ПОЛЗУЧЕСТЬ АРМИРОВАННОГО СЛОЯ ПРИ ДВУХОСНОМ РАСТЯЖЕНИИ

Н. И. Малинин

(*Новосибирск*)

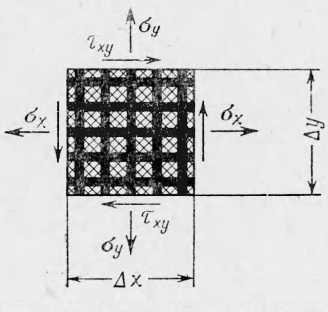
Армированные конструкции находят очень широкое применение в современной технике. В качестве примеров армированных материалов можно назвать стеклопластики и железобетон. Существенной особенностью этих материалов является различие свойств арматуры и связующего. Если арматура (металл в железобетоне, стекло в стеклопластиках) представляет собой упругое тело, то связующее (бетон, высокополимер) уже при низких температурах (0 — 100 °С) обнаруживает заметную ползучесть. Вследствие этого явления армированный материал также ползет при действии напряжений.

Оценка ползучести армированного материала сопряжена с большими трудностями. Скорость деформации ползучести при этом зависит не только от величины действующих напряжений, но и от углов между направлениями армирования и главными напряжениями, т. е. ползучесть материала будет анизотропной.

Ниже задача о ползучести армированного слоя при двухосном растяжении рассматривается при некоторых упрощающих допущениях.

1. **Постановка задачи**. Пусть имеем слой постоянной толщины, равной единице, армированный в двух взаимно перпендикулярных направлениях, которые параллельны осям координат x и y. Напряжения σ_x, σ_y и τ_{xy} заданы и не зависят от времени. Напряжения σ_z, τ_{xz}, τ_{yz} или равны нулю, или малы по сравнению с σ_x, σ_y и τ_{xy}. На практике такой случай реализуется в тонкостенных цилиндрических и сферических оболочках. Выделим элемент слоя шириной Δx и высотой Δy (фиг. 1). Плотность армирования n_x в направлении оси x определяется формулой

$$n_x = \frac{S_{1x}}{S_x} \qquad (1.1)$$



Фиг. 1

где S_{1x}— площадь поперечного сечения арматуры, направленной вдоль оси x; S_x — общая площадь боковой поверхности элемента в сечении, перпендикулярном к оси x. В дальнейшем все величины, относящиеся к арматуре, будем обозначать индексом 1, относящиеся к связующему — индексом 2. Аналогичным образом определится плотность армирования n_y.

Из фиг. 1 видно, что

$$\sigma_x = \sigma_{x1} n_x + \sigma_{x2}(1 - n_x), \qquad \sigma_y = \sigma_{y1} n_y + \sigma_{y2}(1 - n_y) \qquad (1.2)$$

где σ_{x1} — растягивающее напряжение в ориентированной параллельно x арматуре, σ_{x2} — параллельное оси x нормальное напряжение в связующем. Касательные напряжения τ_{xy} могут распределяться между связующим и арматурой различным образом. Положим, что они распределяются равномерно; при этом $\tau_{xy} = \tau_{xy_2}$. Арматура представляет собой упругое тело Гука и ее деформации растяжения определяются формулами

$$\varepsilon_{x1} = \sigma_{x1} / E_1, \qquad \varepsilon_{y1} = \sigma_{y1} / E_1 \qquad (1.3)$$

где E_1 — модуль Юнга материала арматуры. Деформации связующего в ячейке между смежными стержнями (нитями) арматуры (фиг. 1) связаны с деформациями арматуры. Их можно вычислить из уравнений

$$\begin{aligned}\varepsilon_{x2} &= \varepsilon_{x1} + \nu_1 n_y \varepsilon_{y1} = \frac{1}{E_1 n_x}[\sigma_x - \sigma_{x2}(1 - n_x)] + \frac{\nu_1}{E_1}[\sigma_y - \sigma_{y2}(1 - n_y)] \\ \varepsilon_{y2} &= \varepsilon_{y1} + \nu_1 n_x \varepsilon_{x1} = \frac{1}{E_1 n_y}[\sigma_y - \sigma_{y2}(1 - n_y)] + \frac{\nu_1}{E_1}[\sigma_x - \sigma_{x2}(1 - n_x)]\end{aligned} \qquad (1.4)$$

где ν_1 — коэффициент Пуассона материала арматуры.

Деформация связующего равна сумме упругой деформации $\varepsilon^{[e]}$ и деформации ползучести $\varepsilon^{[c]}$, т. е.

$$\varepsilon_{x2} = \varepsilon_{x2}^{[e]} + \varepsilon_{x2}^{[c]}, \qquad \varepsilon_{y2} = \varepsilon_{y2}^{[e]} + \varepsilon_{y2}^{[c]}, \qquad \gamma_{xy} = \gamma_{xy}^{[e]} + \gamma_{xy}^{[c]} \qquad (1.5)$$

Здесь индекс 2 у γ_{xy2} для простоты опущен. Упругая деформация $\gamma_{xy}^{[e]}$ определится формулами теории упругости

$$\gamma_{xy}^{[e]} = \frac{\tau_{xy}}{G_2}, \qquad G_2 = \frac{E_2}{2(1+\nu_2)} \qquad (1.6)$$

Из уравнений (1.2) — (1.5) найдем деформации ползучести $\varepsilon_{x2}^{[c]}$ и $\varepsilon_{y2}^{[c]}$.

$$\varepsilon_{x2}^{[c]} = a_1 - b_1\sigma_{x2} + c_1\sigma_{y2}, \qquad \varepsilon_{y2}^{[c]} = a_2 + b_2\sigma_{x2} - c_2\sigma_{y2} \qquad (1.7)$$

Здесь

$$a_1 = \frac{1}{E_1}\left(\frac{\sigma_x}{n_x} + \nu_1\sigma_y\right), \qquad b_1 = \frac{1-n_x}{E_1 n_x} + \frac{1}{E_2}, \qquad c_1 = \frac{\nu_2}{E_2} - \frac{\nu_1(1-n_y)}{E_1}$$

$$a_2 = \frac{1}{E_1}\left(\frac{\sigma_y}{n_y} + \nu_1\sigma_x\right), \qquad b_2 = \frac{\nu_2}{E_2} - \frac{\nu_1(1-n_x)}{E_1}, \qquad c_2 = \frac{1-n_y}{E_1 n_y} + \frac{1}{E_2}$$

Коэффициенты a_1 и т. д. — постоянные величины, так как по условию σ_x и σ_y не зависят от времени. Для определения неизвестных σ_{x2}, σ_{y2}, $\varepsilon_{x2}^{[c]}$ и $\varepsilon_{y2}^{[c]}$ необходимо, кроме уравнений (1.7), использовать физические уравнения ползучести. Ниже рассматриваются способы решения поставленной задачи с использованием теорий старения, течения и наследственности.

2. Решение задачи при помощи теории старения. Компоненты деформации ползучести в теории старения определяются уравнениями [1]

$$\varepsilon_x^{[c]} = \frac{1}{2} f^*(T, t)(\sigma_x - \sigma), \qquad \gamma_{xy}^{[c]} = f^*(T, t)\,\tau_{xy} \qquad (2.1)$$

Здесь T — интенсивность касательных напряжений, t — время, σ — среднее напряжение, $f^*(T, t)$ — некоторая функция T и t, определяемая экспериментально. Для линейных тел функция f^* не зависит от напряжений, а зависит только от времени. Для нелинейных тел можно воспользоваться экспериментальными данными Финдли [2] по ползучести пластмасс при одноосном растяжении. По Финдли зависимость деформаций ползучести от напряжений и времени имеет вид

$$\varepsilon^{[c]} = m'\left(\frac{t}{t_0}\right)^n \operatorname{sh}\frac{\sigma}{\sigma_m} \qquad (2.2)$$

где m' и σ_m — параметры материала, t_0 — постоянная, имеющая размерность времени (обычно полагают $t_0 = 1$). Положив

$$t_0 = 1, \qquad m = m' / \sqrt{2}, \qquad k = \sqrt{2}\sigma_m \qquad (2.3)$$

из уравнений (1.7), (2.1), (2.2) получим

$$\Phi^* (\sigma_{x2}, \sigma_{y2}) = \frac{m}{\sigma^\circ} \operatorname{sh} \frac{\sigma^\circ}{k} t^n (2\sigma_{x2} - \sigma_{y2}) - a_1 + b_1\sigma_{x2} - c_1\sigma_{y2} = 0 \tag{2.4}$$

$$\Psi^* (\sigma_{x2}, \sigma_{y2}) = \frac{m}{\sigma^\circ} \operatorname{sh} \frac{\sigma^\circ}{k} t^n (2\sigma_{y2} - \sigma_{x2}) - a_2 - b_2\sigma_{x2} + c_2\sigma_{y2} = 0$$

$$\sigma^\circ = \sqrt{(\sigma_{x2} - \sigma_{y2})^2 + \sigma_{x2}^2 + \sigma_{y2}^2 + \sigma\tau_{ky}^2} \tag{2.5}$$

Систему уравнений (2.4) можно решить приближенными методами следующим образом. При $t = 0$ члены, содержащие гиперболический синус, также равны нулю и система алгебраических уравнений первой степени решается просто. При этом определяются значения σ_{x2} и σ_{y2} для $t = 0$. При $t > 0$ напряжения σ_{x2} и σ_{y2} приближенно определяются следующим способом. На плоскости σ_{x2} и σ_{y2} вблизи предполагаемого решения уравнения (2.4) координатами ξ_1, ξ_2, η_1, η_2 задаются четыре точки. Определяются значения функций

$$\Phi^* (\xi_1\eta_1) = \Phi_1^*, \qquad \Phi^* (\xi_1, \eta_2) = \Phi_2^*, \ldots, \qquad \Phi^* (\xi_2, \eta_2) = \Phi_4^*$$

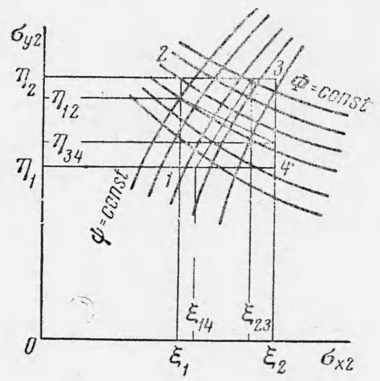
$$\Psi (\xi_1, \eta_1) = \Psi_1^*, \ldots, \qquad \Psi (\xi_2, \eta_2) = \Psi_4^*$$

Положив, что в прямоугольнике, ограниченном координатными линиями ξ_1, ξ_2 и η_1, η_2, градиенты функций Φ^* и Ψ^* не зависят от координат, по интерполяционным формулам найдем ординаты η_{12} и η_{34} точек (фиг. 2) на прямых $\xi_1 = \mathrm{const}$ и $\xi_2 = \mathrm{const}$, где $\Phi^* = 0$.

Через точки (ξ_1, η_{12}) и (ξ_2, η_{34}) проведем прямую, которая в пределах рассматриваемого прямоугольника является аппроксимацией линии $\Phi^* = 0$.

Аналогичным образом в этом же прямоугольнике проводится прямая, для которой $\Psi^* \approx 0$.

Точка пересечения прямых $\Phi^* \approx 0$ и $\Psi^* \approx 0$ есть приближенное значение решения системы (2.4). Эту операцию можно повторить еще раз для более узких интервалов $\xi_2 - \xi_1$ и $\eta_2 - \eta_1$ и при этом будет получено более точное решение.



Фиг. 2

Существенно, чтобы точка, соответствующая решению системы (2.4), была расположена в пределах рассматриваемого прямоугольника. Опыт показал, что при разумном выборе значений $\xi_1, \ldots, \eta_2$ уже первое приближение дает решение системы (2.4) с весьма высокой степенью точности. После того как будет найдено изменение напряжений σ_{x2} и σ_{y2} со временем, по формулам (1.2) и (1.3) нетрудно вычислить напряжения σ_{x1} и σ_{y1}, деформации ε_{x1} и ε_{x2}. Деформацию $\gamma_{xy}^{[c]}$ можно подсчитать по формуле

$$\gamma_{xy}^{[c]} = \frac{6m}{\sigma^\circ} \operatorname{sh} \frac{\sigma^\circ}{k} t^n \tau_{xy} \tag{2.6}$$

полученной из уравнений (2.1) и (2.4); здесь σ°— согласно (2.5). В связи с тем, что нормальные напряжения в основном воспринимаются арматурой, напряжения σ_{x2} и σ_{y2} обычно бывают невелики. При малых напряжениях материал ведет себя как линейно ползучее тело. При этом функция f^* зависит только от t, а

$$\operatorname{sh} \frac{\sigma^\circ}{k} \approx \frac{\sigma^\circ}{k}$$

Система (2.4) при этом вырождается в систему алгебраических уравнений первой степени, решение которой осуществляется легко. Касательные напряжения τ_{xy} почти целиком воспринимаются связующим. Поэтому очень часто в (2.5) сумма $(\sigma_{x2} - \sigma_{y2})^2 + \sigma_{x2}^2 + \sigma_{y2}^2$ пренебрежимо мала по сравнению с $6\tau_{xy}^2$. При этом система (2.4) также вырождается в систему легко разрешаемых алгебраических уравнений.

3. Решение задачи при помощи теории течения. Скорость деформации ползучести по теории течения определяется следующими соотношениями [1]:

$$\dot{\varepsilon}_x^{[c]} = \frac{1}{2} f(T, t)(\sigma_x - \sigma), \qquad \dot{\gamma}_{xy}^{[c]} = f(T, t)\,\tau_{xy} \tag{3.1}$$

Характеристическую функцию $f(T, t)$ нетрудно установить, приняв во внимание зависимость (2.4), из которой имеем

$$f(T, t) = \frac{6mn}{\sigma_i}\,\mathrm{sh}\,\frac{\sigma_i}{k}\,t^{n-1} \tag{3.2}$$

$$\sigma_i = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \tag{3.3}$$

При условии, что до момента $t = 0$ напряжения не действовали

$$\varepsilon_x^{[c]} = \int_0^t \dot{\varepsilon}_x^{[c]}\,dt, \quad \varepsilon_x^{[c]} = 0 \quad \text{при } t \leqslant 0 \tag{3.4}$$

Поэтому из уравнений (1.7) имеем

$$\begin{gathered} \Phi(\sigma_{x2}, \sigma_{y2}) = mn\int_0^t \frac{t^n(2\sigma_{y2} - \sigma_{x2})}{\sigma^\circ}\,\mathrm{sh}\,\frac{\sigma^\circ}{k}\,dt - a_1 + b_1\sigma_{x2} - c_1\sigma_{y2} = 0 \\ \Psi(\sigma_{x2}, \sigma_{y2}) = mn\int_0^t \frac{t^n(2\sigma_{y2} - \sigma_{x2})}{\sigma^\circ}\,\mathrm{sh}\,\frac{\sigma^\circ}{k}\,dt - a_2 - b_2\sigma_{x2} + c_2\sigma_{y2} = 0 \end{gathered} \tag{3.5}$$

Здесь σ° — согласно (2.5). Для решения системы уравнений (3.1) предлагается следующий приближенный метод. Промежуток времени t, в течение которого предполагается определить напряжения и деформации, разбивается на интервалы Δt_i таким образом, чтобы на протяжении Δt_i напряжения σ_{x2} и σ_{y2} не могли значительно измениться. При этом выражения, содержащие напряжения, выносятся в уравнениях (3.5) из-под знака интеграла и после интегрирования система (3.5) приводится к системе алгебраических уравнений.

Деформации ползучести за промежуток времени от t_{i-1} до t_i определяются при этом по формулам

$$\begin{gathered} \Delta_i\varepsilon_{x2}^{[c]} = (t_i^n - t_{i-1}^n)\,\frac{m}{\sigma^\circ}\,\mathrm{sh}\,\frac{\sigma^\circ}{k}\,(2\sigma_{x2} - \sigma_{y2}) \\ \Delta_i\varepsilon_{y2}^{[c]} = (t_i^n - t_{i-1}^n)\,\frac{m}{\sigma^\circ}\,\mathrm{sh}\,\frac{\sigma^\circ}{k}\,(2\sigma_{y2} - \sigma_{x2}) \\ \Delta_i\gamma_{xy}^{[c]} = (t_i^n - t_{i-1}^n)\,\frac{6m}{\sigma^\circ}\,\mathrm{sh}\,\frac{\sigma^\circ}{k}\,\tau_{xy} \end{gathered} \tag{3.6}$$

Заметим, что аналогичный метод решения задач теории ползучести применял О. В. Соснин [3]; он также разбивал длительный период времени на малые промежутки, в пределах которых можно пренебрегать перераспределением напряжений и считать тензор напряжений независимым от времени.

Фиг. 3

4. Решение задачи при помощи теории упрочнения. В теории упрочнения скорость деформации ползучести при простом растяжении определяется уравнением [1]

$$\dot{\varepsilon}^{[c]} = \frac{F_1(\sigma)}{\varphi(\varepsilon^{[c]})} \tag{4.1}$$

где $F_1(\sigma)$ и $\varphi(\varepsilon^{[c]})$ — некоторые функции. Для сложно-напряженного состояния вместо уравнения (4.1) имеем зависимость между интенсивностями касательных напряжений и деформаций сдвиговой ползучести Γ_*

$$\dot{\Gamma}_* = \frac{F(T)}{\varphi(\Gamma_*)} \tag{4.2}$$

Положим, следуя Ю. Н. Работнову [4], что функция φ представляет собой степенную зависимость, т. е. $\varphi[\Gamma_*] = \Gamma_*^{-\alpha}$ (α — параметр материала). Положим, что функция

$$F(T) = K \operatorname{sh}^l \left(\frac{T}{A}\right) \tag{4.3}$$

Здесь l, A и K — постоянные. Значения постоянных α, l, A и K определяются, если проинтегрировать уравнение (4.2) для простого растяжения и сравнить полученный результат с формулой (2.2). При этом имеем

$$\alpha = \frac{n-1}{n}; \qquad l = \frac{1}{n}, \qquad A = \frac{\sigma_m}{\sqrt{3}}, \qquad K = \left(\frac{2m'n}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{4.4}$$

В тех случаях, когда известно изменение напряжений с течением времени, величина Γ_* легко получается интегрированием уравнения (4.2). После нахождения Γ_* деформации $\varepsilon_{x2}^{[c]}$, $\varepsilon_{y2}^{[c]}$, $\gamma_{xy}^{[c]}$ легко определяются из условия подобия девиаторов напряжений и деформации.

Изменение напряжений σ_{x2} и σ_{y2} со временем обычно бывает неизвестно. В этом случае можно применять метод, описанный выше. Период времени t разбивается на промежутки Δt_i так, чтобы на протяжении рассматриваемого промежутка можно было пренебрегать изменениями интенсивности тензора напряжений. Приращение величины Γ_* за время $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ можно определить интегрированием уравнения (4.2) на промежутке Δt_i. При этом имеем

$$\Gamma_{*i} = \left[\Gamma_{*i-1}^{1/n} + \frac{1}{n} Kt \operatorname{sh}^{1/n}\left(\frac{T}{A}\right)\right]^n \tag{4.5}$$

Далее деформации ползучести определяются из условия подобия девиаторов напряжений и деформаций.

Аналогичные построения могут быть предложены и для теории наследственности, однако схема расчета при этом много сложнее.

Как известно, теории старения и течения дают удовлетворительные результаты лишь в том случае, если после приложения основной нагрузки последующая догрузка осуществляется плавно. Такой процесс плавного изменения напряжений в связующем армированного слоя происходит в том случае, если действующие на материал напряжения сохраняются постоянными. При этом все рассмотренные теории, а также теория наследственности дают практически один и тот же закон перераспределения напряжений со временем между связующим и арматурой.

Проверка развитой теории производилась лишь при простом растяжении на стеклопластике АГ-4С, армированном в двух взаимно перпендикулярных направлениях при соотношении плотностей армирования 1 : 1. Плотности армирования оценивались по микрофотографиям, снятым в отраженном свете, типа представленных на фиг. 3, где приведена микрофотография стеклопластика АГ-4С, снятая в отраженном свете при увеличении $\times 1000$; шлиф под углом к оси стекловолокна. При вырезке образцов из пластин принимались во внимание рекомендации, изложенные в работе [5]. Образцы вырезались под различными углами к направлению стекловолокна и имели форму полос толщиной 3—4 *мм*, шириной 15—25 *мм* и длиной 250 *мм*. Испытания проводились на установке, описанной в статье [6], при температуре $30 \pm 0.2^\circ$ С.

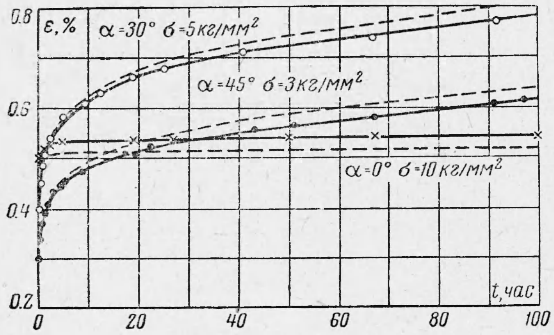
Некоторые результаты испытаний представлены на фиг. 4 (время — в часах). Здесь же пунктиром проведены кривые, полученные для этих же условий расчетным путем по формулам (2.4) и (2.6).

При этом деформационные свойства стекловолокна и связующего описывались параметрами

$$E_1 = 500\,000 \text{ кГ / см}^2,\; E_2 = 75\,000 \text{ кГ / см}^2,\; \sigma_m = 100 \text{ кГ/см}^2$$

$$m' = 7.6 \cdot 10^{-5},\; t_0 = 1 \text{ час},\; \nu_1 = 0.2,\; \nu_2 = 0.3$$

Плотности армирования оказались равными: $n_x = n_y = 0.33$. Из фиг. 4 видно, что расхождения между расчетными и экспериментальными значениями деформаций ε_1 были невелики. Обычно они не превосходили 5—7% и были значительно меньше возможных отклонений результатов одного испытания на ползучесть от другого. Значения модуля E_1 стекловолокна испытываемых образцов были более низкими, чем для обычного стекла [7]. По-видимому, это было вызвано технологическими особенностями прессования пластин из АГ-4С. При прессовании стекловолокна не натягивались и в отпрессованных плитах могло иметь место искривление оси волокон. При растяжении волокон с искривленной осью величина «эффективного» модуля заполнителя имела более низкие значения, чем стекла в массе. Таким образом, можно говорить о неполном «использовании модуля» стекловолокна в стеклопластике, если при отверждении изделия отсутствует натяжение волокон. Аналогичным образом вследствие неоднородности поля напряжений в связующем при действии на изделие внешних сил, по-видимому, неполностью используется и упругость смолы. Поэтому следует ожидать, что при испытаниях смолы без заполнителя можно получить более высокие значения E_2, σ_m и m', чем приведенные выше.



Фиг. 4

Поступила 20 III 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л. М. Теория ползучести. М., Физматгиз, 1960.
2. Findley W. N. Creep and relaxation of plastics. Machine Design, 1960, 32, 10, 205.
3. Соснин О. В. Перераспределение напряжений в сплошном вращающемся диске в первой стадии ползучести. ПМТФ, 1960, № 2.
4. Работнов Ю. Н. О некоторых возможностях описания неустановившейся ползучести с приложением к исследованию ползучести роторов. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 5.
5. Кошелев П. Ф., Степанычев Е. И. О статических испытаниях армированных пластмасс. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 5.
6. Баев Л. В., Малинин Н. И., Работнов Ю. Н., Шубин И. А. Установка для испытаний пластмасс на ползучесть. Заводская лаборатория, 1962, № 4.
7. Бартенев Г. М. Механические свойства и тепловая обработка стекла. М., Госстройиздат, 1960.