод можно использовать и для вывода эволюционного уравнения для фронта волны горения в двумерном или трехмерном случаях, включающих рассмотрение эффектов, связанных с кривизной фронта горения. Вариант такого расширения модели предложен в работе [12], где получено слабонелинейное уравнение для пламени, распространяющегося в радиальном канале с подогревом.

Авторы благодарны проф. Г. И. Сивашинскому (Университет Тель-Авива) и проф. К. Маруте (Университет Тохоку) за ценные замечания и обсуждение данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bray K. N. C. Turbulent flows with premixed reactants // Turbulent flows with premixed reactants / P. A. Libby, F. A. Williams (Eds). — Springer-Verlag, 1980.
2. Fernandez-Pello A. C. Micropower generation using combustion: Issues and Approaches // Proc. Combust. Inst. — 2002. — V. 29. — P. 883–899.
3. Vican J., Gajdeczko B. F., Dryer F. M., Milius D. L., Aksay I. A., Yetter R. A. Development of a microreactor as a thermal source for microelectromechanical systems power generation // Ibid. — P. 909–916.
4. Ahn J., Eastwood C., Sitzki L., Ronney P. D. Gas-phase and catalytic combustion in heat-recirculating burners // Proc. Combust. Inst. — 2005. — V. 30. — P. 2463–2472.
5. Kim N. I., Kato S., Kataoka T., Yokomori T., Maruyama S., Fujimori T., Maruta K. Flame stabilization and emission of small swiss-roll combustors as heaters // Combust. and Flame. — 2005. — V. 141, N 3. — P. 229–240.
6. Maruta K., Kataoka T., Nam II Kim, Minaev S., Fursenko R. Characteristics of combustion in a narrow channel with a temperature gradient // Proc. Combust. Inst. — 2005. — V. 30. — P. 2429–2436.
7. Frankel M. L., Roytburd V. Finite-dimensional model of thermal instability // Appl. Math. Lett. — 1995. — V. 8, N 2. — P. 479–496.
8. Мержанов А. Г., Филоненко А. К., Боровинская И. П. Новые явления при горении конденсированных систем // Докл. АН СССР. — 1973. — Т. 208, № 4. — С. 892–894.
9. Мержанов А. Г., Мукасян А. С. Твердотопливное горение. — М.: Торус Пресс, 2007.
10. Brailovsky I., Frankel M., Sivashinsky G. I. Galloping and spinning modes of subsonic detonation // Combust. Theory and Modelling. — 2000. — V. 4. — P. 47–60.
11. Minaev S., Maruta K., Fursenko R. Nonlinear dynamics of flame in a narrow channel with a temperature gradient // Combust. Theory and Modelling. — 2007. — V. 11. — P. 187–200.
12. Minaev S., Fursenko R., Bakirova N. T., Kumar S., Maruta K. Modeling of traveling structures in radial microchannels with a wall temperature gradient // Proc. of the 6th Asia-Pacific Conference on Combustion ASPACC 07. — 2000. — P. 546–549.
13. Zeldovich Y. B., Barenblatt G. I. Theory of flame propagation // Combust. and Flame — 1959. — V. 3. — P. 61–74.
14. Fateev G. A., Rabinovich O. S., Silenkov M. A. Oscillatory combustion of a gas mixture blown through a porous medium or a narrow tube // Proc. Combust. Inst. — 1998. — V. 27. — P. 3147–3153.
15. Jackson T. L., Buckmaster J., Lu Z., Kyritsis D. C., Massa L. Flames in narrow circular tubes // Proc. Combust. Inst. — 2007. — V. 31. — P. 955–962.
16. Pizza G., Frouzakis C. E., Mantzaras J., Tomboulides A. G., Boulouchos K. Dynamics of premixed hydrogen/air flames in microchannels // Combust. and Flame — 2008. — V. 155. — P. 2–20.

Поступила в редакцию 30/VI 2010 г.